黎曼流形的 Delaunay三角化和 Voronoi图

程 丹 杨 钦 蔡 强
(北京航空航天大学 计算机学院, 北京 100191) (北京工商大学 计算机学院, 北京 100037)

金茂忠
(北京航空航天大学 计算机学院, 北京 100191)

摘 要: 主要研究黎曼空间中 Delaunay三角化和 Voronoi图. 首先, 分析和讨论了黎曼流形的 Delaunay三角化和 Voronoi图的存在性和生成算法. 然后, 在分析已有研究成果基础上, 给出了黎曼流形 Delaunay三角化和 Voronoi图的一些性质和证明, 并提出了采用黎曼流形描述问题的必要性和使用坐标卡研究黎曼流形的优势和意义. 最后, 以二维流形为例, 介绍了将模型初始数据解释为黎曼流形的算法, 包括建立坐标卡, 定义流形函数等. 在黎曼流形定义的基础上, 详细描述了基于坐标卡生成模型的 Delaunay三角化和 Voronoi图的算法, 并给出具体实例.

关 键 词: 黎曼流形; Delaunay三角化; Voronoi图; 存在性; 生成算法
中图分类号: TP 391. 4
文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2009) 08-0962-06

Delaunay triangulation and Voronoi diagrams for Riemannian manifolds

Cheng Dan Yang Qin
(School of Computer Science and Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)
Cai Qiang
(College of Computer Science and Engineering, Beijing Technology & Business University, Beijing 100037, China)
Jin Maozhong
(School of Computer Science and Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract Delaunay triangulation and Voronoi diagrams in Riemannian space were studied. Firstly, the existence and generation algorithm of Delaunay triangulation and Voronoi diagrams were discussed. Then on the basis of analysing the existed research achievements, some properties of Delaunay triangulation and Voronoi diagrams for Riemannian were given and proved. The necessities of describing object by Riemannian manifolds and advantages of researching Riemannian manifolds by charts were presented. Finally, taking 2-manifold as an example, the algorithm of getting Riemannian manifolds according to initial data of models was described, which included creating charts, defining functions of manifolds, and so on. The algorithm of creating Delaunay triangulation and Voronoi diagrams of models based on charts was presented, and some examples were provided.

Key words Riemannian manifolds; Delaunay triangulation; Voronoi diagrams; existence; generation algorithm

收稿日期: 2008-12-22
基金项目: 北京市自然科学基金资助项目 (4062010)
作者简介: 程 丹 (1979-), 女, 辽宁沈阳人, 博士生, chengdan@cse.buaa.edu.cn.

Voronoi图是计算几何的基本结构, 在数值分析和空间分析等方面具有重要作用. 欧氏空间的 Voronoi源于文献 [1]于 1850年研究的平面点的邻域问题, 文献 [2]于 1908年将其结果扩展到高维空间. 大量文献研究了欧氏空间的 Delaunay三角化和 Voronoi图, 从理论到算法已经形成了很完善的体系. 但在工程应用中, 会出现许多复杂问题, 如油藏数值模拟中, 存在多个地层面和复杂断裂情况, 无法采用欧氏空间的网格化进行精确描述. 而黎曼流形可以准确描述这种复杂的问题.

黎曼流形的 Delaunay三角化和 Voronoi图的主要研究领域有两个: 存在性和生成算法. 存在性是指黎曼流形上 Voronoi图和 Delaunay三角化的存在条件, 以及在该条件下 Voronoi图和 Delaunay三角化是否对偶. 生成算法研究在存在条件下, 如何在黎曼流形上构建一个 Voronoi划分. 本文主要从黎曼流形 Delaunay三角化及 Voronoi图的存在性和生成算法两方面进行讨论和研究.

本文首先介绍相关基础知识, 包括流形、黎曼流形、测地线、Voronoi图和坐标卡等. 其次, 讨论黎曼流形上 Delaunay三角化和 Voronoi图的存在条件和一些性质. 再次, 讨论当前已有的黎曼流形 Delaunay三角化和 Voronoi图的生成算法, 并提出基于坐标卡生成 Delaunay三角化和 Voronoi图的思路. 最后, 介绍基于坐标卡在二维流形上生成 Delaunay三角化和 Voronoi图的算法和实例.

1　基础知识

1 1　微分流形基本概念

定义 **1**　设 M 为拓扑空间, 若 M 中任意两个不同的点有互不相交的邻域, 则称 M 为 Hausdorff空间.

定义 **2**　设 M 是一个非空的 Hausdorff空间, 如果对于每一点 $p\in M$, 都存在 p 点的开邻域 $U\subset M$, 以及从 U 到 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的某个开集上的同胚 $\varphi: U\to \mathbf{R}^n$, 则称 M 为一个 n 维拓扑流形, 其中 (U, φ)称为 M 的一个坐标卡.

定义 **3**　设 M 是一个拓扑流形, $A=\{(U_\alpha, \varphi_\alpha);\ \alpha\in I\}$是 M 的若干坐标卡构成的集合, I为指标集. 如果 A 满足下列 3个条件, 则称 (M, A)是一个 n维 C^r微分流形:

1) $\{U_\alpha;\ \alpha\in I\}$是 M 的一个开覆盖;

2) $\forall\ \alpha, \beta\in I$, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$与 (U_β, φ_β)是 C^r相关的;

3) A 是极大的; 即对于 M 的任意一个坐标卡 (U, φ), 如果它和 A 中的每一个成员都是 C^r相关的, 则它一定属于 A.

设 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$和 (U_β, φ_β)是流形 M 上的两个坐标卡, 如果 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$和 (U_β, φ_β)重叠, 便会形成一个重叠区域 $U_{\alpha\beta}$, 如图 1, $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta$.

映射 φ_α和 φ_β将区域 $U_{\alpha\beta}$分别映射到各自的欧氏空间中, 分别记作 $u_{\alpha\beta}$和 $u_{\beta\alpha}$, 即 $u_{\alpha\beta}=\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$, $u_{\beta\alpha}=\varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$, 则转换函数 $\Psi_{\alpha\beta}=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$是从 $u_{\alpha\beta}$到 $u_{\beta\alpha}$的映射. 转换函数将坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$和 (U_β, φ_β)的重叠部分在欧氏空间的区域黏合起来.

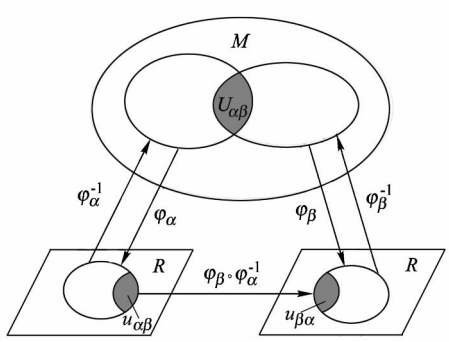


图 1　两个坐标卡的转换函数

设 p 是 n维黎曼流形 M 上的一点, $B'_\alpha: \alpha\to\mathbf{R}$是坐标卡 α的混合函数, $E_\alpha: \alpha\to\mathbf{R}^n$是坐标卡 α的嵌入函数. 那么 M 的混合函数和嵌入函数为

$$B_\alpha(p)=\frac{B'_\alpha(\varphi_\alpha(p))}{\sum_{\alpha\in A}B'_\alpha(\varphi_\alpha(p))}$$

$$E(p)=\sum_{\alpha\in A}B_\alpha(p)E_\alpha(\varphi_\alpha(p))$$

如果坐标卡 α不包含点 p, 则定义 $B'_\alpha=0$. 除以混合函数的和是一个正规化的步骤, 并且确保混合函数构成一个单位分解. 同时为了确保混合函数的分母不为 0, 要求每个坐标卡上的混合函数不为 0. 混合函数是将流形的局部性质和整体性质联系起来的一个有力工具.

1 2　黎曼流形

定义 **4**　设 M 是一个 n维拓扑流形, A 是 M 的一个 C^r微分结构, 则称 (M, A)是一个 n维 C^r微分流形. C^∞微分流形称为光滑流形.

定义 **5**　设 M 是一个 n维光滑流形, g 是 M 上的一个光滑的二阶协变张量场, 如果 g 是对称、正定的, 即对于每一点 $p\in M$, $\boldsymbol{g}(p)$是切空间 T_pM 上的一个对称、正定的二阶协变张量. 则称 g 是 M 上的一个黎曼度量, 指定了黎曼度量的光滑流形称为黎曼流形, 记为 (M, g).

黎曼流形中具有了度量, 因此, 黎曼流形上有距离的概念, 而流形上没有.

定义 **6**　设 M 为 n维光滑流形, M 上光滑切向量场的集合记为 $\aleph(M)$. M 上的一个联络 D 是

指满足下列条件的映射 $D: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$:

1) $D_{Y+fZ}X = D_YX + fD_ZX$;

2) $D_Y(X + \lambda Z) = D_YX + \lambda D_YZ$;

3) $D_Y(fX) = Y(f)X + fD_YX$.

其中 $D_YX = D(X, Y), X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $f \in C^\infty(M)$. 指定了一个联络 D 的光滑流形 (M, D) 称为一个仿射联络空间.

1.3 测地线

黎曼流形中最值得研究的曲线是测地线, 测地线是黎曼流形上两点之间的局部最短距离, 它是黎曼流形的内蕴几何特征. 黎曼流形上测地线和测地距离的定义如下:

定义 **7** 仿射联络空间 (M, D) 中的一条光滑曲线 $\gamma: I \to M$ 称为测地线, 如果它的切向量 $\gamma'(t)$ 沿 γ 是平行的切向量场, 即

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) \equiv D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$$

定义 **8** 设 (M, g) 是一个 n 维黎曼流形, p 和 q 分别为 M 上的两点, 则 p 到 q 的测地距离为 M 上连接 p 和 q 的最短测地线的长度, 记为 $d(p, q)$. 若用 $\gamma: [a, b] \to M$ 表示 M 上连接 p 和 q 的最短测地线, 则

$$d(p, q) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt$$

1.4 Delaunay三角化和Voronoi图

黎曼流形 Delaunay三角化和 Voronoi图是欧氏空间 Delaunay三角化和 Voronoi图在黎曼空间的自然推广. 欧氏空间 Delaunay三角化和 Voronoi图的定义不再赘述. 黎曼空间中研究 Delaunay三角化和 Voronoi图是以测地距离为度量标准. 下面给出黎曼流形的 Delaunay三角化和 Voronoi图的定义.

定义 **9** 设 M 是一个 n 维黎曼流形, S 为 M 上的有限点集, $T(S)$ 是 S 的一个三角网格, 如果对于任意一个 t, $t \in T(S)$, 都存在外接测地球 D, 并且满足 $D \cap S = \Phi$, 则 $T(S)$ 是点集的一个 Delaunay三角化.

定义 **10** 设 M 是一个 n 维黎曼流形, $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ 为 M 上的有限点集, S 中任意一点 s_i 的邻域由其邻近点组成, 并满足 $V_i = \{x \in M \mid d(s_i, x) \leqslant d(s_j, x), \forall j\}$, V_i 为 M 上的一个 Voronoi单元, 所有 V_i 构成 M 的一个划分, 称为 M 的 Voronoi图.

2 存在性研究

2.1 存在性

黎曼流形 Delaunay三角化和 Voronoi图的一个主要研究领域是存在条件. 与欧氏空间相比, 黎曼流形的 Delaunay三角化和 Voronoi图要复杂一些: ①黎曼流形上过任意两点的测地线不唯一; ②过 n 维黎曼流形上 $n+1$ 个点的球不唯一[3]. 这些都对黎曼流形的研究造成困难, 因为这些情况会造成黎曼流形上 Delaunay三角化甚至三角化不存在. 因此, 研究黎曼流形上 Delaunay三角化和 Voronoi图的存在性是基础问题.

文献[3-4]首先给出了黎曼流形上 Delaunay三角化的存在条件, 即当黎曼流形上点足够密时, 点集的 Delaunay三角化存在, 并且与 Voronoi图对偶. 其实质就是黎曼流形上足够小空间内的性质与欧氏空间相似, 这个足够小的范围被限定在测地凸邻域内. 此外, 文献[3-4]通过限定黎曼流形上布点的密度和质量来保证 Delaunay三角化的存在性. 文献[5-6]也分别就分片平曲面和双曲空间中上半平面的三角化和 Voronoi图的存在性、对偶关系进行了研究, 给出了实用的结论. 但是, 由于对象具有针对性, 所以证明和结论不适用于一般的黎曼流形.

文献[3-4]的存在条件说明了黎曼流形上 Delaunay三角化和 Voronoi图存在的实质问题, 但是文中提出密度控制方法在实际应用时难以控制. 如果采用坐标卡来研究黎曼流形, 在生成算法中, 可通过限定坐标卡的范围来控制黎曼流形的研究区域, 即限定坐标卡的范围在其局部坐标原点的测地凸邻域内. 将坐标卡限制在测地凸邻域内, 可以保证坐标卡内的测地线是唯一且最短的. 这样, 便可以忽略黎曼流形上坐标卡外的区域, 研究坐标卡内的情况. 此外, 坐标卡内的点要满足一定的质量, 即点要均匀分布. 如果坐标卡内存在一个质量差的单纯形, 那么它的外接球的球心有可能落在当前坐标卡外, 会破坏 Delaunay三角化的存在性.

2.2 一些性质

在满足存在条件的情况下, 黎曼流形上的 Delaunay三角化和 Voronoi图具有一些实用的性质.

性质 **1**[3] 设 M 是 n 维黎曼流形, $S = \{s_1, \cdots, s_m\}$ 是 M 上足够密的点集, 则 $n+1$ 个点 $s_1, \cdots, s_{n+1} \subset B(z, \mathrm{rad}(z)) \cap S$, $z \in M$, 确定唯一半径最小的外接球.

$B(z, \mathrm{rad}(z))$的定义见文献[3], 它规定了 S 中点的分布质量, 可以避免形成过于畸形的网格, 性质 1与欧氏空间中的 $n+1$个点确定一个外接球性质是相对应的, 该性质对于生成 Delaunay三角化网格十分重要.

性质 **2**[7]　设 M 是 n维黎曼流形, w 和 v分别是 M 上的两个维诺核, 则 w 和 v之间的维诺边界由二次曲线段或二次曲面片组成.

性质 **3**　设 M 是 n维黎曼流形, w 和 v分别是 M 上的两个维诺核, 则 M 上过 w 和 v两点的测地线与连接 w 和 v之间的维诺边界子流形在交点处正交.

证明　设连接 w 和 v两点的测地线与 w 和 v之间的维诺边界子流形 N 相交于 q_0点, 如果可以证出连接 w 和 q_0两点的测地线是 w 到子流形 N 的最短测地线, 那么就可以得出连接 w 和 q_0两点的测地线在 q_0点处与 N 正交[8], 即 M 上过 w 和 v 两点的测地线与连接 w 和 v之间的维诺边界子流形在交点处正交. 在 N 上任取一点 q, $q \neq q_0$, 因为 q_0在连接 w 和 v两点的测地线上, 有 $d(w, q) + d(v, q) > d(w, q_0) + d(v, q_0)$, 又因为 q和 q_0均在 N 上, 有 $d(w, q) = d(v, q)$和 $d(w, q_0) = d(v, q_0)$, 可得 $d(w, q) > d(w, q_0)$, 因此, 连接 w 和 q_0两点的测地线是 w 到子流形 N 的最短测地线.　证毕

3　生成算法研究

关于黎曼流形 Delaunay三角化和 Voronoi图的另一个重要研究领域是生成算法. 目前文献主要集中解决两类问题: ①在黎曼流形的研究区域内指定黎曼度量, 然后在参数空间中按照给定的黎曼度量生成网格, 其要解决的核心问题就是计算研究区域的测地距离; ②直接在黎曼流形上生成 Delaunay三角化或 Voronoi图, 采用的方法多为波前推进法.

在第①类算法中, 文献[9- 10]给出了由黎曼度量控制的参数空间的 Delaunay三角化算法, 该算法是 Delaunay三角化增量算法在黎曼空间的扩展. 文献[11]则在指定的黎曼度量下, 采用网格前沿法在参数空间中生成 Delaunay三角网格. 文献[12]给出在指定的黎曼度量下, 生成重心 Voronoi图和各项异性 Delaunay三角化的迭代算法, 文中采用合理简化的方向距离计算测地距离. 由于黎曼度量可以人为指定, 所以这类算法经常用于生成各向异性网格. 在参数空间生成网格避免了黎曼流形上计算的复杂性, 但是, 这类算法利用了黎曼流形与参数空间的同胚性, 不能处理多值和多亏格的复杂流形.

第②类算法中, 文献[13]采用分治的方法生成 Voronoi图, 主要解决中轴如何用数值方法解出. 此方法只能计算具有解析式的参数曲面, 不能直接用在初始数据为离散网格或离散点的情况. 文献[14]采用波前推进法生成基于黎曼度量的参数曲面网格, 根据曲面的局部性质生成网格, 算法中没有考虑曲面的全局特征, 并且最终生成的网格不是 Delaunay三角网格.

综合上面两类算法, 可以看出各种算法能够针对不同情况和领域很好的解决问题. 但都具有一定的局限性, 体现在: ①只能解决简单二维黎曼流形(如曲面与欧氏空间存在一一映射、不具有亏格、具有统一的表达式等); ②由于黎曼流形比较复杂, 全局不具有统一性质, 因此没有考虑黎曼流形的整体性, 而仅在其局部解决问题; ③大部分算法是针对二维黎曼流形进行研究, 算法从理论和实现都不能直接上升到 n维黎曼流形.

坐标卡是研究黎曼流形的基本工具, 它能够将黎曼流形的局部空间和欧氏空间之间建立光滑映射, 借助欧氏空间来研究黎曼流形的局部空间. 此外, 利用黎曼流形的转换函数和混合函数, 可以在坐标卡之间建立联系, 这种联系可以将黎曼流形的局部性质推广到全局范围. 因此, 采用坐标卡研究黎曼流形的 Delaunay三角化和 Voronoi图具有诸多优势:

1) 坐标卡定义了黎曼流形局部与欧氏空间的光滑对应关系, 使得复杂的流形问题可以借助欧氏空间来研究;

2) 黎曼流形的所有坐标卡之间具有连接覆盖关系, 假设 p和 q为流形上的点, 分别位于坐标卡 c_1和 c_2的范围内, 那么 p点总可以通过 c_1和 c_2及它们的连接卡找到 q点, 这样可以处理任意亏格的黎曼流形;

3) 坐标卡之间的光滑转换函数和混合函数可以将单个坐标卡上的性质推广到整个黎曼流形范围内, 可以解决黎曼流形全局问题;

4) 用坐标卡研究黎曼流形的 Delaunay三角化和 Voronoi图, 理论上很容易推广到任意维的黎曼流形中.

4　基于坐标卡的生成算法

本文采用黎曼流形的观点描述研究对象, 并基于坐标卡生成二维黎曼流形的网格. 该方法分为 2个步骤: ①采用黎曼流形的观点描述对象, 即

根据初始数据建立坐标卡, 坐标卡覆盖流形的整个区域; ②以坐标卡为基础, 按照指定的度量要求, 采用弹性力学模型在流形上均匀布点, 并根据分布点生成 Delaunay网格和 Voronoi图.

设研究对象为二维黎曼流形 M, 描述它的初始数据是三角网格 TN, 它具有任意亏格, 下面将建立该初始网格的坐标卡 (U, φ), 并进一步生成 Delaunay三角网格和 Voronoi图.

4.1 建立坐标卡

1) 坐标卡的几何形态. 在初始网格 TN 上取一点 o, 如图 2, 找到其周围的点并与 o 组成点集 PS, 以 o 为原点, PS的最小二乘面为 XY 平面, 建立局部坐标系 LC. 在 LC内采用距离加权法生成 PS的最小二乘曲面 $F(u, v) = a_1u^2 + a_2v^2 + a_3uv + a_4u + a_5v + a_6$, 将曲面与原始数据的拟合误差控制在 e 范围内, 则坐标卡的几何形态可由 $F(u, v)$ 描述, 局部坐标系上黎曼流形与欧氏空间的映射采用垂直映射.

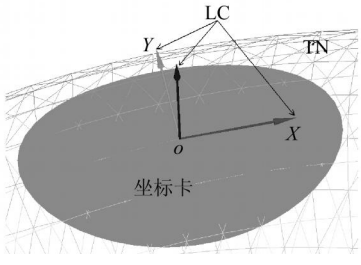


图 2 建立坐标卡示意图

2) 坐标卡的范围. 欧氏空间中, 坐标卡的范围采用椭圆 E 描述, 设 o 点处的黎曼度量所确定的黎曼椭圆为 E', 则 E 的长轴 (短轴) 方向与 E' 的短轴 (长轴) 方向一致, E 的长短轴比例与 E' 的比例相同, 这样描述范围的优势是坐标卡能够更精确的拟合原始数据. 坐标卡在黎曼流形上的范围由函数 $F(u, v)$ 决定, 其定义域为 E. 此外, 要求坐标卡在黎曼流形上的范围落在原点 o 的测地凸邻域内, 以保证坐标卡内 Delaunay 三角化和 Voronoi图的存在性.

3) 转换函数. 黎曼流形 M 的全局坐标系为 GC, 设全局坐标系 GC到局部坐标系 LC的映射为 T, 局部坐标系 LC到全局坐标系 GC的映射为 T^{-1}. 可以推出, 黎曼流形 M 上坐标卡覆盖的区域 U 到欧氏空间区域 E 的映射为 $\varphi = F^{-1} \circ T$, 欧氏空间区域 E 到黎曼流形上区域 U 的映射为 $\varphi^{-1} = T^{-1} \circ F$. 坐标卡 (U_i, φ_i) 与 (U_j, φ_j) 之间的转换函数定义为 $\Psi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_{i-1}$.

4) 坐标卡集. 后继坐标卡的局部坐标原点选在已存在坐标卡范围边界上, 并记录坐标卡之间的连接关系.

算法主要步骤如下: ①在初始网格 TN 上取一点 o, ②找到点集 PS, 并求得坐标卡的几何形态 F; ③定义坐标卡的映射函数、混合函数, 并计算它的范围; ④求得坐标卡集合, 并定义黎曼流形的混合函数.

4.2 生成网格

1) 布点. 对于布点有 2个要求: ①要满足指定的黎曼度量; ②最终点分布要均匀, 满足网格的存在条件. 为此, 本文采用弹性力学布点.

假设给定黎曼流形 M 定义域上的黎曼度量控制函数为 $g(u, v)$, 按以上要求, 布点步骤如下:

① 采用文献[15]的方法在坐标卡 (U_i, φ_i) 的局部坐标系中初始布点, 该方法中考虑了度量函数 $g(u, v)$;

② 根据转换函数 Ψ_{ik}, 将坐标卡 (U_i, φ_i) 中的点映射到它的连接卡 (U_k, φ_k) 中, 其中 $k = 1, \cdots, n$, 表示 n 个连接卡;

③ 对所有的坐标卡执行 ①和 ②步骤, 直到所有卡中初始布点结束;

④采用文献[15]的弹性力学模型, 以坐标卡为单位迭代计算黎曼流形上每个点的位置, 直到所有点均匀分布.

布点时采用测地距离计算, 测地距离可以采用数值的方法计算[16], 也可以采用简化的方法[9], 数值方法计算结果更准确些, 速度也会慢些.

2) 生成网格. 在布点基础上, 生成黎曼流形的 Delaunay三角网格和 Voronoi图, 步骤如下:

① 在坐标卡 (U_i, φ_i) 的局部坐标系中, 采用 Delaunay空洞算法生成三角网格;

② 根据转换函数 Ψ_{ik}, 将坐标卡 (U_i, φ_i) 中的三角形映射到它的连接卡 (U_k, φ_k) 中, 其中 $k = 1, \cdots, n$, 表示 n 个连接卡;

③ 对所有坐标卡执行步骤 ①和 ②, 直到生成黎曼流形的 Delaunay三角网格;

④在每个坐标卡 (U_i, φ_i) 的局部坐标系中计算三角形的外心, 并根据映射 φ_i^{-1} 近似得到黎曼流形上的维诺顶点, 采用数值方法[13]得到黎曼流形上 Voronoi图.

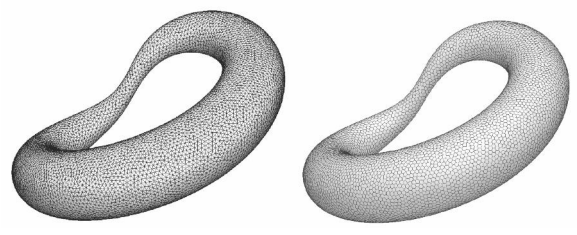
4.3 实 例

下面给出模型采用本文算法得到的实例. 图 3是 Hose模型的坐标卡, 该模型初始网格点数为 2 080, 三角形个数是 4 160, 创建坐标卡的个数为 963. 图 4为 Hose模型基于坐标卡生成的 Delaunay三角网格和 Voronoi图.



a 全部坐标卡　　b 部分坐标卡

图 3 模型的坐标卡



a Delaunay三角网络　　b Voronoi图

图 4 模型的 Delaunay三角化和 Voronoi图

5 结束语

通过对黎曼流形 Delaunay三角化及 Voronoi图相关文献的分析和研究,总结了其主要的研究领域和研究现状,提出了采用黎曼流形的观点描述问题及使用坐标卡研究黎曼流形上 Delaunay三角化及 Voronoi图的研究思路. 本文提出的算法方便生成各向异性 Voronoi图,并且与文献[17-18]的算法相比,坐标卡的数量减少了很多,提高了算法效率. 在未来工作中,将进一步基于坐标卡研究黎曼流形的三角化质量和限定问题,包括三角化质量的衡量标准,限定条件与网格的一致性以及限定条件的逼近等.

参考文献 (References)

[1] Dirichlet G L. Über die reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen[J]. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 1850, 40(3): 209-227

[2] Voronoi G F. Nouvelles applications des parameters continues à la th orie des formes quadratiques[J]. J Reine Angew Math, 1908, 134: 198-287

[3] Leibon G, Letscher D. Delaunay triangulations and Voronoi diagrams for Riemannian manifolds[C]//Proceedings of the Annual Symposium on Computational Geometry. New York: Association for Computing Machinery, 2000: 341-349

[4] Leibon G. Random Delaunay triangulations, the Thurston-Andreev theorem, and metric uniformization[D]. California: Department of Mathematics, University of California San Diego, 1999

[5] Dyer R, Zhang H, Moller T. Voronoi-Delaunay duality and Delaunay meshes[C]//ACM Symposium on Solid and Physical Modeling. New York: Association for Computing Machinery, 2007: 415-420

[6] Onishi K, Takayama N. Construction of Voronoi diagram on the upper half-plane[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 1996, E79-A(4): 533-539

[7] Labelle F, Shewchuk J R. Anisotropic Voronoi diagrams and guaranteed-quality anisotropic mesh generation[C]//Proceedings of the Annual Symposium on Computational Geometry. New York: ACM, 2003: 191-200

[8] 陈维恒, 李兴校. 黎曼几何引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002
Cheng Weiheng, Li Xingxiao. An introduction to Riemannian Geometry[M]. Beijing: Peking University Press, 2002 (in Chinese)

[9] Borouchaki H, George P L, Hecht F, et al. Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part I. Algorithms[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1997, 25(1): 61-83

[10] Jurczyk T, Glut B. Metric 3D surface mesh generation using Delaunay criteria[C]//Lecture Notes in Computer Science. Heidelberg, Germany: Springer Verlag, 2006: 302-309

[11] Borouchaki H, Laug P, George P L. Parametric surface meshing using a combined advancing-front generalized Delaunay approach[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 49(1): 233-259

[12] Du Q, Wang D S. Anisotropic centroidal voronoi tessellations and their applications[J]. SIAM Journal of Scientific Computing, 2005, 26(3): 737-761

[13] Kunze R, Wolter F E, Thomas R. Geodesic Voronoi diagrams on parametric surfaces[C]//Proceedings of Computer Graphics International Conference, CGI. Los Alamitos, CA: IEEE, 1997: 230-237

[14] 关振群, 单菊林, 顾元宪. 基于黎曼度量的复杂参数曲面有限元网格生成方法[J]. 计算机学报, 2006, 29(10): 1828-1833
Guan Zhenqun, Shan Julin, Gu Yuanxian. Surface mesh generation based on Riemannian metric[J]. Chinese Journal of Computers, 2006, 29(10): 1828-1833 (in Chinese)

[15] Shimada K, Yamada A, Itoh T. Anisotropic triangulation of parametric surfaces via close packing of ellipsoids[J]. Int'l J Computational Geometry and Applications, 2000, 10(4): 417-440

[16] Wu Mingha, Mo Guolang, Yu Yiye. Numerical solution of geodesic through two given points on a simple surface[J]. Journal of Zhejiang University: Science, 2006, 7(S2): 187-192

[17] Grimm C M, Hughes J F. Modeling surfaces of arbitrary topology using manifolds[C]//Proceedings of the ACM SIGGRAPH Conference on Computer Graphics. New York: ACM, 1995: 359-368

[18] Grimm C M, Zorin D. Surface modeling and parameterization with manifolds[C]//Siggraph 2006 Course Notes. New York: ACM, 2006: 1-81

(责任编辑: 文丽芳　张白白)