基于混合 Gramian 的柔性航天器保结构平衡降阶

孟占峰 韩 潮

(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100191)

摘 要: 对于柔性航天器动力学方程的降阶问题,传统的内平衡降阶方法破坏了原方程的动力学结构.为了解决这一问题,提出了一种牺牲严格内平衡状态,而保留原系统动力学特性的近似内平衡降阶方法.该方法利用混合 Gramian 描述系统的模态价值,针对柔性航天器动力学方程的特殊形式,给出了混合 Gramian 的闭合解析解.该方法得到的降阶模型可以保留原系统包括二阶结构,对称和正定性在内的所有动力学特性.数值算例表明该方法不但可以达到与传统一阶内平衡方法相当的降阶精度,而且降阶速度有大幅度提升.

关 键 词: 降阶; 柔性结构; 状态空间方法

中图分类号: V 426

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2008)12-1437-04

Structure-preserving balanced truncation for flexible spacecraft using cross Gramian

Meng Zhanfeng Han Chao

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: For model reduction of flexible spacecraft, conventional first-order balanced truncation (FOBT) method will destroy the second-order structure and dynamic properties of original system. In order to overcome this drawback, a new structure-preserving approximated balanced truncation method for model reduction of flexible spacecraft was proposed. The modal cost was described by a cross Gramian and the closed-form solution of cross Gamian was obtained via special form of dynamical equation of flexible spacecraft. The new method preserves the second-order structure, symmetry and positive definiteness of the original system. The numerical results show that the new method is superior to conventional first-order balanced truncation(FOBT) method for improving efficiency without sacrificing accuracy.

Key words: reduction; flexible structures; state space methods

一阶平衡降阶 FOBT(First-Order Balanced Truncation)方法自文献[1]首次提出以来,在近 20 年来得到了广泛的应用.但对于柔性航天器动力学模型降阶问题,还无法完全满足需要.柔性航天器的动力学模型是由二阶状态方程描述的,方程中相应的阻尼和刚度矩阵具有对称和正定特征,而直接采用传统的内平衡方法降阶后将破坏原始模型的二阶结构和对称及正定特性,从而破坏了原始模型的所有动力学特征.

针对以上问题,本文面向柔性航天器控制降阶需要,提出了一种基于混合 Gramian 的二阶保结构内平衡降阶方法.该方法与传统的一阶平衡降阶方法相比,降阶模型可以保留原模型包括二阶结构、对称性和正定性在内的全部动力学特征.而且降阶精度相当,计算速度更快.

1 柔性航天器动力学模型

柔性航天器系统级模型降阶需要先对由子结构模态综合法得到的耦合动力学方程求解广义特征值问题得到系统模态,进而将 6 个刚体模态与

收稿日期: 2007-12-17

作者简介: 孟占峰(1980—),男,北京人,博士生,mengzf@gmail.com.

柔性振动模态解耦. 在去掉6个刚体模态后,由航天器系统模态坐标 $\boldsymbol{\eta}$ 描述的航天器柔性振动方程可以写为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{\eta}}+\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}\dot{\boldsymbol{\eta}}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{\eta}&=\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{e}}&=\boldsymbol{C}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{v}}\dot{\boldsymbol{\eta}}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}=\mathrm{diag}(\omega_1^2,\omega_2^2,\cdots,\omega_n^2)$;$\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$;$\boldsymbol{u}$ 表示控制输入向量;$\boldsymbol{B}$ 是系统的输入矩阵;$\boldsymbol{C}_{\mathrm{p}}$ 和 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{v}}$ 分别表示位置模态和速度模态对应的输出矩阵.

不失一般性,在下面的内平衡降阶方法讨论中,假设系统(1)是稳定的,并且是完全可控和可观的.

对于二阶系统描述的柔性航天器动力学方程(1),采用传统的一阶内平衡降阶方法是令 $\boldsymbol{x}(t)=[\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}},\dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,将式(1)转化成如下的等价一阶状态方程:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}\\-\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}&-\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{C}_{\mathrm{p}}\quad\boldsymbol{C}_{\mathrm{v}}]$$

然后进行降阶. 但传统一阶降阶方法会破坏式(1)的二阶结构和系数矩阵的对称及正定性. 因此需要寻找可以保留这些结构的二阶保结构降阶方法.

2 混合 Gramian 定义与闭合解析解

混合 Gramian(cross Gramian)的概念最早是文献[2]针对单输入单输出系统提出的,并进一步扩展到对称的多输入多输出系统[3]. 最近文献[4]又将其拓展到输入和输出维数相等的多输入多输出系统中,并利用其对一阶系统进行近似内平衡降阶,得到了很好的效果. 下面将利用其对柔性航天器动力学模型(1)进行二阶保结构降阶.

对于输入输出维数相等的一阶系统(2),混合 Gramian 定义为如下 Sylvester 方程的解[4]:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}+\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}\tag{3}$$

并可以在频域内写为[4]

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\cdot\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}(-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\mathrm{d}\omega\tag{4}$$

混合 Gramian 的最大特点是在一个 Gramian 中融合了输入($\boldsymbol{B}$ 矩阵)和输出($\boldsymbol{C}$ 矩阵)两者的信息,用一个 Sylvester 方程取代了两个 Lyapunov 方程,不但更直接地反映了系统模态的价值,而且计算量减半.

对于一般的系统,只能通过求解式(3)的 Sylvester 方程得到系统的混合 Gramian. 但是对于采用系统模态描述的柔性航天器动力学方程(1),系统模态之间已经解耦,而且均化成了对角形式,对于这种特殊的对角形式,$\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}$ 具有闭合解析解. 下面将从 $\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}$ 频域定义式(4)出发,给出 $\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}$ 的闭合解的计算方法.

把式(2)中的系数带入式(4)写成如下分块形式:

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}^{\mathrm{P}}&\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}^{\mathrm{PV}}\\\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}^{\mathrm{VP}}&\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}^{\mathrm{V}}\end{bmatrix}\tag{5}$$

各分块元素为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}^{\mathrm{P}}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{G}(\mathrm{j}\omega)[-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}\cdot(\boldsymbol{C}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}})]\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega\\ \boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}^{\mathrm{V}}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{G}(\mathrm{j}\omega)[\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{p}}+\omega^2\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{v}}]\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega\\ \boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}^{\mathrm{PV}}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{G}(\mathrm{j}\omega)[\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{p}}-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{v}}]\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega\\ \boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}^{\mathrm{VP}}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{G}(\mathrm{j}\omega)[\omega^2\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{p}}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}\cdot(\boldsymbol{C}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}})]\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{G}(\mathrm{j}\omega)=(-\omega^2\boldsymbol{I}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}})^{-1}$

$\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}^{\mathrm{P}}$,$\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}^{\mathrm{V}}$ 分别称为二阶位置混合 Gramian 和速度混合 Gramian.

$\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}^{\mathrm{PV}}$,$\boldsymbol{W}_{\mathrm{CO}}^{\mathrm{VP}}$ 分别称为二阶位置-速度混合 Gramian 和速度-位置混合 Gramian.

注意到阻尼阵 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}$ 和刚度阵 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}$ 都是对角矩阵,所以 $\boldsymbol{G}(\mathrm{j}\omega)$ 可以写成如下对角矩阵形式:

$$\boldsymbol{G}(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{diag}[g_i(\mathrm{j}\omega)]\quad i=1,2,\cdots,n\tag{7}$$

其中

$$g_i(\mathrm{j}\omega)=(-\omega^2+\mathrm{j}\omega d_i+k_i)^{-1}\quad i=1,2,\cdots,n\tag{8}$$

d_i 和 k_i 分别是 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}}$ 和 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}$ 的对角线元素.

根据矩阵运算法则,二阶混合 Gramian 第 i 行第 j 列元素可以写为

$$\left.\begin{aligned}W_{\mathrm{CO}i,j}^{\mathrm{P}}&=\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{P}}f_{\mathrm{CO}i,j}^{\mathrm{I}}+(\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{P}}-\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{V}}k_j)f_{\mathrm{CO}i,j}^{\mathrm{O}}\\ W_{\mathrm{CO}i,j}^{\mathrm{PV}}&=\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{V}}f_{\mathrm{CO}i,j}^{\mathrm{I}}+\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{P}}f_{\mathrm{CO}i,j}^{\mathrm{O}}\\ W_{\mathrm{CO}i,j}^{\mathrm{VP}}&=\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{P}}f_{\mathrm{CO}i,j}^{\mathrm{II}}-(\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{P}}-\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{V}}k_j)f_{\mathrm{CO}i,j}^{\mathrm{I}}\\ W_{\mathrm{CO}i,j}^{\mathrm{V}}&=\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{V}}f_{\mathrm{CO}i,j}^{\mathrm{II}}-\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{P}}f_{\mathrm{CO}i,j}^{\mathrm{I}}\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

式中,$\boldsymbol{b}_i$ 表示 $\boldsymbol{B}_e$ 的第 i 个列向量;$\boldsymbol{c}_i^P$ 表示 $\boldsymbol{C}_P$ 的第 i 个行向量;$\boldsymbol{c}_i^V$ 表示 $\boldsymbol{C}_v$ 的第 i 个行向量. 关于 ω 的 0 阶,1 阶和 2 阶积分项分别定义为

$$\left.\begin{aligned} f_{COi,j}^{O} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_i(j\omega)g_j^H(j\omega)\,d\omega \\ f_{COi,j}^{I} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -j\omega g_i(j\omega)g_j^H(j\omega)\,d\omega \\ f_{COi,j}^{II} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 g_i(j\omega)g_j^H(j\omega)\,d\omega \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式(10)最终的推导结果为

$$\left.\begin{aligned} f_{COi,j}^{O} &= (d_i + d_j)\gamma_{i,j} \\ f_{COi,j}^{I} &= (k_i - k_j)\gamma_{i,j} \\ f_{COi,j}^{II} &= (k_i d_j + k_j d_i)\gamma_{i,j} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中

$$\gamma_{i,j} = [(d_i k_j + d_j k_i)(d_i + d_j) + (k_i - k_j)^2]^{-1}$$

从而,混合 Gramian 可以通过式(9)～式(11)进行显式表达,避免了求解 Sylvester 方程. 不但可以大幅度提高降阶速度,而且揭示了模态参数与模态可控可观性之间的关系,为进一步研究模态参数的影响奠定了基础.

3　二阶保结构平衡降阶

传统的 FOBT 降阶结果不能保持二阶结构的主要原因是:FOBT 方法认为状态变量都是相互独立的,可以随意删除其中可控和可观性差的状态变量. 而二阶系统对应的一阶等价系统中,状态变量被分解为位置变量和速度变量两部分,是成对出现的. 如果 FOBT 将二阶系统某个状态变量对应的位置变量(或速度变量)单独删除,原二阶系统的结构将被破坏.

内平衡降阶的本质是将原系统投影到一个主特征子空间中[5],对于 FOBT,是采用可控和可观 Gramian 的乘积 $\boldsymbol{W}_C\boldsymbol{W}_O$ 对该特征空间进行描述,通过 Hankel 奇异值截断得到相应的特征子空间. 对于二阶内平衡降阶,只需要采用恰当的变量对特征空间进行描述即可. 从式(5)直观可以看出,$\boldsymbol{W}_{CO}^P$,$\boldsymbol{W}_{CO}^V$ 可以分别作为二阶系统位置坐标和速度坐标可控和可观性的度量. 以 $\boldsymbol{W}_{CO}^*$ 表示 $\boldsymbol{W}_{CO}^P$,$\boldsymbol{W}_{CO}^V$ 两个中的任意一个,下面讨论特征子空间的求解方法.

首先对 $\boldsymbol{W}_{CO}^*$ 进行有序实 Schur 分解[6]:

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{W}_{CO}^*\boldsymbol{U} = \hat{\boldsymbol{W}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \cdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{12}$$

式中,$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{W}_{CO}^*$ 的特征值;且按绝对值降序排列:$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$;$*$ 表示任意实数.

如果原系统的阶数为 n,降阶后的系统阶数为 r,将 $\boldsymbol{U}$ 分块写为 $\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2]$,$\boldsymbol{U}_1 \in \boldsymbol{R}^{n\times r}$,则将原系统投影在 $\boldsymbol{U}_1$ 的列向量张成的子空间后,就得到系统(1)的二阶保结构降阶模型如下:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{D}_r\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}_r\boldsymbol{q} &= \boldsymbol{B}_r\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y}_e &= \boldsymbol{C}_p^r\boldsymbol{q} + \boldsymbol{C}_v^r\dot{\boldsymbol{q}} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D}_r &= \boldsymbol{U}_1^T\boldsymbol{D}_e\boldsymbol{U}_1 \\ \boldsymbol{K}_r &= \boldsymbol{U}_i^T\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{U}_1 \\ \boldsymbol{B}_r &= \boldsymbol{U}_1^T\boldsymbol{B}_e \\ \boldsymbol{C}_p^r &= \boldsymbol{C}_p\boldsymbol{U}_1 \\ \boldsymbol{C}_v^r &= \boldsymbol{C}_v\boldsymbol{U}_1 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

由于采用的是正交投影,所以降阶后的系统不但保留了原系统的二阶结构,而且还保留了对称和正定特性,从而使原系统的所有动力学特性全部得到了保留.

4　数值算例

以文献[7]给出的一个国际空间站模型的标准降阶考核算例验证本文所提出方法的有效性. 原模型为 135 阶,设降阶模型为 26 阶.

为了便于比较各种方法的性能,以 FULL 表示原模型,以 BT 代表任意一种降阶模型,定义模型降阶的绝对误差 E_{abs} 为

$$E_{abs}(j\omega) = \| \boldsymbol{G}_{FULL}(j\omega) - \boldsymbol{G}_{BT}(j\omega) \|_2 \tag{15}$$

其中,$\| \cdot \|_2$ 表示传递函数矩阵的 2 范数. 矩阵的 2 范数定义为矩阵的最大奇异值.

将本文提出的基于位置混合 Gramian 和速度混合 Gramian 的两种二阶保结构降阶方法与传统的一阶内平衡降阶方法进行比较,图 1 和图 2 给出了频率响应曲线和降阶误差曲线. 表 1 给出了相应的误差统计结果.

表 1　降阶绝对误差

降阶方法	平均误差	最大误差
一阶内平衡降阶	8.5539×10^{-5}	9.6575×10^{-4}
位置混合 Gramian	8.7632×10^{-5}	9.6903×10^{-4}
速度混合 Gramian	8.7612×10^{-5}	9.6903×10^{-4}

从仿真结果可以看出:

1) 基于位置混合 Gramian $\boldsymbol{W}_{CO}^P$ 和基于速度混合 Gramian $\boldsymbol{W}_{CO}^V$ 得到的降阶结果基本相同(曲线几乎重合),所以可以不用区分二者的区别,任选一个进行使用. 根据式(9)可知,$\boldsymbol{W}_{CO}^V$ 相对 $\boldsymbol{W}_{CO}^P$ 计算稍简单,所以本文推荐采用 $\boldsymbol{W}_{CO}^V$ 用于二阶系

统保结构降阶.

基于混合 Gramian 矩阵的二阶保结构降阶可以达到与传统一阶内平衡降阶几乎一致的降阶精度,而且由于保留了原系统的动力学结构,降阶精度在低频段(<0.1Hz)明显优于传统的一阶内平衡降阶.

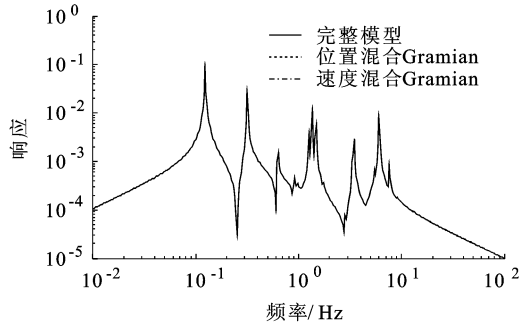


图 1 频率响应

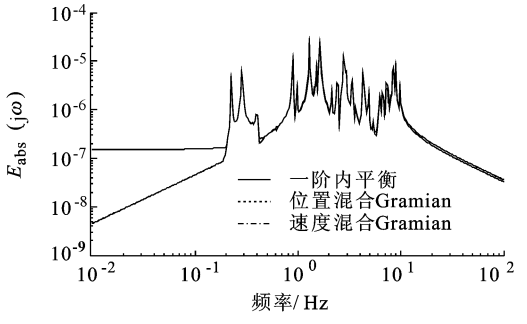


图 2 降阶绝对误差

为了进一步验证本文得到的 Sylvester 方程闭合解的求解效率,下面以式(1)为出发点,将某柔性航天器模型截断成不同规模,利用本文方法和 Matlab6.5 中的计算函数 lyap.m 分别求解由式(3)定义的 Sylvester 方程.仿真平台的硬件配置为 Pentinum4 3.0GHz CPU 和 1G 内存.计算结果为 10 次计算的平均值.结果如表 2 所示.

表 2 Sylvester 方程求解时间

自由度	计算时间/s	
	Matlab6.5 方法	本文方法
90	0.1410	0.1410
154	0.4690	0.3120
234	1.9680	0.6570
364	9.2970	1.4840
448	17.3590	2.2500
592	39.5150	3.9220

从计算结果可以看出,随着模型自由度的增加,本文方法的计算速度相比 Matlab 方法提升效果越明显.对于自由度约为 600 的模型,速度提升达到了 10 倍.因此,对于特殊对角形式的二阶柔性航天器动力学模型,采用本文给出的闭合解可以大幅度提升降阶计算效率.

5 结 论

对于输入输出维数相等的系统,混合 Gramian $\boldsymbol{W}_{CO}$ 可以取代传统内平衡降阶方法中可控和可观 Gramian 乘积 $\boldsymbol{W}_C\boldsymbol{W}_O$ 的作用,对系统模态进行可控和可观测性度量,从而进行模型降阶.对于采用系统模态坐标表示的解耦二阶柔性空间结构动力学方程,$\boldsymbol{W}_{CO}$ 存在闭合解析解,采用该闭合解进行降阶可以大幅度提高降阶计算速度.

但是,文中所提出的方法目前只适用于输入输出维数相等的系统,对于输入输出维数不等的系统,如何构造输入输出维数相等且与原系统频率响应一致的增广系统,是进一步需要研究的问题.

参考文献(References)

[1] Moore B C, Principal component analysis in linear system: controllability, observability and model reduction[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26(1): 17-32

[2] Fernando K, Nicholson H. On the structure of balanced and other principal representations of SISO systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1983, 28(2):228-231

[3] Fernando K, Nicholson H. On the cross-Gramian for symmetric MIMO systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1985, 32(5): 487- 489

[4] Sorensen D C, Antoulas A C. The Sylvester equation and approximate balanced reduction[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2002, 351(2):671-700

[5] Meyer D G, Srinivasan S. Balancing and model reduction for second-order form linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1996, 41(11): 1632-1644

[6] Safonov M G, Chiang R Y. A schur method for balanced model reduction[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, 34(7): 729-733

[7] Chahlaoui Y, Dooren P V. A collection of benchmark examples for model reduction of linear time invariant dynamical systems[R]. SLICOT Working Note 2002-2, 2002

(责任编辑:张 嵘)