压电柔性结构振动的鲁棒控制

杨海峰 王晓军 邱志平

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 针对具有多面体型参数不确定性和外界扰动的柔性悬臂梁系统,研究其振动的鲁棒控制问题. 基于压电柔性悬臂梁系统的状态方程,利用一种扩展 LMI(Linear Matrix Inequality),对柔性悬臂梁的振动提出了改进的 H_2/H_∞ 综合状态反馈鲁棒控制方法. 此方法针对多面体型参数不确定性系统引入不同的 Lyapunov 函数,降低了原来 H_2/H_∞ 综合鲁棒控制方法中由于使用一个公共 Lyapunov 函数而产生的保守性. 通过 Matlab 分别采用改进和未改进的 H_2/H_∞ 鲁棒控制方法对柔性悬臂梁系统的振动控制进行了数值仿真. 仿真结果表明, 2种方法都使柔性悬臂梁的振动得到了良好控制,而改进方法的控制效果更好.

关 键 词: 压电材料; 悬臂梁; 不确定系统; 振动控制; 鲁棒性; 状态反馈

中图分类号: TB 53

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2009)08-0957-05

Robust vibration control of flexible piezoelectric structure

Yang Haifeng Wang Xiaojun Qiu Zhiping

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The robust vibration control for the flexible cantilever beam system with polytopic-type uncertainties and environmental disturbances is studied. Based on the state equation, the improved multi-objective H_2/H_∞ state-feedback robust control method is proposed for the flexible cantilever beam system by using a kind of extended linear matrix inequality (LMI). The presented method, which introduces multi Lyapunov functions for the polytopic-type uncertainties system, reduces the conservatism stemmed from the single Lyapunov function used in the unimproved method. The robust vibration control for the flexible cantilever beam system is simulated in Matlab by these two methods respectively. The results show that the flexible cantilever beam is well controlled via the two methods, and the improved method gets a better result.

Key words: piezoelectric materials; cantilever beam; uncertain systems; vibration control; robustness; state-feedback

随着航空航天事业的发展,空间结构日趋大型化和复杂化,许多航天器结构如太阳帆板等都属于柔性结构. 柔性结构受到激励作用时,会持续大幅振动,严重影响其正常工作. 所以针对系统存在的各种不确定性,对柔性结构振动进行鲁棒控制已成为受到普遍关注的热点课题. 文献[1]对大型空间结构姿态提出了综合鲁棒控制方法;文献[2-3]对柔性梁振动的鲁棒控制进行了理论和实验研究;文献[4]研究了压电层合板振动的鲁棒控制问题;文献[5]提出一种 H_2/H_∞ 动态输出反馈鲁棒控制,在确保系统 H_∞ 范数小于设定上界的条件下总体优化 H_2 范数;文献[6-7]针对多面体型参数不确定系统,分别对 H_∞ 和 H_2 控制提出了改进保守性的新方法. 文献[8]利用一种 LMI(Linear Matrix Inequality),研究了基于扩展 LMI 的多目标 H_2/H_∞ 状态反馈控制,但未考虑参数不确定性对系统的影响. 本文基于改进保守性理论,利用文献[8]中扩展的 LMI,研究改进

收稿日期: 2008-07-14

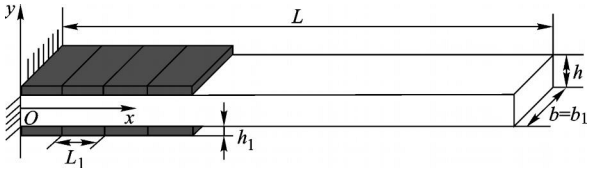
基金项目: 凡舟青年科研基金资助项目(20080503)

作者简介: 杨海峰(1985-),男,河北秦皇岛人,硕士生, buaayhf@sina.com.

H_2/H_∞状态反馈鲁棒控制,应用于具有多面体型参数不确定性和外界扰动的悬臂梁系统的振动控制中.利用 Matlab数值仿真,与未改进的 H_2/H_∞状态反馈鲁棒控制方法进行对比.

1 不确定性压电柔性悬臂系统模型

考虑如图 1所示压电柔性悬臂梁系统.



L—梁的长度; b—梁的宽度; h—梁的厚度; L_1—压电片的长度; b_1—压电片的宽度; h_1—压电片的厚度.

图 1 压电柔性悬臂梁系统示意图

第 i个压电片两端的坐标分别为 x_{2i}和 x_{2i+1}.上下表面分别粘贴压电致动器、传感器,忽略粘贴层对振动的影响.对于柔性悬臂梁这种一维情况,压电方程为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= Y_{11}\varepsilon_1 - d_{31}E_3\\ D_3 &= g_{31}\varepsilon_1 + \gamma_{33}E_3\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中,σ_1, ε_1为 x方向的应力和应变; Y_{11}为弹性常数; E_3, D_3为 y方向电场强度和电位移; d_{31}为压电应力常数; g_{31}为压电应变常数; γ_{33}为介电常数.

由于不存在外电场,可得到第 i个传感器的输出电压与挠度 w的关系为

$$V_{si} = b_1\int_{x_{2i}}^{x_{2i+1}} D_3\,\mathrm{d}x = \frac{g_{31}b_1(h+h_1)}{2C_p}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+1}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{g_{31}b_1(h+h_1)}{2C_p}[w'(x_{2i+1},t) - w'(x_{2i},t)] \tag{2}$$

式中,C_p为电容.

压电致动器产生的弯矩与电压的关系为[9]

$$T(x,t) = \sum_{i=1}^{m} K_a V_i [H(x-x_{2i+1}) - H(x-x_{2i})] \tag{3}$$

式中,$H(x)$为 Heaviside阶跃函数; V_i为第 i个致动片上所加的电压; m为压电片的个数;等效系数

$$K_a = -\frac{b_1}{12}\cdot\frac{Eh^2P}{1-P}\cdot\frac{d_{31}}{h_1} \tag{4}$$

式中,$P = -\dfrac{E_1}{E}\cdot\dfrac{6h_1h(h_1+h)}{h^3+8h_1^3+6hh_1^2}$, E和 E_1分别为柔性悬臂梁和压电材料的弹性模量. $H(x)$有如下性质:

$$\left.\begin{aligned}&H'(x) = \delta(x)\\ &H''(x) = \delta'(x)\\ &\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)H'(x-x_0)\,\mathrm{d}x = g(x_0)\\ &\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)H''(x-x_0)\,\mathrm{d}x = -g'(x_0)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

根据经典欧拉-伯努利梁理论,压电柔性悬臂梁系统的动力学方程为

$$\rho A\ddot{w}(x,t) + C_n\dot{w}(x,t) + EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = \sum_{i=1}^{m} K_a V_i(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[H(x-x_{2i+1}) - H(x-x_{2i})] \tag{6}$$

其中,ρ为悬臂梁的密度; A为悬臂梁横截面积; EI为抗弯刚度; C_n为自然阻尼系数.

柔性悬臂梁作弯曲振动时,取梁的前 n阶模态,w可以表示为

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)\eta_i(t) \tag{7}$$

式中,$\phi_i(x)$和 $\eta_i(t)$分别为第 i阶振型、模态坐标.

通过模态坐标变换并考虑式(5),式(6)和系统输出 y可以写成

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{\eta} + C\dot{\eta} + K_u\eta = DU(t)\\ &y = C_s\eta\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中, $\eta = [\eta_1\ \cdots\ \eta_n]^{\mathrm{T}}$; $C = \mathrm{diag}(2\xi_1\omega_1, \cdots, 2\xi_n\omega_n)$; $K_u = \mathrm{diag}(\omega_1^2, \cdots, \omega_n^2)$; ω_i为固有角频率; ξ_i为模态阻尼比; $U(t)\in\mathbf{R}^m$为致动器控制电压向量; $y\in\mathbf{R}^m$; $D\in\mathbf{R}^{n\times m}$为致动片对各阶模态的影响矩阵; $C_s\in\mathbf{R}^{m\times n}$为传感器的输出影响矩阵.

$$C_s = g_{31}b_1(h+h_1)\cdot(2C_p)^{-1}\cdot[\psi_{ij}]_{m\times n}^{\mathrm{T}}$$

$$D = K_a[\psi_{ij}]_{m\times n}$$

$$\psi_{ik} = \phi_k'(x_{2i+1}) - \phi_k'(x_{2i})$$

取状态向量 $x = [\eta\ \ \dot{\eta}]^{\mathrm{T}}$,控制输入向量 $u = U$,并考虑外界扰动 $f\in\mathbf{R}^1$,则式(8)可写成

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 f + B_2 u\\ y &= C_1 x\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中, $A = \begin{bmatrix}\mathbf{0} & I\\ -K_u & -C\end{bmatrix}$; $B_2 = \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ D\end{bmatrix}$; $C_1 = [C_s\ \ \mathbf{0}]$; $B_1 = \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{1\times n} & \phi_1(x_f) & \cdots & \phi_n(x_f)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$; x_f为外界扰动 f作用位置.

2 改进的 H_2/H_∞综合状态反馈控制

考虑一般连续时间系统:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax + B_1 f + B_2 u\\ z_\infty &= C_\infty x + D_{\infty 1} f + D_{\infty 2} u\\ z_2 &= C_2 x + D_{21} f + D_{22} u\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式中, $x\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量; $z_\infty\in\mathbf{R}^{m_\infty}$, $z_2\in\mathbf{R}^{m_2}$为被调输出函数; $f\in\mathbf{R}^r$; $u\in\mathbf{R}^p$ 为控制输入;其它为适当维数的系数矩阵; $D_{21}=0$,假设状态是可以直接测量得到的, $u=Kx$, $T_{z_\infty f}(s)$与 $T_{z_2 f}(s)$分别表示由 f至 z_∞以及由 f至 z_2 的闭环传递函数. 针对上述系统,文献[8]对不考虑参数摄动情况进行了 H_2/H_∞综合控制,为下面叙述方便,将其以引理 1给出.

引理 1[8]　对于式(10)和给定常数 γ_∞,存在 $u=Kx$,使得闭环系统满足 $\|T_{z_\infty f}(s)\|_\infty<\gamma_\infty$,总体优化 $\|T_{z_2 f}(s)\|_2$取得最小值,当且仅当存在正定对称矩阵 X_2, X_∞,矩阵 H和可逆矩阵 V使得

$$\min \mathrm{Tr}Q$$

$$\begin{bmatrix} -(V+V^{\mathrm{T}}) & V^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+H^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}+X_2 & V^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}}+H^{\mathrm{T}}D_{22}^{\mathrm{T}} & V^{\mathrm{T}} \\ AV+B_2H+X_2 & -X_2 & 0 & 0 \\ C_2V+D_{22}H & 0 & -I & 0 \\ V & 0 & 0 & -X_2 \end{bmatrix}<0$$

$$\begin{bmatrix} -(V^{\mathrm{T}}+V) & V^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+H^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}+X_\infty & V^{\mathrm{T}}C_\infty^{\mathrm{T}}+H^{\mathrm{T}}D_{\infty 2}^{\mathrm{T}} & V^{\mathrm{T}} & 0 \\ AV+B_2H+X_\infty & -X_\infty & 0 & 0 & B_1 \\ C_\infty V+D_{\infty 2}H & 0 & -\gamma_\infty I & 0 & D_{\infty 1} \\ V & 0 & 0 & -X_\infty & 0 \\ 0 & B_1^{\mathrm{T}} & D_{\infty 1}^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma_\infty I \end{bmatrix}<0$$

$$\begin{bmatrix} X_2 & B_1 \\ B_1^{\mathrm{T}} & Q \end{bmatrix}>0 \qquad (11)$$

$u=HV^{-1}x$

下面讨论参数不确定系统降低保守性的改进方法,对于具有多面体型参数不确定性:

$$\Omega_{(A,B_1,B_2,C_\infty,D_{\infty 1},D_{\infty 2},C_2,D_{22})}\triangleq\left\{(A,B_1,B_2,C_\infty,D_{\infty 1},D_{\infty 2},C_2,D_{22})\mid (A,B_1,B_2,C_\infty,D_{\infty 1},D_{\infty 2},C_2,D_{22})=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(A_i,B_{1,i},B_{2,i},C_{\infty,i},D_{\infty 1,i},D_{\infty 2,i},C_{2,i},D_{22,i});\alpha_i\geq 0,\sum_{i=1}^{N}\alpha_i=1\right\} \qquad (12)$$

的系统,如果在不确定多面体的 N 个顶点 $(A_i, B_{1,i}, B_{2,i}, C_{\infty,i}, D_{\infty 1,i}, D_{\infty 2,i}, C_{2,i}, D_{22,i})$, $i=1,\cdots,N$ 处可以找到满足 N 个相应线性矩阵不等式的公共解 X,那么系统对所有位于多面体内的不确定性都可以找到满足线性矩阵不等式的可行解[10]. 但是,这种方法有着明显的保守性,文献[6]中已经证明,如果对于多面体的每个顶点,分别获得一个满足线性矩阵不等式的 X_i,然后选取所有 X_i 的凸组合 $X=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_NX_N$ 作为系统的变量矩阵 X就能够降低保守性,但这个方法应用的前提是线性矩阵不等式中不能含有系统矩阵与 Lyapunov变量矩阵的乘积项.

考虑式(10)具有不确定性(式(12)),由于式(11)中变量矩阵 X_∞, X_2 与系数矩阵是分离的,所以可利用式(11)对系统进行改进的 H_2/H_∞综合鲁棒控制.

根据上文的改进保守性理论,只要在每个不确定多面体的顶点处都能够找到满足式(11)的可行解 X_∞和 X_{2i},那么式(10)表示的系统就会满足相应于式(11)的性能要求,由此可以得到定理 1.

定理 1　对于具有不确定性(式(12))的式(10),给定 $\gamma_\infty>0$,使 $\|T_{z_\infty f}(s)\|_\infty<\gamma_\infty$,总体优化 $\|T_{z_2 f}(s)\|_2$最小,当且仅当存在正定对称矩阵 $X_{\infty,i}$, $X_{2,i}$, H以及 V,对不确定多面体的各个顶点 $(A_i, B_{1,i}, B_{2,i}, C_{\infty,i}, D_{\infty 1,i}, D_{\infty 2,i}, C_{2,i}, D_{22,i})$, $i=1,\cdots,N$,使下面 $3N$ 个线性矩阵不等式约束的优化问题有解.

$$\min \mathrm{Tr}Q$$

$$\begin{bmatrix} -(V+V^{\mathrm{T}}) & V^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}}+H^{\mathrm{T}}B_{2,i}^{\mathrm{T}}+X_{2,i} & V^{\mathrm{T}}C_{2,i}^{\mathrm{T}}+H^{\mathrm{T}}D_{22,i}^{\mathrm{T}} & V^{\mathrm{T}} \\ A_iV+B_{2,i}H+X_{2,i} & -X_{2,i} & 0 & 0 \\ C_{2,i}V+D_{22,i}H & 0 & -I & 0 \\ V & 0 & 0 & -X_{2,i} \end{bmatrix}<0$$

$$\begin{bmatrix} -(V^{\mathrm{T}}+V) & V^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}}+H^{\mathrm{T}}B_{2,i}^{\mathrm{T}}+X_{\infty,i} & V^{\mathrm{T}}C_{\infty,i}^{\mathrm{T}}+H^{\mathrm{T}}D_{\infty 2,i}^{\mathrm{T}} & V^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ A_iV+B_{2,i}H+X_{\infty,i} & -X_{\infty,i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_{1,i} \\ C_{\infty,i}V+D_{\infty 2,i}H & \mathbf{0} & -\gamma_{\infty}\mathrm{I} & \mathbf{0} & D_{\infty 1,i} \\ V & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -X_{\infty} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{1,i}^{\mathrm{T}} & D_{\infty 1,i}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & -\gamma_{\infty}\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} X_{2,i} & B_{1,i} \\ B_{1,i}^{\mathrm{T}} & Q \end{bmatrix} > 0 \tag{13}$$

$u=HV^{-1}x$,在实际工程中通过测量输出到状态量的观测得到状态量,进而得到控制律.

3 数值算例

考虑柔性悬臂梁: $l=1.2\,\mathrm{m}$, $b=5\,\mathrm{cm}$, $h=2\,\mathrm{mm}$, $\rho=2\,780\,\mathrm{kg/m^3}$, $E=70\,\mathrm{MPa}$,阻尼比均为0.005; PZT51压电材料: $l_1=0.12\,\mathrm{m}$, $b_1=5\,\mathrm{cm}$, $h_1=0.5\,\mathrm{mm}$, $E_1=63\,\mathrm{MPa}$, d_{31}为 $2.1\times10^{-10}\,\mathrm{m/V}$, $g_{31}=1.15\times10^{-2}\,\mathrm{Vm/N}$, $C_p=1.05\times10^{-7}\,\mathrm{F}$;压电致动片与传感器的数量都是4个;外界扰动力作用在距离固定端 $0.85L$ 处.

取系数矩阵:

$$D_{\infty 2}=D_{22}=10^{-5}\times[\mathbf{0}_{8\times4}\quad \mathrm{I}_{4\times4}]^{\mathrm{T}}$$

$$C_{\infty}=2\times\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{4\times4} & \mathbf{0}_{4\times4}\\ \mathbf{0}_{8\times4} & \mathbf{0}_{8\times4}\end{bmatrix}$$

$$C_2=0.05\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{4\times4} & \mathbf{0}_{4\times4} & \mathbf{0}_{4\times4}\\ \mathbf{0}_{4\times4} & \mathrm{I}_{4\times4} & \mathbf{0}_{4\times4}\end{bmatrix}$$

$D_{\infty 1}=D_{21}=\mathbf{0}$;保留前4阶模态.考虑系统几何参数、模态频率及杨氏模量具有不确定性, A和 B_2 在如下的多面体内变化

$$\Omega_{(A,B_2)}\triangleq\left\{(A,B_2)\mid(A,B_2)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(A_i,B_{2,i});\alpha_i\geq0,\sum_{i=1}^{N}\alpha_i=1\right\}\tag{14}$$

取 A和 B_2 有20%的不确定性,则不确定多面体的4个顶点为: $[0.8A\quad 0.8B_2]$, $[0.8A\quad 1.2B_2]$, $[1.2A\quad 0.8B_2]$, $[1.2A\quad 1.2B_2]$.

利用Matlab对线性矩阵不等式(式(13))求解,并比较改进与未改进 H_2/H_∞ 综合控制方法对柔性悬臂梁振动的控制效果.取 $\gamma_\infty=0.5$,得到的结果如图2~图5.图2是柔性悬臂梁在一阶固有振动频率扰动为 $0.05\sin\omega_1 t$ 的作用下自由端挠度的开环响应,由于发生共振使得悬臂梁的振动发散、不稳定,很可能导致破坏;图3是强度为0.05N的脉冲作用下系统开环响应,由于柔性悬臂梁阻尼很小,所以衰减速度很慢;图4和图5则是控制后系统的闭环响应; y_1, y_2 分别是使用改进方法和未改进方法所得到控制后的挠度响应.

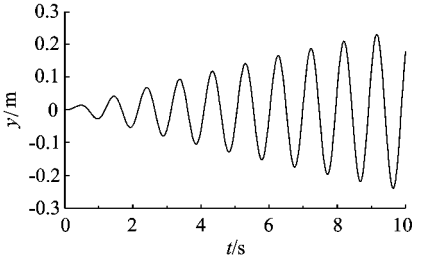


图2 一阶共振频率正弦扰动下开环响应

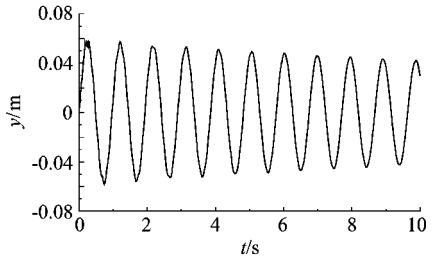


图3 脉冲扰动下开环响应

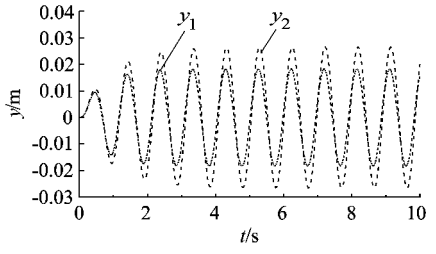


图4 2种控制方法得到的闭环响应(一阶)

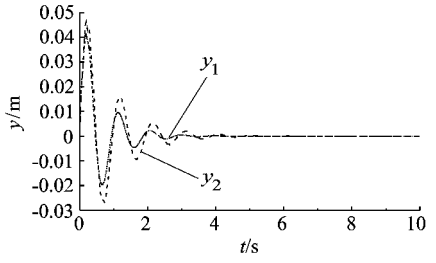


图5 2种控制方法得到的闭环响应(脉冲)

从图4、图5中可以看到,控制后悬臂梁系统在共振情况下振动已趋于稳定,且幅值较小,相比未加控制情况有明显改善;在脉冲扰动下,控制后的系统阻尼增大,具有了良好的衰减性能;在改进控制方法与未改进控制方法的对比中,前者取得了更好的效果,降低了后者的保守性.

4 结束语

本文在压电柔性悬臂梁动力学模型的基础上,考虑系统的多面体型参数不确定性和外界扰动,对其振动进行改进的 H_2/H_∞综合鲁棒控制.仿真结果表明,控制后柔性悬臂梁在共振情况下能够保持小幅稳定振动,在脉冲扰动下快速衰减,对参数摄动具有鲁棒性,取得了良好的控制效果;而且这种改进方法在不确定多面体的各个顶点处选取不同的 Lyapunov函数,降低了保守性.

参考文献 (References)

[1] Chiang R Y, Liu J Y, Bender D J. Integrated robust control design methodology for an advanced spacecraft with flexible structure[R]. AIAA-2008-7013, 2008

[2] Gosavi S V, Kelkar A G. Modelling, identification, and passivity-based robust control of piezo-actuated flexible beam[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2004, 126(2): 260 - 271

[3] 吴大方,刘安成,麦汉超,等. 压电智能柔性梁振动主动控制研究[J]. 北京航空航天大学学报, 2004, 30(2): 160 - 163
Wu Dafang, Liu Ancheng, Mai Hanchao, et al. Study on active vibration control of piezoelectric intelligent flexible beam[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2004, 30(2): 160 - 163(in Chinese)

[4] 胡举喜,邱志平. 压电层合板振动的鲁棒控制[J]. 北京航空航天大学学报, 2008, 34(8): 873 - 877
Hu Juxi, Qiu Zhiping. Using the robust control method to control the vibration of piezoelectric laminated plates[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2008, 34(8): 873 - 877(in Chinese)

[5] 徐亚兰,陈建军,王小兵. 模型不确定压电柔性结构的鲁棒振动控制[J]. 机械强度, 2006, 28(2): 185 - 189
Xu Yalan, Chen Jianjun, Wang Xiaobing. Robust vibration control for uncertain flexible structures[J]. Journal of Mechanical Strength, 2006, 28(2): 185 - 189 (in Chinese)

[6] Shaked U. Improved LMI representations for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(4): 652 - 656

[7] Apkarian P, Tuan H D, Bernussou J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(12): 1941 - 1946

[8] 杨志红,马广富,李传江. 基于扩展 LMI的多目标 H_2/H_∞状态反馈控制综合[J]. 机电与控制学报, 2004, 8(4): 333 - 337
Yang Zhihong, Ma Guangfu, Li Chuanjiang. Multi objective H_2/H_∞ state-feedback control synthesis based on extended LMI characterizations[J]. Electric Macines and Control, 2004, 8(4): 333 - 337 (in Chinese)

[9] Dimitriadis E K, Fuller C R, Rogers C A. Piezoelectric actuators for distributed vibration excitation of thin plates[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1991, 113: 100 - 107

[10] 贾英民. 鲁棒 H_∞控制[M]. 北京:科学出版社, 2007
Jia Yingmin. Robust H_∞ control[M]. Beijing: Science Press, 2007(in Chinese)

(责任编辑:赵海容)

(上接第 952页)

参考文献 (References)

[1] Kapila V, Sparks A G, Buffington J M, et al. Spacecraft formation flying: dynamics and control[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2000, 23(3): 561 - 564

[2] 林来兴. 分布式空间系统和航天器编队飞行辨析[J]. 航天器工程, 2008, 17(4): 24 - 29
Lin Laixing. Study on distributed space systems and spacecraft formation flying[J]. Spacecraft Engineering, 2008, 17(4): 24 - 29(in Chinese)

[3] Ichimura Y, Ichikawa A. Optimal impulsive relative orbit transfer along a circular orbit[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2008, 31(4): 1014 - 1027

[4] 孟云鹤,韩宏伟,戴金海. 近地轨道航天器编队构形重构的一种四冲量控制方法[J]. 宇航学报, 2008, 29(2): 505 - 510
Meng Yunhe, Han Hongwei, Dai Jinhai. A four-impulses control method for reconfiguration of LEO spacecraft formation flying[J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(2): 505 - 510(in Chinese)

[5] Vaddi S S, Alfriend K T, Vadali S R. et al. Formation establishment and reconfiguration using impulsive control[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2005, 28(2): 262 - 268

[6] Lawden D F. Optimal trajectories for space navigation[M]. London: Butterworths, 1963

[7] Carter T E. New form for the optimal rendezvous equations near a keplerian orbit[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1990, 13(1): 183 - 186

[8] 崔海英,李俊峰,高云峰. 基于 Lawden方程的理想编队队形设计[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2006, 46(2): 271 - 275
Cui Haiying, Li Junfeng, Gao Yunfeng. Ideal relative trajectories design based on Lawden's equations[J]. Journal Of Tsinghua University(Science & Technology), 2006, 46(2): 271 - 275(in Chinese)

[9] Yamanak K, Ankersen F. New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit[J]. Journal Of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25(1): 60 - 66

(责任编辑:张　嵘)