疲劳裂纹扩展的不确定理论

王 军 邱志平

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院,北京 100191)

摘 要:在原有处理不确定问题的两种非概率方法的基础上,提出二阶区间分析方法和二阶凸模型方法,将不确定参数用区间或者凸集来描述;再利用 Taylor 级数展开法对含有不确定参数的裂纹扩展速率及寿命进行估计.同时给出传统的概率方法和两种不确定性方法的相互包含关系,对算例结果进行验证.通过对 00Cr17Ni14Mo2 材料裂纹扩展速率及寿命的计算,将区间分析方法、凸模型理论和传统的概率方法进行比较.结果表明,该理论在处理不确定问题时是有效的,且具有对统计信息依赖小,计算方法简便、实用和精度高的特点.

关 键 词:疲劳裂纹扩展速率;疲劳裂纹扩展寿命;区间分析方法;凸模型方法;不确定性

中图分类号:O 346.1

文献标识码:A **文 章 编 号**:1001-5965(2008)12-1428-05

Uncertain theory for fatigue crack extension

Wang Jun Qiu Zhiping

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Based on the foremost two non-probabilistic methods, second-order interval analysis method and second-order convex model method were advanced. The uncertain theories described all the uncertainties as interval or convex set. Then through the Taylor series expansion, the interval range of fatigue crack growth rate and its life with uncertainty parameters can be estimated. The inclusion relation of traditional probabilistic method and two uncertain theories was presented. This inclusion relation can verify the results of examples. The fatigue crack growth rate and its life of 00Cr17Ni14Mo2 were computed to illustrate that uncertain theories are effective by comparing with the interval analysis method, convex model method and the traditional probabilistic method. Their advantages are that they only need less statistical data and the method is simple, practical and with high precision.

Key words: fatigue crack growth rate; fatigue crack growth life; interval analysis method; convex model method; uncertainty

据 1982 年美国统计[1]:因交变载荷引起的疲劳断裂事故占机械结构失效总数的 95%.疲劳的过程可分为裂纹形成和裂纹扩展两个阶段.在工程实际上,通常承认材料或结构含有初始裂纹[2],因此对裂纹扩展阶段的研究十分重要.裂纹扩展受到多种因素影响,如载荷、应力强度因子、材料性能和裂纹长度等,而这些因素又具有不确定性.因此,不能用确定的方法研究.首先随机有限元被应用其中[3-4],但这种方法计算成本过高,限制了其在工程上的应用.而后人们在确定断裂力学和概率理论基础上发展出概率断裂力学[5].其将不确定参数假定为随机变量且满足某种分布,应用概率方法对不确定问题进行研究.但研究者逐渐发现,实际应用时往往无法得到足够的统计数据

收稿日期:2007-12-12

基金项目:国家杰出青年科学基金资助项目(10425208)

作者简介:王 军(1983—),男,吉林通化人,博士生,wangjun@ase.buaa.edu.cn.

来确定参数的概率分布.为了弥补概率方法的这种局限性,文献[6－8]提出了非概率凸集理论并进行分析,认为当已知统计信息较少时,应采用集合模型描述参数的不确定性.区间分析方法也可在已知数据较少时对其进行研究,国内外学者对此做了大量的工作[9－12].但是,在不确定参数下对疲劳裂纹扩展问题的相关研究还未见报道.本文应用二阶区间分析方法和二阶凸模型方法对含不确定参数的疲劳裂纹扩展速率及其寿命的范围进行估计,并与传统的概率方法进行了比较,验证了本文所提方法的有效性.

1　疲劳裂纹扩展的区间分析方法

在疲劳载荷作用下裂纹扩展速率是疲劳裂纹扩展规律中最主要的特征量,而裂纹扩展寿命是研究裂纹扩展的最终目的,因此本文将针对这两方面进行研究.为方便起见,将它们统一表示为

$$\Psi=\Psi(X_1,X_2,\cdots,X_n) \tag{1}$$

其中,Ψ 为裂纹扩展速率或裂纹扩展寿命;X_i 为不确定参数;因此 Ψ 也是不确定的.

利用区间中点和半径,将不确定参数表示为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}+\delta\boldsymbol{X}\qquad|\delta\boldsymbol{X}|\leqslant\Delta\boldsymbol{X} \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}}$ 为不确定参数的均值;$\delta\boldsymbol{X}$ 为不确定参数的半径;$|\cdot|$表示取绝对值.

由文献[12]可知一阶区间分析方法是利用一阶 Taylor 展开对问题进行逼近,对于非线性问题,不能得到准确结果,因此本文提出二阶区间分析方法.将 Ψ 在不确定参数 X_i 的区间中点处展开至第二阶,即

$$\Psi(\boldsymbol{X})=\Psi(\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Psi(X_i^{\mathrm{c}})}{\partial X_i}\delta X_i+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Psi(X_i^{\mathrm{c}})}{\partial X_i}\delta X_i\right)^2 \tag{3}$$

对其作区间自然扩张[13],可得

$$\Psi^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{X})=\Psi(\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Psi(X_i^{\mathrm{c}})}{\partial X_i}\Delta X_i^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Psi(X_i^{\mathrm{c}})}{\partial X_i}\Delta X_i^{\mathrm{I}}\right)^2 \tag{4}$$

根据区间四则运算,$(\Delta\boldsymbol{X}^{\mathrm{I}})^2$ 的范围是$[-(\Delta\boldsymbol{X})^2,(\Delta\boldsymbol{X})^2]$,因此得二阶区间分析方法 Ψ 的最大值和最小值:

$$\max_{\delta\boldsymbol{X}\in[-\Delta\boldsymbol{X},\Delta\boldsymbol{X}]}\Psi(\boldsymbol{X})=\Psi(\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}})+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\Psi(X_i^{\mathrm{c}})}{\partial X_i}\right|\Delta X_i+\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial\Psi(X_i^{\mathrm{c}})}{\partial X_i}\right|\Delta X_i\Delta X_j\right)^2$$

$$\min_{\delta\boldsymbol{X}\in[-\Delta\boldsymbol{X},\Delta\boldsymbol{X}]}\Psi(\boldsymbol{X})=\Psi(\boldsymbol{X}^{\mathrm{c}})-\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\Psi(X_i^{\mathrm{c}})}{\partial X_i}\right|\Delta X_i-\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial\Psi(X_i^{\mathrm{c}})}{\partial X_i}\right|\Delta X_i\Delta X_j\right)^2 \tag{5}$$

2　疲劳裂纹扩展的凸模型方法

将式(1)中的不确定向量 $\boldsymbol{X}$ 用确定量 $\boldsymbol{X}^0$ 和不确定量 $\boldsymbol{\delta}$ 两部分表示:

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^0+\boldsymbol{\delta}\ \text{或}\ X_i=X_i^0+\delta_i \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{X}^0$ 称作不确定参数 $\boldsymbol{X}$ 的标称值.假设不确定量 $\boldsymbol{\delta}$ 在如下凸集合内变化,即

$$E(\boldsymbol{\delta},\theta)=\{\boldsymbol{\delta}:\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{\delta}\leqslant\theta^2\} \tag{7}$$

其中,$\boldsymbol{\Omega}$ 为正定对角矩阵;θ 为实数,称作椭球的半径,通常取为 1.在凸集合理论中,式(7)所定义的凸集为一超椭球,即

$$E(\boldsymbol{X}^0,\theta)=\left\{\boldsymbol{X}:\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-X_i^0)^2}{e_i^2}\leqslant\theta^2\right\} \tag{8}$$

凸集合理论的思想是:通过优化技术,选择适当的 $\boldsymbol{\Omega}$,使得由式(7)所示超椭球在包含所有不确定参数范围的同时,体积达到最小.

二阶凸模型方法是将 Ψ 在不确定参数的标称值处进行 Taylor 展开并保留到二次项,即

$$\Psi(\boldsymbol{X})=\Psi(\boldsymbol{X}^0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Psi(X_i^0)}{\partial X_i}\delta_i+\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\Psi(\boldsymbol{X}^0)}{\partial X_i\partial X_j}\delta_i\delta_j\right)^2 \tag{9}$$

将式(9)写成如下形式:

$$\Psi(\boldsymbol{X})=\Psi^0+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta} \tag{10}$$

其中,$\boldsymbol{\phi}=\left(\frac{\partial^2\Psi(\boldsymbol{X}^0)}{\partial X_1\partial X_1},\frac{\partial^2\Psi(\boldsymbol{X}^0)}{\partial X_1\partial X_2},\cdots,\frac{\partial^2\Psi(\boldsymbol{X}^0)}{\partial X_1\partial X_n},\frac{\partial^2\Psi(\boldsymbol{X}^0)}{\partial X_2\partial X_1},\frac{\partial^2\Psi(\boldsymbol{X}^0)}{\partial X_2\partial X_2},\cdots,\frac{\partial^2\Psi(\boldsymbol{X}^0)}{\partial X_2\partial X_n},\cdots,\frac{\partial\Psi^2(\boldsymbol{X}^0)}{\partial X_n\partial X_n}\right)^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{\Delta}=(\delta_1\delta_1,\delta_1\delta_2,\cdots,\delta_1\delta_2,\delta_2\delta_1,\delta_2\delta_2,\cdots,\delta_2\delta_n,\cdots,\delta_n\delta_n)^{\mathrm{T}}$.

于是问题转化为在约束条件(7)下的极值问题:

$$\Psi(\boldsymbol{X})=\underset{\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\delta}\leqslant\theta^2}{\mathrm{extremum}}\left\{\Psi^0+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}\right\} \tag{11}$$

设 Lagrange 函数为

$$L=\Psi^0+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}+\lambda(\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\delta}-\theta^2) \tag{12}$$

由 Lagrange 函数取极值的必要条件,有

$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\delta}}=\boldsymbol{g}+2\lambda\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\delta}=0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\begin{cases}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\delta}-\theta^2=0\Rightarrow\eta\geqslant 0\\ \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\delta}-\theta^2<0\Rightarrow\eta=0\end{cases} \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}$ 的每一行均为 $\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}$ 的前 n 行. 由式(13)可得:$\boldsymbol{\delta}=-(\boldsymbol{\Phi}+2\lambda\boldsymbol{\Omega})^{-1}\boldsymbol{g}$.

当极值在椭球内部达到时,由式(11)和式(14)可得:$\Psi_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{X})=\Psi_0-(1/2)\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{g}$;当极值在椭球边界达到时,分别求出两个 Lagrange 乘子,代入式(11)得:

$$\Psi_{B_1}(\boldsymbol{X})=\Psi^0-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Phi}+2\lambda_1\boldsymbol{\Omega})^{-1}\boldsymbol{g}+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Phi}+2\lambda_1\boldsymbol{\Omega})^{-1}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Phi}+2\lambda_1\boldsymbol{\Omega})^{-1}\boldsymbol{g}$$

$$\Psi_{B_2}(\boldsymbol{X})=\Psi^0-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Phi}+2\lambda_2\boldsymbol{\Omega})^{-1}\boldsymbol{g}+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Phi}+2\lambda_2\boldsymbol{\Omega})^{-1}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Phi}+2\lambda_2\boldsymbol{\Omega})^{-1}\boldsymbol{g}$$

于是可得二阶凸模型方法 Ψ 的上下界为

$$\Psi(\boldsymbol{X})=[\underline{\Psi},\overline{\Psi}]=[\min\{\Psi_{\mathrm{I}},\Psi_{B_1},\Psi_{B_2}\},\max\{\Psi_{\mathrm{I}},\Psi_{B_1},\Psi_{B_2}\}] \tag{15}$$

其中,Ψ_{I} 为当极值在椭球内部达到时 Ψ 的值;Ψ_{B_1} 和 Ψ_{B_2} 为当极值在椭球边界达到时 Ψ 的值.

两种二阶不确定方法间的相互转化与一阶形式[8]时相同,即由区间向量确定凸集合时,区间向量中心与椭球中值相等,即 $X_i^0=X_i^{\mathrm{c}}$,椭球半轴 $e_j=\sqrt{n}\,\Delta X_j$;而由凸集合确定区间向量时,$X_i^{\mathrm{c}}=X_i^0$,$\Delta X_i=e_i$,即椭球中值与区间向量中心相等,而区间向量半径等于凸集合半轴.

3 3种方法相互之间的包含关系

本节将针对2种情况通过数学证明得到3种方法结果之间的包含关系;预先对3种方法得到的结论做一理论上的指导.

第1种情况是由区间向量确定凸集合时,假设凸集合式(8)是通过区间向量式(2)得到的,线性情况下凸集合的上下界为

$$[\underline{\Psi},\overline{\Psi}]=\left[\Psi^0-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial\Psi^0}{\partial X_i}\right)(\sqrt{n}\,\Delta X_i)\right]^2},\ \Psi^0+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial\Psi^0}{\partial X_i}\right)(\sqrt{n}\,\Delta X_i)\right]^2}\right] \tag{16}$$

而区间分析方法得到的上下界为

$$[\underline{\Psi},\overline{\Psi}]=\left[\Psi^{\mathrm{c}}-\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\Psi^{\mathrm{c}}}{\partial X_i}\right|\Delta X_i,\ \Psi^{\mathrm{c}}+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\Psi^{\mathrm{c}}}{\partial X_i}\right|\Delta X_i\right] \tag{17}$$

利用一阶矩概率方法得到的上下界为

$$[\underline{\Psi},\overline{\Psi}]=\left[\Psi^{\mathrm{c}}-k\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial\Psi^{\mathrm{c}}}{\partial X_i}\right)(\sigma_{X_i})\right]^2},\ \Psi^{\mathrm{c}}+k\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial\Psi^{\mathrm{c}}}{\partial X_i}\right)(\sigma_{X_i})\right]^2}\right] \tag{18}$$

其中 σ_{X_i} 为不确定参数的标准差,需要说明的是:通常将区间半径定义为 $k\sigma_{X_i}$,即 $\Delta X_i=k\sigma_{X_i}$.

由 $X_i^{\mathrm{c}}=X_i^0$ 及下面2个不等式关系:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial\Psi^0}{\partial X_i}\right)(\sqrt{n}\,\Delta X_i)\right]^2}\geqslant\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Psi^0}{\partial X_i}\right)(\Delta X_i)\right]^2}\geqslant\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Psi^{\mathrm{c}}}{\partial X_i}\right)(\Delta X_i)\right]^2}=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\Psi^{\mathrm{c}}}{\partial X_i}\right|\Delta X_i$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial\Psi^0}{\partial X_i}\right)(\sqrt{n}\,\Delta X_i)\right]^2}=\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial\Psi^{\mathrm{c}}}{\partial X_i}\right)(k\sigma_{X_i})\right]^2}\geqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial\Psi^{\mathrm{c}}}{\partial X_i}\right)(k\sigma_{X_i})\right]^2}=k\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial\Psi^{\mathrm{c}}}{\partial X_i}\right)(\sigma_{X_i})\right]^2}$$

可知在区间向量确定凸集合的情况时,凸集合理论的结果区间最大而概率方法的结果区间最小,即

$$\underline{\Psi}_{\mathrm{E}}\leqslant\underline{\Psi}_{\mathrm{I}}\leqslant\underline{\Psi}_{\mathrm{P}}\leqslant\overline{\Psi}_{\mathrm{P}}\leqslant\overline{\Psi}_{\mathrm{I}}\leqslant\overline{\Psi}_{\mathrm{E}} \tag{19}$$

其中,下标 E,I,P 分别表示凸集合理论,区间分析方法,概率方法.

类似于上述推导过程,当第2种情况即由凸集合确定区间向量时,凸集合理论的结果与概率方法的结果重合而区间分析方法的结果区间最大,即

$$\underline{\Psi}_{\mathrm{I}}\leqslant\underline{\Psi}_{\mathrm{E}}\leqslant\underline{\Psi}_{\mathrm{P}}\leqslant\overline{\Psi}_{\mathrm{P}}=\overline{\Psi}_{\mathrm{E}}\leqslant\overline{\Psi}_{\mathrm{I}} \tag{20}$$

4 算例分析

4.1 线性算例

用 Pairs 公式:$\mathrm{d}a/\mathrm{d}N=C\Delta K^n$ 分析 00Cr17Ni14Mo2 材料的裂纹扩展速率,其中不确定参数 C 在区间$[C^{\mathrm{c}}-\alpha C^{\mathrm{c}},C^{\mathrm{c}}+\alpha C^{\mathrm{c}}]$中取值,$\Delta K$ 在$[\Delta K^{\mathrm{c}}-2\alpha\Delta K^{\mathrm{c}},\Delta K^{\mathrm{c}}+2\alpha\Delta K^{\mathrm{c}}]$中取值. 为了便于比较,设 C 和 ΔK 服从正态分布,其中各参数值由文献[14]给出,C 的均值为 $1.031\,8\times10^{-10}$,ΔK 均值为 $8.67\ \mathrm{MPa}\cdot\mathrm{m}^{1/2}$,常数 $n=4.169\,4$;由均值与标准差的关系设标准差 $\sigma_C=\alpha/3\cdot\mu_C$,$\sigma_{\Delta K}=2\alpha/3\cdot\mu_{\Delta K}$;$\alpha$ 为可变的变差系数.

对 Pairs 公式两边取对数可得 $\mathrm{d}a/\mathrm{d}N$ 的线性形式:$\lg(\mathrm{d}a/\mathrm{d}N)=\lg C+n\lg\Delta K$. 首先,考虑第1种情况,应用3种方法对上式进行计算,得到图1

所示曲线.其中 U_E 和 L_E 分别表示凸集合理论的上下界,U_I 和 L_I 分别表示区间分析方法的上下界,U_P 和 L_P 分别表示概率方法的上下界.

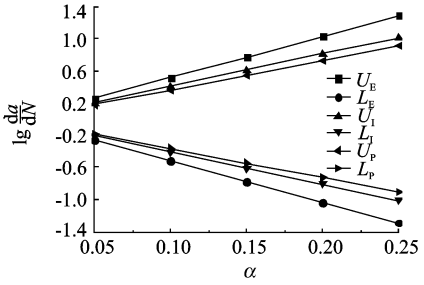


图 1　第 1 种情况下 3 种方法
裂纹扩展速率的上下界曲线

第 2 种情况时,由于区间向量的范围没有变化,因而可逆推出凸集合形式,从而得到图 2 所示曲线.

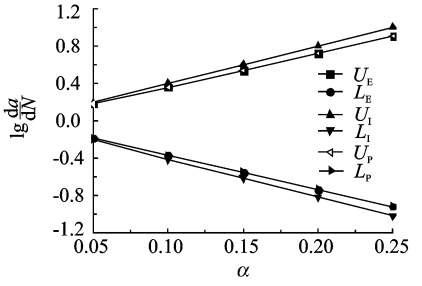


图 2　第 2 种情况下 3 种方法
裂纹扩展速率的上下界曲线

4.2　非线性算例

对一两端受拉 00Cr17Ni14Mo2 材料,仍然考虑 Pairs 公式,将其从初始裂纹长度 a_0 到临界裂纹长度 a_c 进行积分,当 $n\neq 2$ 时得:

$$N=\frac{2}{(2-n)C(\Delta\sigma\sqrt{\pi})^n}(a_c^{1-n/2}-a_0^{1-n/2})$$

其中不确定参数 C 在区间$[C^c-\alpha C^c, C^c+\alpha C^c]$中取值,$\Delta\sigma$ 在区间$[\Delta\sigma^c-\beta\Delta\sigma^c, \Delta\sigma^c+\beta\Delta\sigma^c]$中取值;$C$ 和 $\Delta\sigma$ 服从正态分布且互不相关,C 均值与常数 n 同 4.1 节,$\Delta\sigma$ 均值为 123.466 7 MPa;设标准差 $\sigma_C=\alpha/3\cdot\mu_C$,$\sigma_{\Delta\sigma}=\beta/3\cdot\mu_{\Delta\sigma}$;$\alpha$ 和 β 为变差系数;初始裂纹尺寸 $a_0=0.05$ mm,临界裂纹尺寸 $a_c=500$ mm.

同样分 2 种情况进行分析,应用 3 种方法得到图 3 和图 4,图中各符号所表示的含义同 4.1 节.

5　结　论

应用 3 种方法对含不确定参数的裂纹扩展速率或寿命进行了计算,由算例的计算结果可知,在线形情况下 2 种二阶不确定方法退化为一阶形式,这时二阶不确定方法与一阶不确定方法所得到的结果相同;而对于非线性情况 2 种二阶不确定方法也可以较好地模拟实际情况,所得到的上下界与传统的概率方法所得的上下界非常接近.因此二阶不确定方法比一阶方法有更强的适应性,能够更好地解决非线性问题.同时不确定性理论不需要预先知道大量统计信息,而只需给出不确定参数的范围.这大大拓宽了不确定性变量问题的研究空间.在工程上具体应用时,应根据对不确定信息的掌握程度以及界定不确定参数的方式,而决定应该采用哪种方法,因此不确定性理论对于概率方法是一个有效的补充.另外 3 种方法的包含关系与第 3 节的理论推导是一致的,因此该理论无论在理论上还是在实际上都得到了证明.通过算例图形可知,随着不确定参数变差系数的变大,裂纹扩展速率或寿命分散程度也相应的变大.因此在工程上要控制裂纹扩展速率或其寿命的分散程度就必须降低相关参数的不确定度.同样该理论也可用到其它具有不确定因素的问题上,并且随着不确定参数的增多,该理论将更好地体现出其优越性,因此在工程上有极大的应用前景.

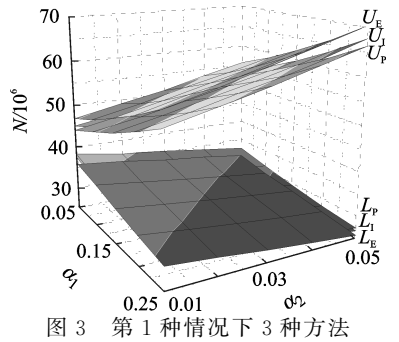


图 3　第 1 种情况下 3 种方法
裂纹扩展寿命的上下界曲面

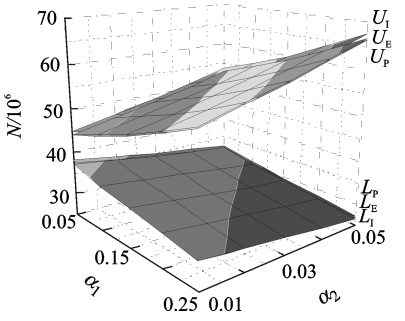


图 4　第 2 种情况下 3 种方法
裂纹扩展寿命的上下界曲面

参考文献（References）

[1] 储佳章,王键一.学科交叉融合寿命定量设计——我国机械设计的当务之急[J].中国机械工程,1998,9(11):1－2
Chu Jiazhang, Wang Jianyi. Life quantitative design of com-

bination of multi-disciplines—a present urgent task of mechanical design in China [J]. Chinese Mechanical Engineering,1998,9(11):1－2(in Chinese)

[2] 高镇同,熊峻江.疲劳可靠性[M].北京:北京航空航天大学出版社,2000
Gao Zhentong, Xiong Junjiang. The reliability of fatigue [M]. Beijing:Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2000(in Chinese)

[3] 陈虬,刘先斌.随机有限元及其工程应用[M].成都:西南交通大学出版社,1993
Chen Qiu, Liu Xianbing. Random finite element and its application of engineering [M]. Chengdu:Press of Southwest Jiaotong University, 1993(in Chinese)

[4] 孙训方,李建康,陈虬,等.断裂分析中的随机有限元方法[J].固体力学学报,2001,22(1):85－88
Sun Xunfang, Li Jiankang, Chen Qiu, et al. Random finite element method of failure analysis[J]. Acta Mechanica Solida Sinica,2001,22(1):85－88(in Chinese)

[5] 刘文斑,郑晏仲,费斌军.概率断裂力学与概率损伤容限/耐久性[M].北京:北京航空航天大学出版社,1999
Liu Wenting, Zheng Yanzhong, Fei Binjun. Probabilistic fracture mechanics and probabilistic damage tolerance/durability[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 1999(in Chinese)

[6] Ben-Haim Y,Elishakoff I. Convex models of uncertainty in applied mechanics [M]. Amsterdam:Elsevier Science,1990

[7] Ben-Haim Y. A non-probabilistic measure of reliability of linear systems based on expansion of convex models[J]. Structural Safety,1995, 17: 91－109

[8] 邱志平,王晓军,马智博.结构疲劳寿命估计的集合理论模型[J].固体力学学报,2006,27(1):91－97
Qiu Zhiping, Wang Xiaojun, Ma Zhibo. A set-theoretical model for estimation of structural fatigue lifetime[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2006, 27(1): 91－97(in Chinese)

[9] Rao S S, Berke L. Analysis of uncertain structural systems using interval analysis [J]. AIAA Journal,1997,35(4):725－735

[10] Qiu Z P, Elishakoff I. Anti-optimum technique: a generalization of interval analysis for nonprobabilistic treatment of uncertainty[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2001, 12: 1747－1759

[11] 邱志平,王晓军,马一.结构复固有频率区域的区间摄动法[J].北京航空航天大学学报, 2003, 29(5): 406－409
Qiu Zhiping, Wang Xiaojun, Ma Yi. Interval perturbation method for computing regions containing complex natural frequencies of structures[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2003,29(5):406－409(in Chinese)

[12] 邱志平,马一,王晓军.含不确定参数的复合材料板振动的区间分析法[J].北京航空航天大学学报, 2004, 30(7): 682－685
Qiu Zhiping, Ma Yi, Wang Xiaojun. Interval analysis method for vibration of composite laminate with uncertain parameters[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2004,30(7):682－685(in Chinese)

[13] Moore R E. Methods and applications of interval analysis [M]. Philadephia:SIAM,1979

[14] 赵少汴.损伤容限设计方法和设计数据[J].机械设计,2000,5:4－6
Zhao Shaobian. Design methods and design data for damage tolerance [J]. Mechanical Design, 2000, 5: 4－6(in Chinese)

(责任编辑:文丽芳)