燃料受限的时间最优多脉冲交会问题

刘 滔 赵育善

(北京航空航天大学 宇航学院，北京 100191)

摘 要：主要研究了时间最优多脉冲交会问题中最优交会时间和最优脉冲数随各因素的变化规律.建立了考虑路径约束的数学模型，并利用遗传算法对问题进行了求解.在此基础上通过大量的数值计算研究了共面圆轨道间交会问题中各因素(包括轨道半径比、初始相位差、燃料以及路径约束)对最优交会时间和最优脉冲次数的影响，并总结出了最优交会时间和最优脉冲数随各因素的变化规律.根据最优交会时间随各因素变化的曲线较为“平缓”(均为单调或只有一个极值)的事实，指出可以利用较少的特征点通过插值的方法来快速求解最优交会策略.结论对于空间营救和在轨规避等实际任务的轨道设计具有一定的参考价值.

关 键 词：轨道交会；时间最优；遗传算法；路径约束

中图分类号：V 448.234

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2009)04-0476-04

Time-optimal fuel-fixed orbital rendezvous with multiple impulses

Liu Tao Zhao Yushan

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Minimum-time, impulsive, fuel-fixed orbital rendezvous problem with path constraints was modeled and saluted with genetic algorithms. For several initial phase angles of the target relative to the vehicle, optimal solutions were obtained for a range of fixed-fuel consumptions and terminal radius, besides the influences of path constraints on the solutions were also considered. Finally, the rules how optimal numbers of impulses changing with these factors were determined. The results obtained can be used in missions with fuel and path constraints, such as space rescue operations and avoidance maneuvers.

Key words: orbital rendezvous; time-optimal; genetic algorithms; path constraints

为实现近地空间中的空间营救、在轨规避等任务，航天器需要进行远程快速交会.与常规交会任务不同，这些任务通常更强调航天器在燃料允许的情况下，尽可能快地完成交会任务.多脉冲机动是实现交会的一种常用机动方式，其核心问题是脉冲次数的选取以及脉冲序列的规划.

针对多脉冲最优轨道交会问题国内外进行过详细的研究.早期，人们采用最优控制理论对燃料最优的多脉冲交会问题进行了详细的讨论[1-3]，但其结论是否适用于时间最优问题还有待研究.由于远距离交会问题求解困难，遗传算法以其全局寻优能力强的优点越来越多的被引入到最优多脉冲交会问题的研究中.文献[4-6]采用遗传算法对不同情况下的多脉冲最优机动问题进行了求解，但都没有很好地给出最优脉冲次数的确定方法.

为此，本文首先将燃料消耗受限、轨道高度受约束的时间最优多脉冲机动问题转化为一个常规的无约束优化问题，然后采用遗传算法求解上述问题，并在此基础上对共面圆轨间的时间最优交会情况进行了详细分析，总结出了最优交会时间以及最优脉冲数的变化规律.

1 问题的数学描述

收稿日期：2008-04-16

作者简介：刘 滔(1981—)，男，湖南浏阳人，博士生，nergnayuil@126.com.

1.1　状态方程及目标函数

航天器在初始时刻 t_0 和终端时刻 t_f 时的状态分别为"$\boldsymbol{r}_0$,$\boldsymbol{v}_0$"和"$\boldsymbol{r}_f$,$\boldsymbol{v}_f$",忽略摄动影响,则有

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}} &= -\mu\boldsymbol{r}/r^3\\ \dot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{v}\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

设在 t_i 时刻主动航天器产生了一个 $\Delta\boldsymbol{v}_i$ 的速度脉冲.以上标"−"表示脉冲作用前的状态,"+"表示脉冲作用后的状态,则整个过程中各状态满足式(2)[4].式中 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 为方程(1)的解函数,可通过轨道根数理论和坐标变换得到.

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_i^+ &= \boldsymbol{r}_i^-\\ \boldsymbol{r}_f &= \boldsymbol{r}_n^-\\ t_f &= t_n\\ \boldsymbol{v}_i^+ &= \boldsymbol{v}_i^- + \Delta\boldsymbol{v}_j\\ \boldsymbol{v}_f &= \boldsymbol{v}_n^- + \Delta\boldsymbol{v}_n\\ \boldsymbol{r}_{i+1}^- &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_i^+,\boldsymbol{v}_i^+,t_i,t_{i+1})\\ \boldsymbol{v}_{i+1}^- &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_i^+,\boldsymbol{v}_i^+,t_i,t_{i+1})\\ \boldsymbol{r}_1^- &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{v}_0,t_0,t_1)\\ \boldsymbol{v}_1^- &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{v}_0,t_0,t_1)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中,$i=1,2,\cdots,n-1$.

航天器在交会过程中时间花费最少可描述为

$$J = t_f \rightarrow \min \tag{3}$$

1.2　边界条件

为方便描述,分别采用下标"m"和"t"来表示主动航天器和被动航天器.则主动航天器在初始时刻和终端时刻的状态满足:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_m(t_0) &= \boldsymbol{r}_{m0}\\ \boldsymbol{v}_m(t_0) &= \boldsymbol{v}_{m0}\\ \boldsymbol{r}_m(t_f) &= \boldsymbol{r}_{tf} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_{t0},\boldsymbol{v}_{t0},t_0,t_f)\\ \boldsymbol{v}_m(t_f) &= \boldsymbol{v}_{tf} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_{t0},\boldsymbol{v}_{t0},t_0,t_f)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

由式(4)可知,对于多脉冲交会问题,当各次脉冲的作用时间和前 $n-2$ 次脉冲的方向及大小确定后,后两次脉冲的大小和方向可通过 Lambert 理论求得[4].因此,整个问题中的独立变量为各次脉冲的作用时间 $t_i(i=1,2,\cdots,n)$ 及前 $n-2$ 次速度脉冲矢量 $\Delta\boldsymbol{v}_i(i=1,2,\cdots,n-2)$.

1.3　约束条件及其处理

整个过程中,主动航天器需满足的约束有:总的燃料消耗量等于给定值;在机动过程中主动航天器的轨道高度不小于给定值 $h_{\min}$(即机动过程中始终处于大气层外).数学形式为

$$\left.\begin{aligned}\|\boldsymbol{r}_m\| &\geqslant R_e + h_{\min}\\ \sum\|\Delta\boldsymbol{v}_i\| &= \Delta v_{sum}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中,Δv_{sum} 为各次速度脉冲之和的上限;R_e 为地球半径.

第 1 个约束条件判断如下,设第 i 次机动后的真近点角为 θ_1,第 $i+1$ 次机动前的真近点角为 θ_2.根据 r 与 θ 间的关系,可得航天器从 θ_1 到 θ_2 的过程中离地心最近的距离为

$$r_{\min} = \begin{cases} a(1-e) & \theta_2 < \theta_1 \text{ 或 } \Delta t_i > 2\pi\sqrt{a^3/\mu}\\ \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\ \max[\cos\theta_1,\cos\theta_2]} & \text{其他}\end{cases}$$

因此只需判断各次脉冲间的 $r_{\min}$ 是否大于 $R_e+h_{\min}$.第 2 个条件在得出满足边界条件的脉冲序列后,可根据各次脉冲大小进行判断.

为方便求解,用罚函数的方法将原带约束优化问题转化为无约束优化问题,如式(6),其中 C_1 和 C_2 为合适的常值.尽管式(6)中 $N_2=0$ 的前提并不是 $\sum\|\Delta\boldsymbol{v}_i\| = \Delta v_{sum}$,但根据文献[2]等的结论"$\sum\|\Delta\boldsymbol{v}_i\|$ 是关于 t_f 递减的"[2],则全局最优解对应的 $\sum\|\Delta\boldsymbol{v}_i\|$ 必定等于 Δv_{sum}.因此,这样处理既能保证所得的解满足约束条件,又能使求解过程始终向着目标函数减小的方向进行.

$$\left.\begin{aligned}J' &= t_f + C_1N_1 + C_2N_2\\ N_1 &= \begin{cases}0 & r_{i\min} \geqslant R_e + h_{\min}\\ \exp(\max(R_e + h_{\min} - r_{i\min})) & r_{i\min} < R_e + h_{\min}\end{cases}\\ N_2 &= \begin{cases}0 & \sum_{i=1}^{n}\|\Delta\boldsymbol{v}_i\| \leqslant \Delta v_{sum}\\ \exp\left(\Delta v_{sum} - \sum_{i=1}^{n}\|\Delta\boldsymbol{v}_i\|\right) & \sum_{i=1}^{n}\|\Delta\boldsymbol{v}_i\| > \Delta v_{sum}\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

2　共面圆轨间的时间最优交会

采用遗传算法[5-6]求解不同情况下共面圆轨间的燃料固定时间最优交会问题,然后由计算结果总结出最优交会时间 t_f 和最优脉冲次数 N_{op} 随各影响因素变化的规律.

考虑如下因素对 t_f 和 N_{op} 的影响:路径约束、轨道半径比 R、相位夹角 $\Delta\beta$、各次速度脉冲之和的上限 Δv_{sum}.其中 R,$\Delta\beta$ 和 $h_{\min}$ 的定义如图 1 所示.文中各因素的取值范围分别为 $R\in[1.07,1.42]$;$\Delta\beta\in[-\pi,\pi]$;$\Delta v_{sum}\in[0.22v_m,0.82v_m]$.

本文首先研究了不考虑路径约束时 N_{op} 和 t_f 随各因素的变化规律,然后将考虑路径约束时的结果与之对比,且在整个研究过程中舍弃了耗时较多的多圈 Lambert 交会情况.

2.1　相位夹角 $\Delta\beta$ 的影响

给定 R 和 Δv_{sum} 并忽略路径约束时,不同脉

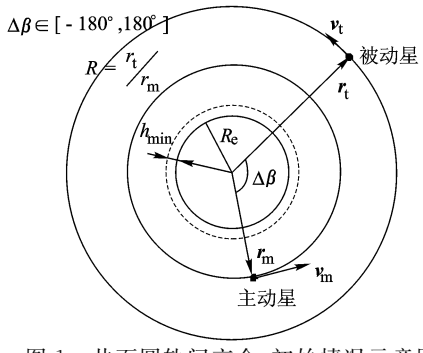

图1 共面圆轨间交会,初始情况示意图

冲数对应的 t_f 随 $\Delta\beta$ 的变化规律见图2. 其中 $R=8/7$,考虑到目前航天器的机动能力 $\Delta v_{sum}=0.265v_m$(主动星的初始轨道半径取 7 000 km,$0.265v_m$ 为 2 km/s).

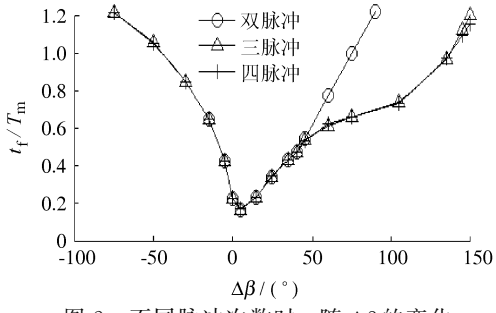

图2 不同脉冲次数时 t_f 随 $\Delta\beta$ 的变化

由于在计算过程中没有限制两次脉冲的最小间隔时间和脉冲速度的下限,造成当不同脉冲数的最优解相等时,高脉冲次数的最优解本质上只是低脉冲次数最优解的另一种表现形式. t_f 超过 $1.2T_m$ 的情况被视为无解,在图中没有表示出来. 结合图2不难发现:

1) 不同脉冲次数的 t_f-$\Delta\beta$ 曲线均呈"v"型,且所有曲线最小值相同,对应的 $\Delta\beta$ 也相同,均为 $\Delta\beta_{min}$. $\Delta\beta<\Delta\beta_{min}$ 时,t_f 关于 $\Delta\beta$ 单调递减;$\Delta\beta>\Delta\beta_{min}$ 时,t_f 关于 $\Delta\beta$ 单调递增.

2) 双脉冲曲线和三、四脉冲曲线存在两个分离点 $\Delta\beta_{d1}$ 和 $\Delta\beta_{d2}$. $\Delta\beta<\Delta\beta_{d2}$ 时,双脉冲没有 t_f 小于 T_t(被动星轨道周期,本算例中约为主动星轨道周期 T_m 的1.2倍)的解,且三、四脉冲的解近似相等,因此,三脉冲最优;同样可得,$\Delta\beta_{d2}<\Delta\beta<\Delta\beta_{d1}$ 时,双脉冲最优;当 $\Delta\beta>\Delta\beta_{d1}$ 时,三脉冲最优,但当 $\Delta\beta$ 接近150°时四脉冲最优. 因此,N_{op} 随 $\Delta\beta$ 的分布规律是以 $\Delta\beta_{min}$ 为中心,离其越远 N_{op} 越大.

3) $\Delta\beta>\Delta\beta_{d1}$ 时,双脉冲的 t_f 与 $\Delta\beta$ 近似成正比.

2.2 轨道半径比 R 的影响

取 $r_m=7\ 000$ km, $\Delta v_{sum}=0.265v_m$,研究在忽略路径约束的情况下,t_f 和 N_{op} 随 R 的变化规律. 计算结果见图3,结合图2,可发现如下规律:

1) 尽管 R 的不同,但 t_f 随 $\Delta\beta$ 的变化规律仍为先减小后增加呈"v"型,只是随着 R 的增加,t_f 关于 $\Delta\beta$ 变化的速率增大.

2) R 变化不影响 N_{op} 的分布,其结果仍与图2相同,即离 $\Delta\beta_{min}$ 越远其对应的 N_{op} 越大;不存在 N_{op} 等于4的情况.

3) $\Delta\beta>\Delta\beta_{min}$ 时,N_{op} 随 R 的增加而减小,当 $\Delta\beta<\Delta\beta_{min}$ 时,情况刚好相反.

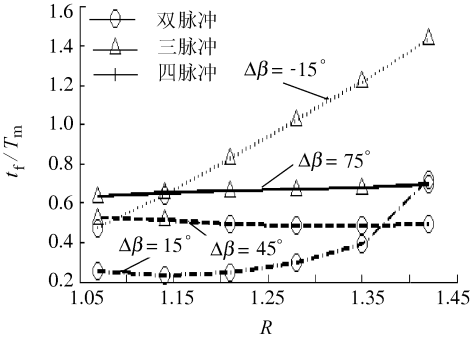

图3 t_f 和 N_{op} 随 R 的变化

2.3 各次速度脉冲大小之和的上限 Δv_{sum} 的影响

取 $R=1.2$,其它条件不变,研究不同 $\Delta\beta$ 对应的 t_f 随 Δv_{sum} 的变化情况. 计算结果如图4所示.

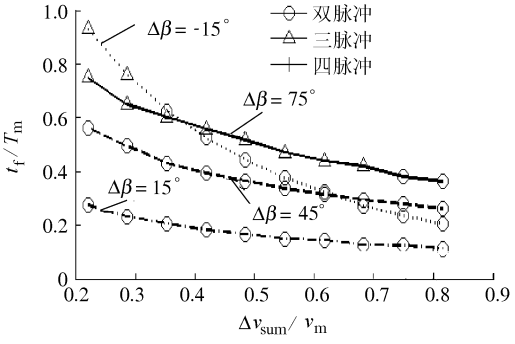

图4 t_f 和 N_{op} 随 Δv_{sum} 的变化

由图可知:

1) 图中结果印证了结论"可用燃料越多,进行机动所需耗费的时间越少"[2].

2) 对于不同的 Δv_{sum},t_f 关于 $\Delta\beta$ 的变化曲线仍保持"v"型. $\Delta\beta_{min}$ 随 Δv_{sum} 的增加而减小.

3) 对于不同的 Δv_{sum},N_{op} 仍满足离 $\Delta\beta_{min}$ 越远越大的规律,且随着 Δv_{sum} 的增加 N_{op} 减少(可从 $\Delta\beta=-15°$,75°对应的曲线明显看出);不存在 N_{op} 等于4的情况.

2.4 约束的影响

在考虑路径约束的情况下(h_{min} 取 200 km),其他条件不变,研究2.1~2.3中算例. 结果如图5~图7所示(图7中无解表示无法找到 t_f 小于 T_t 的解).

分别比较图 5～图 7 和图 2～图 4 可以看出:

1) 路径约束不改变 t_f 和 N_{op} 随各因素变化的趋势.

2) 在特定情况下(一般当 $\Delta\beta>\Delta\beta_{dl}$ 时),路径约束会使最优交会策略所消耗的时间 t_f 增加.

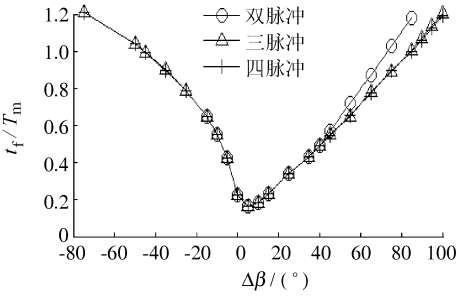

图 5　t_f 随 $\Delta\beta$ 的变化

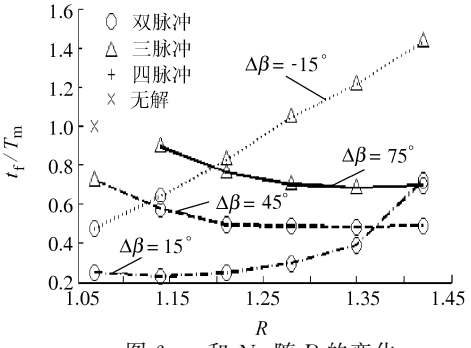

图 6　t_f 和 N_{op} 随 R 的变化

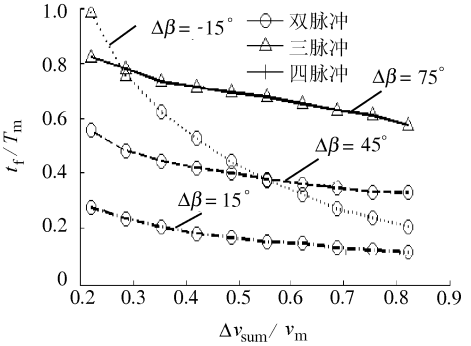

图 7　t_f 和 N_{op} 随 Δv_{sum} 的变化

2.5　小　结

通过对以上算例研究可以总结出在共面圆轨间燃料受限的时间最优多脉冲交会问题中:

1) 只有在燃料相对不足(给定 Δv_{sum},R 和 $\|\Delta\beta-\Delta\beta_{min}\|$ 较大)的情况下,更多的脉冲数才有利于时间最优交会,且一般情况下最优脉冲数 $N_{op}\leqslant 4$.

2) t_f 关于 $\Delta\beta$ 的变化曲线呈"v"型.尽管 R,Δv_{sum} 以及路径约束的存在对 t_f 有影响,但不会改变 t_f 随 $\Delta\beta$ 的变化趋势.

3) 在各因素的影响下,t_f 的变化较为"平缓"(各曲线不是单调就是单极值),因此只需较少的特征点即可用插值的方法快速得出最优交会策略.

3　结　论

本文引入遗传算法详细分析了共面圆轨间燃料受限的时间最优多脉冲交会问题.通过大量的算例得到了无路径约束情况下最优脉冲次数和最优交会时间随相位夹角、轨道半径比以及可用总速度脉冲的变化曲线,并与存在路径约束的结果进行了对比.得出在一般情况下,共面圆轨间的时间最优交会最多需要 4 次脉冲的结论.由于最优交会时间随各影响因素变化平缓,故可用较少的特征点进行插值,以快速求解最优交会策略.以上结论和设想对于问题的进一步研究以及空间营救和在轨规避等具体工程任务的轨道设计具有一定的参考意义.

参考文献(References)

[1] Lawden D F. Optimal trajectories for space navigation [M]. London: Butterworths, 1963:60－68

[2] Prussing J E, Chiu J H. Optimal multiple-impulse time-fixed rendezvous between circular orbits [J]. Journal of Guidance, 1986, 9(1):17－22

[3] Taur D R, Victoria C C, Prussing J E. Optimal impulsive time-fixed orbital rendezvous and interception with path constraints[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1995, 18(1):54－60

[4] Luo Y Z, Lei Y J, Tang G J. Optimal multi-objective liberalized impulsive rendezvous [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(2):383－389

[5] 陈统,徐世杰. 基于遗传算法的最优 Lambert 双脉冲转移[J].北京航空航天大学学报,2007,33(3):273－277
Chen Tong, Xu Shijie. Optimal Lambert two-impulse transfer using genetic algorithm [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 33(3): 273－277(in Chinese)

[6] 卢山,陈统,徐世杰. 基于自适应模拟退火遗传算法的最优 Lambert 转移[J]. 北京航空航天大学学报,2007,33(10):1191－1195
Lu Shan, Chen Tong, Xu Shijie. Optimal Lambert transfer based on adaptive simulated annealing genetic algorithm [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 33(10): 1191－1195(in Chinese)

(责任编辑:张　嵘)