N 中连续取 k 好可修系统的模糊可靠性

武月琴 周 泓

(北京航空航天大学 经济管理学院，北京 100191)

摘 要：在假定关键部件具有较高的修理优先权的条件下，讨论了具有1个修理工的可修 n 中连续取 k 好系统. 利用马尔可夫过程对系统的各状态进行分析，得出了系统各状态的概率. 然后利用基于模糊状态的可靠性理论，通过定义系统各状态对模糊成功的隶属函数，得到了可修 n 中连续取 k 好系统的模糊可靠性指标的计算公式，并比较其结果与传统可靠性理论的不同之处. 模糊可靠度可以反映系统中工作部件的数目对系统性能的影响，它全面刻画了系统的可靠性行为. 最后给出了计算示例说明算法.

关 键 词：模糊状态；模糊可靠度；模糊可用度；关键部件；n 中连续取 k 系统

中图分类号：TB 114.2

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2009)01-0052-04

Fuzzy reliability of repairable consecutive-k-out-of-n system

Wu Yueqin Zhou Hong

(School of Economics and Management, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Under the condition that a key component will have a higher priority of repair, a repairable consecutive-k-out-of-n:G system with one repairman was studied. The probability of states was derived by using Markov process. The membership functions of the states to success and failure were defined and the reliability indices of repairable systems were analyzed utilizing reliability theory incorporating fuzzy states. The difference between fuzzy reliability and conventional reliability was compared. When the system was in the working state, the reliability of the system was intuitively characterized by the number of working components. The fuzzy reliability can fully describe the action of system. In the end, an example was given to illustrate the method.

Key words: fuzzy state; fuzzy reliability; fuzzy availability; key component; consecutive-k-out-of-n: system

n 中连续取 k 好(或坏)系统是指由 n 个部件有序地排成直线或环形，系统正常(或失效)当且仅当有相邻 k 个或 k 个以上部件正常(或失效)，分别简记为 $C(k,n:G)$ 或 $C(k,n:F)$. 自从 Kontoleon[1] 提出 $C(k,n:F)$ 模型后，$C(k,n:F)$ 和 $C(k,n:G)$ 系统可靠性的研究成为可靠性理论和应用中的活跃课题[2-7]. 然而，目前对 $C(k,n:G)$ 系统的研究没有考虑当系统处于工作状态时，系统中故障元件的个数对系统状态的影响. 文献[8]利用基于模糊状态的可靠性理论研究了线形 $C(k,n:F)$ 可修系统.

本文应用模糊数学与系统工程的理论与方法，在系统中只有1个修理工的情况下，构造了系统处于模糊故障状态与模糊工作状态的隶属函数，并利用基于模糊状态的可靠性理论研究了线形及环形 $C(k,n:G)$ 可修系统. 讨论了考虑模糊状态后系统可靠性的变化.

1 基于模糊状态的可靠性理论

对于一些大型复杂系统，系统状态具有某种

收稿日期：2008-02-17

基金项目：国家自然科学基金资助项目(70771003,70521001)；博士后基金资助项目(20070410031)

作者简介：武月琴 (1967—)，女，山西大同人，博士后，wuyueqin01@sina.com.

程度的不确定性. 为了更好地描述工程实际问题需要在可靠性分析中,引入模糊状态假设[9-11]. 模糊状态假设是指系统故障定义是模糊的,系统在某种程度上处于模糊成功状态,又在某种程度上处于模糊故障状态. 基于概率假设和模糊状态假设的可靠性理论称为率模模糊可靠性理论. 系统的率模可靠度定义为在规定的时间内系统不发生模糊失效的概率. 假设系统具有 n 个非模糊状态 $S_1,\cdots,S_n$,令 $U=\{S_1,\cdots,S_n\}$ 为论域. 根据文献[11],在这个论域上定义模糊成功状态 S 和模糊故障状态 F 后,就可以得到系统的模糊可靠性指标.

2　定义与模型假设

2.1　定　义

定义 1[5]　当系统处于故障状态,如果某一故障部件的修复能使得系统工作,则此故障部件称作关键部件.

2.2　模型假设

1) 系统中故障部件的维修按关键部件有优先维修权的规则进行;

2) 设系统中的第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个部件的工作时间 X_i 和维修时间 Y_i 分别服从参数为 λ 和 μ 的负指数分布($\lambda>0,\mu>0$),而且 X_i 与 $Y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是相互独立的随机变量;

3) 开始时所有部件都是新的,而且故障部件能够修复如新;

4) 设系统故障后,未故障的部件不再发生故障.

3　模型分析及可靠性指标的计算

3.1　模型分析

令 $N(t)$ 为系统在时刻 t 所处的状态,则

$$N(t)=\begin{cases}0 & \text{时刻 } t\text{,所有部件工作,系统工作}\\ -1 & \text{时刻 } t\text{,1 个部件故障,系统工作}\\ \vdots & \\ -(n-k) & \text{时刻 } t\text{,}(n-k)\text{ 个部件故障,系统工作}\\ 1 & \text{时刻 } t\text{,1 个部件故障,系统工作}\\ \vdots & \\ n-k+1 & \text{时刻 } t\text{,}(n-k+1)\text{ 个部件工作,系统故障}\end{cases}$$

由模型假设,$\{N(t),t\geqslant 0\}$ 构成一个齐次 Markov 链,其中工作状态集为 $W=\{0,-1,-2,\cdots,-(n-k)\}$,故障状态集为 $F=\{1,2,\cdots,n-k+1\}$. 其状态空间为

$$\Omega=\{0,-1,-2,\cdots,-(n-k),1,2,\cdots,n-k+1\}$$

根据模型假设和 $N(t)$ 的定义,开始时系统中的所有部件都工作. 随着时间的推移,一些部件故障,故障部件可以被修复,因此系统的状态进行变化,最终系统故障. 当系统中故障部件数等于 $n-k+1$ 时,系统必然故障. 当故障部件数在 $1\sim(n-k+1)$ 之间时,系统可能工作也可能故障. 系统能否工作依赖于故障部件所处的位置. 因为假设系统故障后,不会再有部件故障,因此故障部件数不能超过 $n-k+1$.

引理 1[7]　设线形 $C(k,n;G)$ 系统处于状态 $-i$ 有 M_{-i} 种不同情形,$1\leqslant i\leqslant n-k$,则

$$M_{-i}=\binom{n}{i}-N(n-i,i+1;k-1)$$

其中 $\binom{n}{i}$ 为从 n 中取 i 个的不同组合数.

引理 2[7]　设环形 $C(k,n;G)$ 系统处于状态 $-i$ 有 M_{-i} 种不同情形,$1\leqslant i\leqslant n-k$,则

$$M_{-i}=\binom{n}{i}-N(n-i,i+1;k-1)+\sum_{l=k}^{\min(n-i,2(k-1))}(2k-1-l)N(n-i-l,i-1;k-1)$$

且当 $k>\min(n-i,2(k-1))$ 时

$$\sum_{l=k}^{\min(n-i,2(k-1))}(2k-1-l)N(n-i-l,i-1;k-1)=0$$

下面求系统状态转移概率. 由模型分析,在 Δt 时间内由状态 i 转移到状态 j 的广义转移概率为

$$p_{ij}(\Delta t)=P\{N(t+\Delta t)=j\mid N(t)=i\}$$

当 $I\neq 0$ 时,有

$$p_{-ij}(\Delta t)=\begin{cases}\mu\Delta t+o(\Delta t) & j=-(i-1)\\ ((i+1)M_{-(i+1)}/M_{-i})\lambda\Delta t+o(\Delta t) & j=-(i+1)\\ ((n-i)-(i+1)M_{-(i+1)}/M_{-i})\lambda\Delta t+o(\Delta t) & j=i+1\\ 1-((n-i)\lambda+\mu)\Delta t+o(\Delta t) & j=-i\\ o(\Delta t) & j\neq-(i-1),-i,-(i+1),i+1\end{cases}\quad(1)$$

其中,$i=1,2,\cdots,n-k$;如果系统为线形 $C(k,n;G)$ 系统,M_{-i} 由引理 1 给出;如果系统为环形

$C(k,n;G)$系统，M_{-i}由引理2给出.

在式(1)中，因为状态$-(i+1)$是从状态$-i$转移过来的，并且从状态$-i$到状态$-(i+1)$共有$i+1$种可能方法，而系统处于状态$-(i+1)$共有$M_{-(i+1)}$种情况. 因此，从状态$-i$到状态$-(i+1)$总的转移种数为$(i+1)M_{-(i+1)}$. 当$j=-(i+1)$时，根据广义转移概率的定义，得到

$$p_{-i-(i+1)}(\Delta t)=\frac{(i+1)M_{-(i+1)}}{M_{-i}}\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

容易证明式(1)中的其它等式.

如果系统处于状态i，在i个故障元件中，关键部件首先得到修理，因此有

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases}\mu\Delta t+o(\Delta t) & j=-(i-1)\\ 1-\mu\Delta t+o(\Delta t) & j=i\\ o(\Delta t) & j\neq-(i-1),i\end{cases}\tag{2}$$

其中$i=1,2,\cdots,n-k+1$.

下面分别给出线形与环形系统中$p_{0j}(\Delta t)$的表达式.

在环形$C(k,n;G)$系统中：

$$p_{0,-1}(\Delta t)=\begin{cases}n\lambda\Delta t+o(\Delta t) & k<n\\ o(\Delta t) & k=n\end{cases}\tag{3}$$

$$p_{0,1}(\Delta t)=\begin{cases}o(\Delta t) & k<n\\ n\lambda\Delta t+o(\Delta t) & k=n\end{cases}\tag{4}$$

在线形$C(k,n;G)$系统中：

$$p_{0,-1}(\Delta t)=\begin{cases}n\lambda\Delta t+o(\Delta t) & k\leqslant[n/2]\\ 2(n-k)\lambda\Delta t+o(\Delta t) & k>[n/2]\end{cases}\tag{5}$$

$$p_{0,1}(\Delta t)=\begin{cases}o(\Delta t) & k\leqslant[n/2]\\ (2k-n)\lambda\Delta t+o(\Delta t) & k>[n/2]\end{cases}\tag{6}$$

不论在线形还是在环形系统中，总有

$$p_{00}(\Delta t)=1-n\lambda\Delta t+o(\Delta t)\tag{7}$$

$$p_{0j}(\Delta t)=o(\Delta t)\quad j\neq-1,0,1\tag{8}$$

根据系统状态转移的表达式，可以得到转移率矩阵$\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$，$i,j\in\Omega$，其中

$$q_{ij}=\lim_{\Delta t\to0}\left(\frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}\right)\qquad i,j\in\Omega,i\neq j$$

$$q_i=\lim_{\Delta t\to0}\left(\frac{1-p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t}\right)\qquad i\in\Omega$$

$$q_{ii}=-q_i\qquad i\in\Omega$$

令$p_j(t)=P\{N(t)=j\}$，其中$j\in\Omega$；并且令

$$\boldsymbol{P}(t)=(p_0(t),p_{-1}(t),\cdots,p_{-(n-k)}(t),p_1(t),\cdots,p_{n-k+1}(t))$$

根据Kolmogorov-Feller向前方程，有

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}'(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{P}(0)=(1,0,\cdots,0)\end{cases}$$

系统的瞬时可用度为

$$A(t)=p_0(t)+p_{-1}(t)+p_{-2}(t)+\cdots+p_{-(n-k)}(t)$$

为了求系统的可靠度函数$R(t)$，讨论时间连续的具有$d-k+1$个吸收状态的齐次马尔可夫过程$\{\tilde{N}(t),t\geqslant0\}$. 马尔可夫过程$\{\tilde{N}(t),t\geqslant0\}$与$\{N(t),t\geqslant0\}$不同之处是$\{N(t),t\geqslant0\}$中的故障状态变成了$\{\tilde{N}(t),t\geqslant0\}$中的吸收状态. 令

$$\tilde{p}_j(t)=P\{\tilde{N}(t)=j\}\qquad j\in\Omega$$

$$\tilde{\boldsymbol{P}}(t)=(\tilde{p}_0(t),\tilde{p}_{-1}(t),\cdots,\tilde{p}_{-(n-k)}(t),\tilde{p}_1(t),\cdots,\tilde{p}_{(n-k+1)}(t))$$

根据Kolmogorov-Feller向前方程，有

$$\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{P}}'(t)=\tilde{\boldsymbol{P}}(t)\boldsymbol{Q}\\ \tilde{\boldsymbol{P}}(0)=(1,0,\cdots,0)\end{cases}$$

实际上只需要解下列方程：

$$\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{P}}'_W(t)=\tilde{\boldsymbol{P}}_W(t)\boldsymbol{Q}_W\\ \tilde{\boldsymbol{P}}_W(0)=(\tilde{p}_0(0),\tilde{p}_{-1}(0),\cdots,\tilde{p}_{-(n-k)}(0))\end{cases}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_W(t)=(\tilde{p}_0(t),\tilde{p}_{-1}(t),\cdots,\tilde{p}_{-(n-k)}(t))$$

$$\boldsymbol{Q}_W=(q_{ij})\qquad i,j=0,-1,-2,\cdots,-(n-k)$$

$\boldsymbol{Q}_W$是$\boldsymbol{Q}$的左上角$(n-k+1)\times(n-k+1)$阶子矩阵.

可靠度为

$$R(t)=\tilde{p}_0(t)+\tilde{p}_{-1}(t)+\tilde{p}_{-2}(t)+\cdots+\tilde{p}_{-(n-k)}(t)$$

首次故障前的平均时间为

$$T=\int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t$$

3.2 系统的模糊可靠性

为求系统的模糊可靠性指标，令论域$U=\{S_0,S_1,\cdots,S_{2n-2k-1}\}$. 当$0\leqslant i\leqslant n-k$时，$S_i=-i$；当$n-k+1\leqslant i\leqslant2n-2k+1$时，$S_i=i-n+k$. 在论域$U$上定义模糊成功状态$S$和模糊故障状态$F$如下：

$$\mu_S(S_i)=\begin{cases}\dfrac{n-k+1-i}{n-k+1} & 0\leqslant i\leqslant n-k\\ 0 & n-k+1\leqslant i\leqslant2n-2k+1\end{cases}$$

$$\mu_F(S_i)=\begin{cases}\dfrac{i}{n-k+1} & 0\leqslant i\leqslant n-k\\ 1 & n-k+1\leqslant i\leqslant2n-2k+1\end{cases}$$

因为

$$\mu_S(S_i)=1-\mu_F(S_i)\qquad i=0,\cdots,2n-2k+1$$

系统的率模可靠度为

$$R(t)=1-\sum_{i=0}^{2n-2k+1}\mu_F(S_i)P\{\tilde{N}(t)=S_i\}=$$

$$1-\sum_{i=0}^{n-k}\mu_F(S_i)P\{\widetilde{N}(t)=S_i\}-\sum_{i=n-k+1}^{2n-2k+1}\mu_F(S_i)P\{\widetilde{N}(t)=S_i\}=1-\sum_{i=0}^{n-k}\frac{i}{n-k+1}\widetilde{p}_{-i}(t)-\sum_{i=1}^{n-k+1}\widetilde{p}_i(t)$$

系统的率模可用度为

$$A(t)=p\{\text{时间 }t\text{ 系统处于模糊成功状态 }S\}=\sum_{i=0}^{2n-2k+1}\mu_S(S_i)P\{\text{时刻 }t\text{ 系统处于状态 }S_i\}=\sum_{i=0}^{n-k}\frac{n-k+1-i}{n-k+1}p_{-i}(t)$$

系统的首次模糊故障平均时间:

$$T=\int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t$$

4　算法举例

由 3 个相同部件组成的可修线形 $C(2,3:G)$ 系统,设其每个部件的工作时间 X_i 和维修时间 Y_i 分别服从参数为 λ 和 μ 的负指数分布($\lambda>0$,$\mu>0$),而且 X_i 与 $Y_i(i=1,2,3)$ 是相互独立的随机变量. 系统中只有 1 个修理工. 由前面的讨论,得到状态空间 $\Omega=\{0,-1,1,2\}$,工作状态 $W=\{0,-1\}$,故障状态 $F=\{1,2\}$. 由公式(1),(2),(5)～(8)及转移率矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的定义,可得转移矩阵:

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-3\lambda & 2\lambda & \lambda & 0\\ \mu & -2\lambda-\mu & 0 & 2\lambda\\ \mu & 0 & -\mu & 0\\ 0 & \mu & 0 & -\mu\end{pmatrix}$$

Kolmogorov-Feller 向前方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}'(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{P}(0)=(1,0,0,0)\end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{P}(t)=(p_0(t),p_{-1}(t),p_1(t),p_2(t))$$

将方程组展开得

$$\begin{cases}p'_0(t)=-3\lambda p_0(t)+\mu p_{-1}(t)+\mu p_1(t)\\ p'_{-1}(t)=2\lambda p_0(t)-(2\lambda+\mu)p_{-1}(t)+\mu p_2(t)\\ p'_1(t)=\lambda p_0(t)-\mu p_1(t)\\ p'_2(t)=2\lambda p_{-1}(t)-\mu p_2(t)\\ p(0)=(1,0,0,0)\end{cases}$$

方程组两边作 Laplace 变换,再利用初始条件,得到

$$\begin{cases}sp_0^*(s)=1-3\lambda p_0^*(s)+\mu p_{-1}^*(s)+\mu p_1^*(s)\\ sp_{-1}^*(s)=2\lambda p_0^*(s)-(2\lambda+\mu)p_{-1}^*(s)+\mu p_2^*(s)\\ sp_1^*(s)=\lambda p_0^*(s)-\mu p_1^*(s)\\ sp_2^*(s)=2\lambda p_{-1}^*(s)-\mu p_2^*(s)\end{cases}$$

其中 $p_j^*(s)=\int_0^\infty p_j(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 是 $p_j(t)$ 的 Laplace 变换.

解方程组得

$$p_1^*(s)=\frac{\lambda}{s+\mu}p_0^*(s)$$

$$p_{-1}^*(s)=\frac{2\lambda(s+\mu)}{s^2+2(\lambda+\mu)s+\mu^2}p_0^*(s)$$

$$p_2^*(s)=\frac{4\lambda^2}{s^2+2(\lambda+\mu)s+\mu^2}p_0^*(s)$$

$$p_0^*(s)=\frac{[s^2+2(\lambda+\mu)s+\mu^2](s+\mu)}{g(s)}$$

$$g(s)=s^4+(5\lambda+3\mu)s^3+(6\lambda^2+3\mu^2+8\lambda\mu)s^2+\mu(4\lambda^2+3\lambda\mu+\mu^2)s$$

上述等式两边作 Laplace 逆变换,可以得到 $p_0(t)$,$p_{-1}(t)$,$p_1(t)$,$p_2(t)$,进一步可得系统的瞬时可用度 $A(t)=p_0(t)+p_{-1}(t)$.

下面求系统的模糊瞬时可用度. 论域 $U=\{S_0,S_1,S_2,S_3\}$,其中 $S_0=0$,$S_1=-1$,$S_2=1$,$S_3=2$. 论域 U 上的模糊成功状态 S 和模糊故障状态 F 分别为

$$S=1/S_0+0.5/S_1+0/S_2+0/S_3$$

$$F=0/S_0+0.5/S_1+1/S_2+1/S_3$$

系统的模糊瞬时可用度为

$$\underset{\sim}{A}(t)=p\{\text{时间 }t\text{ 系统处于模糊成功状态 }S\}=\sum_{i=0}^{2n-2k+1}\mu_S(S_i)P\{\text{时刻 }t\text{ 系统处于状态 }S_i\}=p_0(t)+0.5p_{-1}(t)$$

系统的瞬时可用度 $A(t)=p_0(t)+p_{-1}(t)$,显然 $A(t)>\underset{\sim}{A}(t)$,从而系统的模糊瞬时可用度的估计比传统瞬时可用度的估计较为保守. 但系统的模糊瞬时可用度可以体现系统中故障部件的影响,更接近实际情况. 从以上分析可以看出,系统的模糊可靠性指标有很强的针对性,离开具体的隶属函数而抽象地谈论模糊可靠性指标是毫无意义的. 显然,当传统可靠性指标一定时,由于隶属函数的不同,模糊可靠性指标也不同. 另外,传统可靠性指标是模糊可靠性指标的极限情形和特例.

同理可以求出系统的可靠度和模糊可靠度.

(下转第 60 页)