基于均衡搭配性质的沃尔什函数生成方法

国 佳 杨东凯 李署坚 邵定蓉

(北京航空航天大学 电子信息工程学院, 北京 100191)

摘 要: 推导出了沃尔什函数序列的1个新性质——均衡搭配性质,并指出沃尔什函数序列的均衡搭配性质与其正交性是等价的.利用均衡搭配性质并结合有限域上的线性空间的概念,可以得到1种生成正交函数序列的方法,该方法只需计算有限域上两个矩阵的乘积.此外用该方法生成的正交函数序列均满足1个重要性质——乘法定理,并对其乘法构成Abel群.在特定的条件下,该方法可以生成不同编号的沃尔什函数序列.最后,利用提出的生成方法,设计了1种新型的沃尔什函数发生器.

关 键 词: 沃尔什变换; 函数; 多路复用; 均衡搭配性质

中图分类号: TN 911

文献标识码: A 文章编号: 1001-5965(2009)07-0848-04

Generation method of walsh function based on balanced matching property

Guo Jia Yang Dongkai Li Shujian Shao Dingrong

(School of Electronics and Information Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Balanced matching property is a new property of Walsh function sequence and is equal to its orthogonality. Using balanced matching property and the concept of linear space in Galois field, a generation method of orthogonal function sequence was produced, and this method only need compute two matrixes products in Galois field. In addition, the orthogonal function sequences generated by this method satisfy an important property—multiplication theorem, and constitute the Abel group to its multiplication. Under the specific condition, this method also generates Walsh function sequence of the different serial number. Finally, a new Walsh function generator was designed by using the generation method produced.

Key words: Walsh transforms; functions; multiplexing; balanced matching property

1923年, J. L. Walsh提出了沃尔什函数完整的数学理论[1], 但是由于缺乏实际的应用, 几乎被搁置了四十多年, 直到1970年前后, 基于数字技术和计算机科学的发展, 才又得到普遍的关注.现在, 沃尔什函数在各方面有着广泛的应用, 其中包括: 通信, 雷达, 图像编码, 语音处理等, 特别是在CDMA移动通信中, 沃尔什函数作为一种正交码占有极其重要的地位.在理论研究中, 沃尔什函数有多种不同的定义方式, 常见的有: 利用差分方程导出的定义, 用拉德梅克函数乘积表示的定义, 用二进制数表示的定义, 递归生成的定义等[1].1969年, Swick用镜像复制的方法生成了W编号的沃尔什函数[2].在此基础上, 我国学者张其善和李植华用平移复制的方法生成了P编号和H编号的沃尔什函数, 提出了新的X编号的沃尔什函数, 并给出了沃尔什函数在平移复制下的统一表达式[3-4].文献[5]中, 利用有限Abel群的特征标理论, 给出了沃尔什函数的一种全新的定义方法.利用沃尔什函数不同的生成方法, 可以设计出各种类型的沃尔什函数发生器.因此, 对沃尔什函数生成方法的研究不仅具有理论上的意义, 也具有实际的应用价值.

本文首先推导出了沃尔什函数序列的一个新性质——均衡搭配性质, 并指出沃尔什函数序列

收稿日期: 2008-05-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60602046)

作者简介: 国 佳(1984-), 男, 北京人, 博士生, guojiabuaa@sina.com.

均衡搭配性质与其正交性是等价的. 其次, 本文利用均衡搭配性质并结合有限域上的线性空间的概念, 提出了一种新的生成正交函数序列的方法, 用该方法生成的正交函数序列均满足一个重要性质 ——乘法定理, 并对其乘法构成 Abel群. 在特定的条件下, 该方法还可以生成不同编号的沃尔什函数序列. 最后, 利用本文提出的生成方法, 设计出了一种新的沃尔什函数发生器.

1　沃尔什函数及其均衡搭配性质

区间 $[0, 1)$上的沃尔什函数系 $\{\mathrm{Wal}(m, t), m = 0, 1, 2, \cdots, t\in [0, 1)\}$是 $L^2[0, 1)$空间中的完备正交函数系, 其中 $L^2[0, 1)$空间是由定义在区间 $[0, 1)$上的所有平方可积函数构成的线性空间. 编号为 m ($m < 2^k$, m 为非负整数)的沃尔什函数将区间 $[0, 1)$等分为 2^k 个子区间, 并在每个子区间中只取 ±1两个值. 将沃尔什函数在每个子区间中的函数值取出, 构成一个长度为 2^k 的序列, 称为沃尔什函数序列. 沃尔什函数与其相应的沃尔什函数序列是等价的.

定义记号 $N_{ij}(a, b)$表示任意两个函数序列 i, j中相同位置是 a与 b组合出现的次数. 则对于任意的两个沃尔什函数序列 i, j, 设 $i\neq j$ 且 i, j都不是全 1的沃尔什函数序列, 则以下式子成立:

$$N_{ij}(1, 1) = N_{ij}(1, -1) = N_{ij}(-1, 1) = N_{ij}(-1, -1) \quad (1)$$

证明　因为第 i, j两个沃尔什函数序列是正交的, 所以有如下式子:

$$N_{ij}(1, 1) + N_{ij}(-1, -1) = N_{ij}(1, -1) + N_{ij}(-1, 1)$$

又因为第 i, j两个沃尔什函数序列与全 1的沃尔什函数序列正交, 所以有如下两个式子:

$$N_{ij}(1, 1) + N_{ij}(1, -1) = N_{ij}(-1, 1) + N_{ij}(-1, -1)$$
$$N_{ij}(1, 1) + N_{ij}(-1, 1) = N_{ij}(1, -1) + N_{ij}(-1, -1)$$

联立以上 3个式子, 即得结论.　　证毕

式 (1)即称为沃尔什函数序列的均衡搭配性质. 沃尔什函数序列的均衡搭配性质与其正交性是等价的, 引入均衡搭配性质后就可以在 GF(2)上讨论沃尔什函数序列的正交性及其生成方法, 保证所得的向量组只由 ±1组成.

2　正交函数序列的生成方法

2 1　正交函数序列的生成方法

形如 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)^{\mathrm{T}}$ 的向量组成 GF(2)上的 k 维线性空间 $\boldsymbol{Z}_k$, 其中 k 是大于 1的正整数, $\alpha_n\in$ GF(2), $n = 1, \cdots, k$, 显然, $\boldsymbol{Z}_k$ 中有 2^k 个向量. 将 $\boldsymbol{Z}_k$ 中的向量 $\boldsymbol{b}_n$, $n = 0, \cdots, 2^k - 1$按任意顺序排列, 即设 $\boldsymbol{Z}_k = \{\boldsymbol{b}_0, \cdots, \boldsymbol{b}_{2^k-1}\}$, 再将 $\boldsymbol{Z}_k$ 分成两个元素个数相等的向量组, 包含全 0向量的向量组记为 $\boldsymbol{F}_0$, 另一个向量组记为 $\boldsymbol{F}_1$, $\{\boldsymbol{F}_0, \boldsymbol{F}_1\}$形成 $\boldsymbol{Z}_k$ 的某个划分. 两个向量组中都包含 2^{k-1}个向量. 因此, 向量组 $\boldsymbol{F}_0$的秩大于等于 $k-1$. 将向量组 $\boldsymbol{F}_0$的秩为 $k-1$的那些划分取出, 按如下规则构造一个长度为 2^k 的序列 $(g_0, \cdots, g_{2^k-1})$, 其中 $g_n = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{b}_n\in \boldsymbol{F}_0 \\ 1, & \boldsymbol{b}_n\in \boldsymbol{F}_1 \end{cases}$, $n = 0, \cdots, 2^k - 1$ 则有如下结论: 对于任意两个不同的序列 i, j, 有

$$N_{ij}(0, 0) = N_{ij}(0, 1) = N_{ij}(1, 0) = N_{ij}(1, 1) \quad (2)$$

证明　因为向量组 $\boldsymbol{F}_0$的秩是 $k-1$, 又因为 $\boldsymbol{F}_0$包含 2^{k-1}个不同的向量, 因此, $\boldsymbol{F}_0$ 是 $\boldsymbol{Z}_k$的 $k-1$维的子空间, 则可以将 $\boldsymbol{F}_0$ 看作未知向量 $\boldsymbol{b}$的线性方程 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 0$的基础解系, 其中 $\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{Z}_k$, $\boldsymbol{u}\neq (0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$, 不同的序列 i, j, 对应于不同的 $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{u}_j$, 则可以将 $\boldsymbol{F}_0$ 重新定义为 $\boldsymbol{F}_0 \overset{\mathrm{d}}{=} \boldsymbol{F}_0^{<\boldsymbol{u}>} = \{\boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 0\}$. 且有

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{Z} - \boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{Z} - \boldsymbol{F}_0^{<\boldsymbol{u}>} = \boldsymbol{Z} - \{\boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 0\} = \{\boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 1\} \overset{\mathrm{d}}{=} \boldsymbol{F}_1^{<\boldsymbol{u}>}$$

由 $\boldsymbol{F}_0^{<\boldsymbol{u}>}$ 与 $\boldsymbol{F}_1^{<\boldsymbol{u}>}$ 的定义可知, $N_{ij}(a, b)$与集合 $F_a^{<\boldsymbol{u}_i>} \cap F_b^{<\boldsymbol{u}_j>}$ 中元素的个数相等. 因此, 要证明对于不同的序列 i, j, 式 (2)成立, 只需证明 $\forall a_0, a_1\in$ GF(2), $F_{a_0}^{<\boldsymbol{u}_i>} \cap F_{a_1}^{<\boldsymbol{u}_j>}$集合中元素的个数与 a_0, a_1 无关即可. 考虑到 $F_{a_0}^{<\boldsymbol{u}_i>} \cap F_{a_1}^{<\boldsymbol{u}_j>} = \{\boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = a_0, \boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = a_1\} = \left\{ \boldsymbol{b} \,\middle|\, \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \right\}$, 又 $\boldsymbol{u}_i\neq \boldsymbol{u}_j$, 且 $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{u}_j$ 都不是全 0向量, 所以上式左端中的线性方程组的系数矩阵是行满秩的, 这个方程组一定有解, 它的解的个数与相应的齐次线性方程组的解的个数一样多, 因此解的个数与 a_0, a_1 无关. 因此, 可以得出结论: 对于任意两个不同的序列 i, j 式 (2)成立.　　证毕

如果将生成序列中的 0换成 1, 1换成 -1, 则所得的新序列满足均衡搭配性质. 最后, 令 $\boldsymbol{Z}_k$ 中全 0的向量 $\boldsymbol{u}$对应全 1的序列.

由此, 正交函数序列可以通过下列步骤生成:

1) 定义两个矩阵 $\boldsymbol{U}_{2^k\times k}$和 $\boldsymbol{B}_{k\times 2^k}$, 设 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{u}_0, \cdots, \boldsymbol{u}_{2^k-1}]$, $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b}_0, \cdots, \boldsymbol{b}_{2^k-1}]$, 其中 $\boldsymbol{u}_0, \cdots, \boldsymbol{u}_{2^k-1}$ 与 $\boldsymbol{b}_0, \cdots, \boldsymbol{b}_{2^k-1}$均是 $0, \cdots, 2^k - 1$的二进制数表示形成的 k维列向量, 但其排列顺序是任意的.

2) 在 GF(2)上计算 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{UB}$, 再将 $\boldsymbol{G}$ 中的元素 0换成 1, 元素 1换成 -1得到矩阵 $\boldsymbol{H}$.

只需注意到矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中全体列向量相当于 $\boldsymbol{Z}_k$ 中的向量按任意顺序的某种排列, 则利用结论, 可得矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的全体行向量是仅由 ±1组成的、包含全 1序列的正交函数序列.

2.2 生成序列乘法定理的证明

在 2.1中生成的正交函数序列还满足一个重要性质——乘法定理, 即任意两个正交函数序列的乘积仍是某个用此方法生成的正交函数序列.

证明 在正交函数序列的生成过程中需要计算 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{UB}$, 其中矩阵 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的秩均为 k, 所以矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的秩小于等于 k. 又因为 $\boldsymbol{G}$ 中包含 2^k 个不同的行, 所以矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的秩大于等于 k. 因此, 与正交函数序列对应的矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的秩等于 k, $\boldsymbol{G}$ 中的各行组成 GF(2)上 2^k 维线性空间中的 k 维子空间, 因此, $\boldsymbol{G}$ 中任意两行的和仍是 $\boldsymbol{G}$ 中的某个行.

由下述实数域与 GF(2)中元素的变换规则 $1\leftrightarrow 0_2$, $-1\leftrightarrow 1_2$ 可以发现, 在该规则下, 实数域中的乘与二元域中的加是对应的, 例如: $1\times 1=1\Leftrightarrow 0_2+0_2=0_2$. 因此可以得出结论: 任意两个正交函数序列的乘积仍是某个用此方法生成的正交函数序列. 证毕

进一步, 2.1中生成的正交函数序列对其乘法可构成 Abel群. 由乘法定理知, 正交函数序列的乘法满足封闭性; 由实数域中乘法的交换律和结合律知, 正交函数序列的乘法满足相应的交换律和结合律; 正交函数序列的单位元就是全 1的序列; 任何正交函数序列的逆元就是其本身.

3 沃尔什函数序列的生成方法

在 2.1中的生成方法中, 若 $\boldsymbol{B}$ 中列向量是按二进制自然码的顺序排列, 则生成的 $\boldsymbol{H}$ 矩阵的行向量对应长度为 2^k 的沃尔什函数序列.

证明 用二进制数表示的序号为 m 的 P 编号沃尔什函数的定义式为

$$\mathrm{Wal}(m,t)=(-1)^{\sum_{s=0}^{k-1}m_s t_s} \tag{3}$$

其中, $m=\sum_{s=0}^{k-1}m_s 2^s=(m_{k-1}\cdots m_0)_2$, $t=\sum_{s=0}^{\infty}t_s 2^{-1-s}=(0.t_0\ t_1\cdots)_2$. 若将此处 m 与 t 的二进制表示与 2.1中的生成方法中的 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 对应. 再将 GF(2)上 0, 1等同为实数域上的 0, 1, 则由 GF(2)上乘法与加法的定义可知, 在 GF(2)上做乘法, 与在实数域上做乘法相同, 在 GF(2)上做加法, 等效为先在实数域上做加法, 再模二取余, 并注意到 $(-1)^p=(-1)^{p \bmod 2}$. 由于在上述生成方法中, $\boldsymbol{B}$ 中列向量的排列是按二进制自然码的顺序, 因此, 计算 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 乘积的过程与式(3)中计算幂的指数部分的过程对应. 若 $\boldsymbol{U}$ 中行向量的排列是按反写码的顺序, 则生成的就是 P 编号的沃尔什函数序列. 证毕

进一步, 由用二进制数表示的其他编号沃尔什函数的定义式可知, 通过改变矩阵 $\boldsymbol{U}$ 中行向量的排列顺序, 可以生成不同编号的沃尔什函数序列. 若 $\boldsymbol{U}$中行向量的排列是按二进制自然码的顺序, 则生成的是 H 编号的沃尔什函数序列; 若 $\boldsymbol{U}$ 中行向量的排列是按格雷码的顺序, 则生成的是 X 编号的沃尔什函数序列; 若 $\boldsymbol{U}$中行向量的排列是按反写码的格雷码的顺序, 则生成的是 W 编号的沃尔什函数序列.

4 沃尔什函数发生器

在本文提出的沃尔什函数序列的生成方法中, 关键的一步是要计算 GF(2)上两个矩阵的乘积, 而计算矩阵的乘积又可以分解为计算两个元素的加法与乘法. 由 GF(2)上运算的定义可知, GF(2)上元素的加法可由异或门实现, GF(2)上元素的乘法可由与门实现. 计算完 GF(2)上两个矩阵的乘积之后, 再进行电平映射就可以生成沃尔什函数. 一个实现长度为 16的沃尔什函数发生器结构如图 1所示.

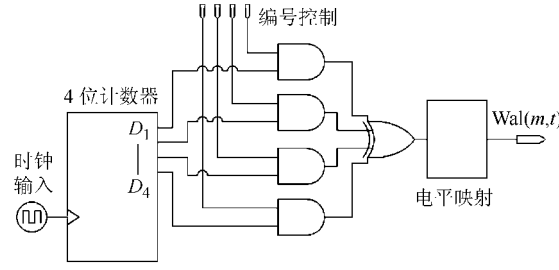

图 1 实现长度为 16的沃尔什函数发生器结构

在图 1的结构中, 计数器产生按自然码顺序排列的二进制数, 与门完成 GF(2)上的乘法, 异或门完成 GF(2)上的加法. 进一步, 如果使用 k 位计数器, 则可以产生长度为 2^k 的沃尔什函数; 改变时钟输入的频率可以改变沃尔什函数的周期; 通过对编号控制赋予不同的值, 可以产生不同编号的沃尔什函数.

与其他沃尔什函数发生器相比, 本文设计的沃尔什函数发生器相对比较简单, 只需单一的时钟输入, 而且可以方便的改变所生成沃尔什函数的长度、周期和编号.

5 结束语

本文导出了沃尔什函数序列的均衡搭配性质, 并提出了一种生成满足乘法定理的正交函数序列的方法. 利用此方法可以生成 4种不同编号的沃尔什函数序列, 以此为基础还可以设计出一种新型沃尔什函数发生器结构. 此方法还可以生成一系列新的正交函数系, 可应用于通信中的多路复用等技术中.

参考文献 (References)

[1] 张其善, 张凤元, 杨东凯. 信息传输与正交函数 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2008: 25－44
Zhang Qishan, Zhang Fengyuan, Yang Dongkai. Information transfer and orthogonal function [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008: 25－44 (in Chinese)

[2] Swick D A. Walsh function generation [J]. IEEE Trans on Information Theory, 1969, IT-15(1): 167

[3] 李植华, 张其善. 沃尔什函数的统一定义 [J]. 清华大学学报, 1984, 24(1): 105－113
Li Zhihua, Zhang Qishan. The unified definition of Walsh functions [J]. Journal of Tsinghua University, 1984, 24(1): 105－113(in Chinese)

[4] 金明录, 饶雪芳, 张其善. 复制理论与二进码 [J]. 北京航空航天大学学报, 1994, 20(3): 243－247
Jin Minglu, Rao Xuefang, Zhang Qishan. Copy theory and binary codes [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1994, 20(3): 243－247(in Chinese)

[5] 张其善, 张凤元, 吴今培. 沃尔什函数的一种新定及其复制本质 [J]. 通信学报, 2004, 25(2): 144－148
Zhang Qishan, Zhang Fengyuan, Wu Jinpei. A new definition of Walsh functions and copy nature [J]. Journal of China Institute of Communications, 2004, 25(2): 144－148 (in Chinese)

(责任编辑: 娄　嘉)

(上接第 823页)

对该优化设计进行准静态惯性载荷下的结构分析, 结果表明, 整星结构的应力水平低于给定的许用应力值 260MPa, 满足设计要求. 故该优化设计可作为结构改进的依据.

4 优化结果分析

根据整星只考虑收拢、展开结构工况和同时考虑 2种结构工况的优化结果, 可见: ①对地板、中心承力筒对地段和中间段这 3个部位的结构参数对整星结构的刚性影响较大, 是主要承力构件; 其他结构参数在 3次寻优中都达到了下限, 表明这些参数可在设计允许的范围内减小. ②整星展开工况下结构的模态频率由太阳电池板及其安装部件的刚度决定, 主结构对展开工况的基频贡献不大. ③两结构工况优化取得了预期的效果, 优化中同时考虑了整星展开与收拢两种结构工况下的约束条件, 结构质量下降了 35.9 kg, 比整星收拢和展开单结构工况优化时结构质量下降的量 (分别是 43.2 kg和 37.4 kg) 小. ④整星中参与优化部分的结构质量初始为 246.6 kg, 结构优化后减重达 14.6%, 效果明显. ⑤整星结构在给定过载条件下的静力学分析表明, 应力水平满足要求.

5 结　论

本文采用基于二级多点逼近结构优化算法的航天器结构优化系统 ESSOSII, 对某复杂卫星结构进行了两结构工况优化. 优化后卫星结构质量减轻达 30.6 kg, 优化结果分别满足发射 (收拢) 和在轨 (展开) 2种结构工况下的基频要求, 以及准静态惯性载荷下的应力约束. 这一优化结果为该型号卫星的进一步研制提供了设计依据, 同时也表明了 ESSOSII 的有效性.

参考文献 (References)

[1] 袁家军. 卫星结构设计与分析 [M]. 北京: 中国宇航出版社, 2004
Yuan Jiajun. Satellite structures design and analysis[M]. Beijing: China Space Press, 2004 (in Chinese)

[2] 谭春霖, 曲广吉, 黄海, 等. 航天器结构参数优化软件 SPOS及其工程应用 [C] //导弹飞行力学与航天器动力学学术会议. 安徽: [s.n.], 1998
Tan Chunlin, Qu Guangji, Huang Hai, et al. Spacecraft parameter optimization system SPOS and its engineering application [C] // Proceedings of Missile Flight Dynamics and Spacecraft Dynamics. Anhui: [s.n.], 1998 (in Chinese)

[3] Huang H, Xia R W. Two-level multipoint constraint approximation concept for structural optimization[J]. Structural Optimization, 1995, 9(1): 38－45

[4] 陈珅艳. 航天器结构优化系统 ESSOSII的开发与应用研究 [D]. 北京: 北京航空航天大学宇航学院, 2005
Chen Shenyan. Research on the development and application of spacecraft structural optimization system ESSOSII [D]. Beijing: School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2005 (in Chinese)

[5] 袁家军, 陈珅艳, 黄海. 基于 PATRAN/NASTRAN的结构优化系统的工程应用 [J]. 北京航空航天大学学报, 2006, 32(2): 125－129
Yuan Jiajun, Chen Shenyan, Huang Hai. Engineering application of structural optimization based on PATRAN/NASTRAN [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006, 32(2): 125－129 (in Chinese)

(责任编辑: 张　嵘)