Stewart台体并联机器人位置正解

庄育锋 黄昔光

(北京邮电大学 自动化学院, 北京 100876) (北方工业大学 机电工程学院, 北京 100041)

廖启征

(北京邮电大学 自动化学院, 北京 100876)

摘 要: 为获得 Stewart台体并联机器人位置正解的解析解,使用分次字典序 Groebner基和 Sylvester结式相结合的代数方法对该问题进行研究. 利用计算代数中的分次字典序 Groebner基算法,计算该机器人位置正解封闭数学模型的分次字典序 Groebner基;从得出的51个基中选取 20个基,构造 20阶 Sylvester结式,分析符号形式方程组的变量次数,可以直接得出该机器人位置正解一元高次方程的次数为 40且最多有 40组解的结论,其结果与前人的完全一致,但结式的尺寸却小得多. 为了对结果进行验证,使用同伦连续法对同一个数字算例进行计算,两种方法得到结果一致. 为并联机构位置正解的研究提供了一种新的有效算法.

关 键 词: 并联机构; 位置正解; Sylvester结式

中图分类号: TH 112

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2009)01-0048-04

Direct kinematics of Stewart mechanism robot

Zhuang Yufeng

(School of Automation, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

Huang Xiguang

(School of Mechanical and Electrical Engineering, North China University of Technology, Beijing 100041, China)

Liao Qizheng

(School of Automation, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

Abstract: The Groebner-Sylevester hybrid approach was presented to obtain the closed-form solutions of the direct kinematics of the Stewart mechanism robot. The reduced Groebner basis under degree lexicographic ordering for the closed-form equations was presented based on computer algebra method. And 20 Groebner basis were picked out from the 51 Groebner basis. Then a 20 ×20 dimensional Sylvester's matrix was constructed, which is relatively small in size. And a 40th degree univariate equation was presented from the determinate of the matrix by analyzing the numbers of the variables in the equations. To verify the proposed algorithm, a same numerical example was calculated based on the continuation method as well as the the proposed algorithm. It shows that the proposed algorithm calculates simply and rapidly to lead to the univariate equation. The results both by using the continuation method and based on the proposed algorithm are same. Then a novel and practical algorithm to solve the direct kinematics of the parallel mechanism robot was presented.

Key words: parallel mechanisms; direct kinematics; Sylvester resultant

收稿日期: 2008-01-25

基金项目: 国家 973资助项目(2004CB318000);国家自然科学基金资助项目(50475161);国家 863计划资助项目(2007AA04Z211)

作者简介: 庄育锋(1972 -),男,上海人,讲师, zhuangyf@bupt.edu.cn.

与传统的工业机器人相比,并联机器人具有高刚度、高精度和承载能力强等优点,其应用涉及到虚拟轴机床、微动机器人、空间位姿测量机等现代尖端技术的许多领域. 并联机器人位置正解就是根据并联机器人机构驱动杆长来推算动平台的位置和姿态,其本质是求解多元非线性方程组. 该问题的深入研究,对于机器人控制、工作空间分析、奇异位置分析、校对零位置等问题都具有实际意义. 由于并联机器人结构复杂,动平台运动位姿强耦合、非线性,使得其位置正解极为困难,随着机构型式的一般化,求解的难度陡增. Stewart台体并联机器人机构是最具有代表性的并联机器人机构,其它并联机器人机构只是其演化形式[1]. 为此,国内外学者进行了大量研究[2-8]. 文献[2-3]运用同伦连续法数字化证明了该并联机构的位置正解有 40组解;文献[4]用一维搜索的方法求解该机构位置正解全部解,但计算量非常大;文献[5]应用四元齐次化法以及系数同伦连续法求出全部 40组位置正解;文献[6]通过构造两个 45×45的 Sylvester结式,提取最大公因式,从而得到该机构位置正解的一元 40次方程;文献[7]给出了一种位置正解代数法,从符号形式上看,构造的 28阶单变量系数行列式的最高次数为 41次,而展后获得的一元高次方程为 40次,故其运算结果不能完全是解析解;文献[8]通过求解 19个封闭方程的字典序 Groebner基,利用 68个基构造 68阶 Sylvester结式,获得一元 40次方程,但其计算效率不高,计算时间较长. 显然,寻求计算简洁、求解效率高的解析解算法具有理论和实际意义.

本文使用分次字典序 Groebner基和 Sylvester结式相结合的代数方法研究了 Stewart台体并联机构位置正解. 与文献[8]相比,本文将 Sylvester结式由原来的 68阶降低到 20阶,计算更加简洁,求解效率更高;通过分析构造的符号形式方程组变量次数,可以直接得出该机构位置正解一元高次方程的次数为 40次且最多有 40组解的结论;运算过程采用符号和有理数相结合,可以实现对计算精度的有效控制. 为了对结果进行验证,使用同伦连续法对同一个数字算例进行计算,两种方法得到结果一致.

1　数学模型

图 1为一般 6-6型台体并联机构,动静台体由 6条支链用球铰及滑动副相连. 在动静台体中,分别建立与之固定的动坐标系 $O_2x_2y_2z_2$、定坐标系 $O_1x_1y_1z_1$,B_i和 A_i (i =1, …, 6)分别表示动静台体的 6个球铰的球心,B_i在动坐标系和 A_i在静坐标系的坐标分别为 Q_{ib} (b_{xi}, b_{yi}, b_{zi})和 Q_{ia} (a_{xi}, a_{yi}, a_{zi}),A_iB_i的长度为 L_i,只需求出 $O_2x_2y_2z_2$到 $O_1x_1y_1z_1$的旋转变换矩阵 R和平移矢量 P(x, y, z),就可以确定动台体的空间位姿.

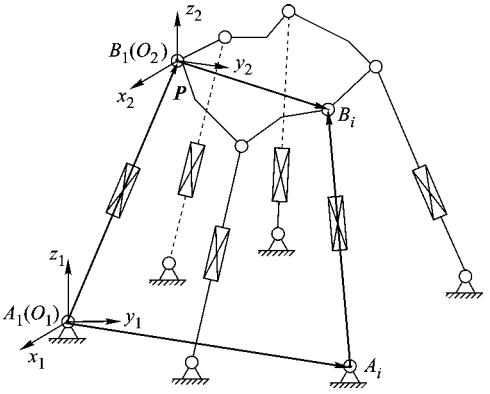

图 1　Stewart台体并联机器人机构

由杆长约束条件有

$$L_i^2 = [\mathrm{RQ}_{ib} + \mathrm{P} - \mathrm{Q}_{ia}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{PQ}_{ib} + \mathrm{P} - \mathrm{Q}_{ia}] \quad i = 2,3,4,5,6 \tag{1}$$

$$L_i^2 = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{P} \quad i = 1 \tag{2}$$

将式 (2)代入式 (1),展开得

$$\mathrm{Q}_{ib}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}_{ib} + L_1^2 - L_i^2 + \mathrm{Q}_{ia}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}_{ia} + 2\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{RQ}_{ib} - 2\mathrm{Q}_{ia}^{\mathrm{T}}\mathrm{P} - 2\mathrm{Q}_{ib}^{\mathrm{T}}\mathrm{RQ}_{ia} = 0 \quad i = 2,3,4,5,6 \tag{3}$$

根据绕任意轴 K (k_x, k_y, k_z)的坐标系旋转 θ公式[9],旋转矩阵可以表示为

$$\mathrm{R}_{\mathrm{K}}(\theta) = \begin{bmatrix} r_1 & r_4 & r_7 \\ r_2 & r_5 & r_8 \\ r_3 & r_6 & r_9 \end{bmatrix} \tag{4}$$

式中

$$\begin{aligned} r_1 &= k_x^2(1-\cos\theta) + \cos\theta \\ r_2 &= k_xk_y(1-\cos\theta) + k_y\sin\theta \\ r_3 &= k_xk_z(1-\cos\theta) - k_y\sin\theta \\ r_4 &= k_xk_y(1-\cos\theta) - k_z\sin\theta \\ r_5 &= k_y^2(1-\cos\theta) + \cos\theta \\ r_6 &= k_yk_z(1-\cos\theta) + k_x\sin\theta \\ r_7 &= k_xk_z(1-\cos\theta) + k_y\sin\theta \\ r_8 &= k_yk_z(1-\cos\theta) - k_x\sin\theta \\ r_9 &= k_z^2(1-\cos\theta) + \cos\theta \end{aligned}$$

令 $c_1 = k_x\tan(\theta/2)$, $c_2 = k_y\tan(\theta/2)$, $c_3 = k_z\tan(\theta/2)$,并将半角公式

$$\cos\theta = (1-\tan^2(\theta/2))/(1+\tan^2(\theta/2))$$

$$\sin\theta = 2\tan(\theta/2)/(1+\tan^2(\theta/2))$$

代入式 (4)可得

$$R_K(\theta) = \Delta^{-1}\begin{bmatrix} 1+c_1^2-c_2^2-c_3^2 & 2(c_1c_2-c_3) & 2(c_1c_3+c_2) \\ 2(c_1c_2+c_3) & 1-c_1^2+c_2^2-c_3^2 & 2(c_2c_3-c_1) \\ 2(c_1c_3-c_2) & 2(c_2c_3+c_1) & 1-c_1^2-c_2^2+c_3^2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中 $\Delta = 1 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$,式(5)即为 Cayley[7]公式.

将式(5)代入式(3)得

$$f_i(c_1, c_2, c_3, x, y, z) = 0 \qquad i = 2, 3, 4, 5, 6 \tag{6}$$

式(2)和式(6)为 Stewart台体并联机器人位置正解的的数学模型,待求变量为 c_1, c_2, c_3, x, y 和 z,共 6个.

2 消元过程

根据代数学知识, Stewart台体并联机器人机构位置正解数学模型的总次数为 $2\times3^5 = 486$,若直接应用常规的代数消元法,如 Dixon结式法、Sylvester结式法以及吴方法,都难以求解. 本文采用分两步消元方法进行求解:先求数学模型的分次字典序 Groebner基,分析所生成基的变量以及由变量不同次幂组成的项,通过隐藏合适的变量使基的个数与项的个数相等,构造 Sylvester结式;为减少计算机符号运算时间,运用线性代数中行列式的相关性质,对构造 Sylvester结式进行分析,缩小结式的阶数,进而得到一元 40次方程式.

2.1 求解分次字典序 Groebner基

分次字典序 Groebner基的基本思想是:在原多项式系统所构成的多项式环内,通过对变量多项式的适当排序,求多项式的 S多项式并通过约简,最后生成一个与原系统完全等价的标准基. 直接运用计算机代数系统 Mathematica软件中提供的 GroebnerBasis命令,按照排列 $x > y > z > c_1 > c_2 > c_3$,计算式(1)和式(6)的分次字典序 Groebner基,得到一个含有 51个多项式方程的分次字典序 Groebner基,由变量不同次幂组成的项共有 91项,由于篇幅关系,在此不予写出.

将 c_3作为压缩变量,则得到的分次字典序 Groebner基可以看作关于 51个假想变元的线性方程组,其假想变元为: $1, c_1, c_1^2, c_1^3, c_2, c_1c_2, c_1^2c_2, c_2^2, c_1c_2^2, c_2^3, x, c_1x, c_1^2x, c_2x, c_1c_2x, c_2^2x, x^2, y, c_1y, c_1^2y, c_2y, c_1c_3y, c_1^2y, xy, c_1xy, c_2xy, y^2, c_1y^2, c_2y^2, xy^2, y^3, z, c_1z, c_1^2z, c_2z, c_1c_2z, c_2^2z, xz, c_1xz, c_2xz, yz, c_1yz, c_2yz, xyz, y^2z, z^2, c_1z^2, c_2z^2, xz^2, yz^2, z^3$.

分次字典序 Groebner基的 51个多项式方程可以写成矩阵形式:

$$M'_{51\times51}\,t = 0 \tag{7}$$

其中,$M'_{51\times51}$是一个关于 c_3的 51×51阶系数矩阵; t是一个由 51个假想变元组成的列阵.

由代数学可知,式(1)和式(6)有解的条件是其系数行列式等于零,即

$$\det M'_{51\times51} = 0 \tag{8}$$

显然,直接求解式(8)占用较多计算机存储空间和运算时间,计算效率低,有必要进一步减小其阶数.

2.2 减小结式阶数

由于矩阵 $M'_{51\times51}$的某些列中只有 m_{ij}一个元素,该列其它的元素均为 0. 也就是说,只有 m_{ij}所在列对应的多项式方程与对应的假想变元有关,而其它多项式方程与该变元无关. 因此,可以划去 m_{ij}所在多项式方程,而不影响线性方程组求解.

同理,可以划去 31个多项式方程,则剩下分次字典序 Groebner基中第 2～8, 39～51共 20个多项式方程,写成矩阵形式为

$$M_{20\times20}\,T = 0 \tag{9}$$

其中,$M_{20\times20}$是一个关于 c_3的 20×20阶系数矩阵; T是一个含有 20个假想变元的列阵:

$$T = [1, c_1, c_1^2, c_2, c_1c_2, c_2^2, x, c_1x, c_2x, y, c_1y, c_2y, xy, y^2, z, c_1z, c_2z, xz, yz, z^2]^{\mathrm{T}}$$

2.3 一元高次输入输出方程

由代数学可知,方程组(9)有解的条件是其系数行列式等于零,即

$$\det M_{20\times20} = 0 \tag{10}$$

由于计算机内存容量的限制,矩阵 $M_{20\times20}$的行列式不可能继续用代数形式展开,此时必须代入数值运算. 为准确得到解的数目,在展开行列式前判断方程的次数十分重要. 为此,列出矩阵 $M_{20\times20}$各列关于变量 c_3的次最高次数为 4, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 1, 3, 2, 2, 1, 1, 1,它们的总和为 40. 根据行列式的运算法则可知,展开式(10)后得到只含变量 c_3的多项式最高次数不会超过 40.

展开式(10),不需要提取任何公因式,可以直接得到的关于变量 c_3的一元 40次输入输出方程:

$$\sum_{i=0}^{40} s_i c_3^i = 0 \tag{11}$$

其中 s_i是由输入参数确定的实系数.

由以上分析可知,本文构造的 20阶系数行列式与展开系数行列式后获得的一元多项式在符号

形式上,最高次数是完全一致的. 解式 (11),将得到 40个解.

2.4 其它变量的求解

将所求得的 40个 c_3值代入 20个多项式中任何 19个式中,则这 19个式子变成除假象变元 1之外的 19个假想变元的线性方程组,解此方程组,可求得对应于 c_3的 c_1, c_2, x, y, z的值.

3 同伦连续法求解

同伦连续法是一种很实用的求解非线性方程组的数值方法,文献 [10]有较详细介绍. 联立式 (1)和式 (6)组成一个含有 6个变量 6个方程式的多项式方程组,使用美国一所大学 (University of Illinois at Chicago)开发的同伦连续法软件 PHCpack对方程组直接求解,计算结果表明:共有 40组解收敛. 结果与前面求解结果一致.

4 数字实例

已知图 1并联机器人机构,采用文献 [7]中实例的结构参数如表 1所示.

将已知参数代入式 (1) ~式 (11),在 Intel Pentium Ⅳ 3.06 GHz RAM 1 GB的 PC机上,耗时 32.062 s,获得 40组解,结果与文献 [7]完全一致,其中实数解 8组,如表 2所示.

表 1 数字实例的已知参数

i	Q_{ia}	Q_{ib}	L_i
1	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	14
2	(5, 0, 0)	(4, 0, 0)	12
3	(12, -15, 0)	(8, -6, 0)	17
4	(18, -6, 3)	(13, -3, -5)	15
5	(20, 1, -3)	(14, 5, 2)	23
6	(10, 8, 5)	(6, 10, 3)	19

表 2 数字实例的 8组实数解

编号	c_1	c_2	c_3	x	y	z
1	0.1817	0.0454	-1.0664	6.8571	0.2821	12.2025
2	6.0419	-4.6719	2.9816	13.1037	-0.9971	4.8270
3	1.4357	-1.7068	-0.6716	6.3779	0.7328	-12.4413
4	-0.0580	-0.9158	-0.0201	-2.2081	-1.3658	-13.7571
5	-3.7761	2.9783	0.4853	2.1076	3.3472	13.4296
6	-0.3979	0.4307	0.5806	-2.5981	-2.8977	13.4482
7	-0.5600	-0.9822	0.6016	0.7725	-13.7260	2.6457
8	0.6420	0.1643	0.7277	8.3596	-6.4555	9.1893

5 结 束 语

使用分次字典序 Groebner基和 Sylvester结式相结合的代数方法获得了 Stewart台体并联机器人位置正解的解析解,与一般的消元法相比,没有复杂的数学推导,计算方法简洁,构造的 20阶 Sylvester结式尺寸比较小,形式简洁. 通过数字实例进行了验证,并且采用同伦法进行求解,两种方法结果一致. 文中提供的新思路,可以对其它形式的并联机构位置正解问题求解.

参考文献 (References)

[1] 黄真,孔令富,方跃法. 并联机器人机构学理论及控制 [M]. 北京:机械工业出版社, 1997: 36 - 64
Huang Zhen, Kong Lingfu, Fang Yuefa. Theory of parallel robotic mechanisms and control [M]. Beijing: Mechanical Press, 1997: 36 - 64 (in Chinese)

[2] Wampler C W. Forward displacement analysis of general six-in-parallel SPS (Stewart) platform manipulators using SOMA coordinates [J]. Mech Mach Theory, 1995, 31(3): 331 - 337

[3] Raghavan M. The Stewart platform of general geometry has 40 configurations[J]. ASME J Mechanical Design, 1993, 115(2): 277 - 281

[4] Innocenti C, Castelli V P. Forward kinematics of the general 6-6 fully parallel mechanism: An exhaustive numerical approach via a mono-dimensional-search algorithm [J]. ASME J Mech Des, 1993, 115(4): 932 - 937

[5] 刘安心,杨廷力. 求一般 6-SPS并联机器人机构的全部位置正解 [J]. 机械科学与技术, 1996, 15(4): 543 - 546
Liu Anxin, Yang Tingli. Finding all solutions to forward displacement analysis problem of 6-SPS parallel robot mechanism [J]. Mechanical Science and Technology, 1996, 15(4): 543 - 546 (in Chinese)

[6] Innocenti C. Forward kinematics in polynomial form of the general stewart platform [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2001, 123(2): 254 - 260

[7] Lee Taeyoung, Shim Jaekyung. Forward kinematics of the general 6-6 Stewart platform using algebraic elimination[J]. Mech Mach Theory, 2001, 36(4): 1073 - 1085

[8] Dhingra A K, Almadi A N, Kohli D. A groebner-sylvester hybrid method for closed-form displacement analysis of mechanisms [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2000, 122(4): 431 - 438

[9] Craig J J. Introduction to robotics: mechanics and control[M]. 3rd Edition. Beijing: Mechanical Industrial Press, 2005: 47

[10] 杨廷力. 机械系统基本理论:结构学,运动学,动力学 [M]. 北京:机械工业出版社, 1996: 17 - 60, 115 - 138
Yang Tingli. Basic theory of mechanical system: structural, kinematical and dynamic[M]. Beijing: Mechanical Industrial Press, 1996: 17 - 60, 115 - 138 (in Chinese)

(责任编辑:文丽芳)