基于对偶原理的二子样划船补偿算法

余 杨 张洪钺

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘 要: 划船补偿算法一般以典型划船运动为基础,利用最优化理论来进行推导. 圆锥补偿算法不仅可利用最优化理论,还可利用 Goodman-Robinson理论进行推导. 利用对偶原理,将 Goodman-Robinson理论下得到的二子样修正圆锥补偿算法推广至划船补偿算法设计中,得到一种改进的二子样划船补偿算法. 在典型划船运动条件下,对得到的划船补偿算法进行了数字仿真,并与二子样优化划船补偿算法进行了对比研究. 仿真结果表明,此改进二子样划船补偿算法能提高速度更新精度.

关 键 词: 划船运动;对偶原理;圆锥补偿算法;划船补偿算法

中图分类号: U 666. 12

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2009)03-0326-04

Two interval sculling compensation algorithm based on duality principle

Yu Yang Zhang Hongyue

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The sculling compensation algorithms are designed generally using minimal error theory, under the typical sculling motion. The coning compensation algorithms can be designed using Goodman-Robinson finite rotations theory besides minimal error theory. An two intervals accurate sculling compensation algorithm was deduced based on duality principle and two intervals correct coning compensation algorithm which was obtained using Goodman-Robinson finite rotations theory. Under the typical sculling motion, some digital simulations about this new algorithm were completed and some comparisons with two intervals optimum sculling compensation algorithm were taken. The simulation results show that the new two intervals sculling compensation algorithm has fine accuracy.

Key words: sculling motion; duality principle; coning compensation algorithm; sculling compensation algorithm

当载体的两个或两个以上的轴同时发生高频角运动和线运动时,载体运动类似于在波浪翻滚的水中,用单桨划动船向前行进的运动,因此将其定义为划船运动. 在导航算法中如对划船运动处理不当,将会导致速度出现整流误差. 划船补偿算法就是针对这一问题而产生的. 划船补偿算法一般以典型划船运动(即载体的两正交轴同时发生同频同相位的角振动和线振动)为基础,利用最优化理论来进行推导[1];或者从圆锥补偿优化算法出发,利用对偶原理[2],得到划船补偿优化算法,经验证它与直接利用优化理论得到的算法一致[3]. 由于圆锥补偿算法不但可以采用最优化理论进行推导,还可以从 Goodman-Robinson(G-R)定理出发进行推导. 因此本文同样利用对偶原理[2-3],将通过 Goodman-Robinson理论推导得到的二子样圆锥补偿修正算法[4]扩展到划船补偿算法中,并得到一种二子样划船补偿修正算法.

1 对偶原理及 G-R定理

设矢量 $U_1 = \int (V_1 \times v_1)\,dt$,其中 $V_1 = \int v_1\,dt$,

收稿日期: 2008-03-18

基金项目: 国家安全重大基础研究资助项目(61334)

作者简介: 余 杨(1982-),女,江西南昌人,博士生, yuyang@asee.buaa.edu.cn.

v_1为任意矢量,且令 $\hat{U}_1$ 为 U_1的数值积分解向量.设矢量 U_2与 U_1具有相同的数学形式,即 $\int(V_2 \times v_2)\,dt$,其中 $V_2 = \int v_2\,dt$, v_2为任意矢量,且令 $\hat{U}_2$ 为 U_2的数值积分解向量.

此时,若用 v_2代替 U_1中 v_1,则有等式 $U_1 = U_2$;同样若用 v_2代替 $\hat{U}_1$ 中 v_1,则有等式 $\hat{U}_2 = \hat{U}_1$.

设矢量 U_3也与 U_1具有相同的数学形式,即 $U_3 = \int(V_3 \times v_3)\,dt$,其中 $V_3 = \int v_3\,dt$,但此时 $v_3 = v_1 + v_2$,则 $V_3 = \int(v_1 + v_2)\,dt = V_1 + V_2$,且令 $\hat{U}_3$ 为 U_3的数值积分解向量.

假设矢量

$$U_4 = U_3 - U_2 - U_1 = \int(V_1 \times v_2)\,dt + \int(V_2 \times v_1)\,dt \tag{1}$$

将各矢量的数值积分解向量代入式 (1),则有

$$\hat{U}_4 = \hat{U}_3 - \hat{U}_2 - \hat{U}_1 \tag{2}$$

其中,$\hat{U}_4$ 为 U_4的数值积分解向量.

当 $\hat{U}_1$ 的表达式已知时,只需将 $\hat{U}_1$ 中的 v_1替换成 v_2即得 $\hat{U}_2$,将 $\hat{U}_1$ 中的 v_1替换成 v_3即得 $\hat{U}_3$,最终得到 $\hat{U}_4$ 的表达式.

G-R定理　具有确定 3个正交轴的刚体作任意运动,其等效转动矢量 Φ 在 i轴的分量 Φ_i与刚体运动角速度 ω的分量 ω_i之间有如下关系:

$$\Phi_i = \int_{t_0}^{t_f} \omega_i\,dt + A_i \tag{3}$$

其中,A_i为刚体运动时 i轴在单位球面上的运动轨迹和连接该运动轨迹两端点的最短圆弧所组成闭合曲线截得的单位球面上的面积.

2　圆锥误差与划船误差的对偶关系

假设圆锥运动下导航系统采用传统的单步增量算法来进行姿态更新,则在第 m 步更新时,姿态所产生的圆锥误差 $\delta\Phi_m$为[5]

$$\delta\Phi_m = \int_{t_m}^{t_m} \frac{1}{2}[\Phi(t) \times \omega]\,dt + \int_{t_m}^{t_m} \frac{1}{\Phi^2}\left[1 - \frac{\Phi(1+\cos\Phi)}{2\sin\Phi}\right]\Phi(t) \times (\Phi(t) \times \omega)\,dt \tag{4}$$

其中,$\Phi(t)$为载体的旋转矢量,可近似等于角增量 $\Delta\theta(t) = \int_{t_m}^{t} \omega\,dt$,$\Phi$ 为 $\Phi(t)$ 的模值;ω为载体运动角速度.

当载体的旋转矢量为小量时,可将式 (4)等号右侧的第二项忽略,则式 (4)可简化为

$$\delta\Phi_m = \frac{1}{2}\int_{t_m}^{t_m}[\Delta\theta(t) \times \omega]\,dt \tag{5}$$

假设划船运动下导航系统采用传统的单步增量算法来进行速度更新,则在第 m 步更新时,速度所产生的划船误差 δv_m为[6]

$$\delta v_m = \frac{1}{2}\int_{t_m}^{t_m}[\Delta\theta(t) \times f + \Delta v(t) \times \omega]\,dt \tag{6}$$

其中,f为载体运动的比力;$\Delta v(t) = \int_{t_m}^{t} f\,dt$为速度增量.

将圆锥误差 $\delta\Phi_m$的表达式定义为 U_1,划船误差 δv_m的表达式定义为 U_4,即

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_{t_m}^{t_m}[\Delta\theta(t) \times \omega]\,dt \tag{7}$$

$$U_4 = \frac{1}{2}\int_{t_m}^{t_m}[\Delta\theta(t) \times f + \Delta v(t) \times \omega]\,dt \tag{8}$$

此外定义 U_2,U_3的表达式为

$$U_2 = \frac{1}{2}\int_{t_m}^{t_m}[\Delta v(t) \times f]\,dt \tag{9}$$

$$U_3 = \frac{1}{2}\int_{t_m}^{t_m}\{[\Delta\theta(t) + \Delta v(t)] \times (\omega + f)\}\,dt \tag{10}$$

通过计算,可得等式

$$U_4 = U_3 - U_2 - U_1 \tag{11}$$

利用式 (2)可得数值积分结果 $\delta\hat{v}_m$ 的表达式

$$\delta\hat{v}_m = \hat{U}_4 = \hat{U}_3 - \hat{U}_1 - \hat{U}_2 = \hat{U}_3 - \delta\hat{\Phi}_m - \hat{U}_2 \tag{12}$$

为求得 $\delta\hat{v}_m$ 的表达式,首先需要知道 $\delta\hat{\Phi}_m$ 的表达式.

3　二子样划船补偿修正算法

现已知二子样修正圆锥算法表达式为

$$\delta\hat{\Phi}_m = \begin{bmatrix} \delta\hat{\Phi}_{mx} \\ \delta\hat{\Phi}_{my} \\ \delta\hat{\Phi}_{mz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3} + s_1 P_x + t_1 P_x^2\right)(\Delta\theta_{1y}\Delta\theta_{2z} - \Delta\theta_{2y}\Delta\theta_{1z}) \\ \left(\frac{2}{3} + s_2 P_y + t_2 P_y^2\right)(\Delta\theta_{1z}\Delta\theta_{2x} - \Delta\theta_{2z}\Delta\theta_{1x}) \\ \left(\frac{2}{3} + s_3 P_z + t_3 P_z^2\right)(\Delta\theta_{1x}\Delta\theta_{2y} - \Delta\theta_{2x}\Delta\theta_{1y}) \end{bmatrix} \tag{13}$$

其中，s_i，t_i $(i = 1, 2, 3)$为修正算法系数；$\Delta\theta_1 = [\Delta\theta_{1x} \quad \Delta\theta_{1y} \quad \Delta\theta_{1z}]^{\mathrm{T}}$，$\Delta\theta_2 = [\Delta\theta_{2x} \quad \Delta\theta_{2y} \quad \Delta\theta_{2z}]^{\mathrm{T}}$分别为一个姿态更新周期内陀螺的两次角增量采样输出；

$$P_x = \frac{(\Delta\theta_{1y} - \Delta\theta_{2y})^2 + (\Delta\theta_{1z} - \Delta\theta_{2z})^2}{(\Delta\theta_{1y} + \Delta\theta_{2y})^2 + (\Delta\theta_{1z} + \Delta\theta_{2z})^2}$$

$$P_y = \frac{(\Delta\theta_{1x} - \Delta\theta_{2x})^2 + (\Delta\theta_{1z} - \Delta\theta_{2z})^2}{(\Delta\theta_{1x} + \Delta\theta_{2x})^2 + (\Delta\theta_{1z} + \Delta\theta_{2z})^2}$$

$$P_z = \frac{(\Delta\theta_{1x} - \Delta\theta_{2x})^2 + (\Delta\theta_{1y} - \Delta\theta_{2y})^2}{(\Delta\theta_{1x} + \Delta\theta_{2x})^2 + (\Delta\theta_{1y} + \Delta\theta_{2y})^2}$$

参考对偶性原理，可得

$$\hat{U}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + s_1 Q_x + t_1 Q_x^2 \quad (\Delta v_{1y}\Delta v_{2z} - \Delta v_{2y}\Delta v_{1z}) \\ \frac{2}{3} + s_2 Q_y + t_2 Q_y^2 \quad (\Delta v_{1z}\Delta v_{2x} - \Delta v_{2z}\Delta v_{1x}) \\ \frac{2}{3} + s_3 Q_z + t_3 Q_z^2 \quad (\Delta v_{1x}\Delta v_{2y} - \Delta v_{2x}\Delta v_{1y}) \end{bmatrix} \tag{14}$$

其中，$\Delta v_1 = [\Delta v_{1x} \quad \Delta v_{1y} \quad \Delta v_{1z}]^{\mathrm{T}}$，$\Delta v_2 = [\Delta v_{2x} \quad \Delta v_{2y} \quad \Delta v_{2z}]^{\mathrm{T}}$分别为一个速度更新周期内加速度计的两次速度增量采样输出；

$$Q_x = \frac{(\Delta v_{1y} - \Delta v_{2y})^2 + (\Delta v_{1z} - \Delta v_{2z})^2}{(\Delta v_{1y} + \Delta v_{2y})^2 + (\Delta v_{1z} + \Delta v_{2z})^2}$$

$$Q_y = \frac{(\Delta v_{1x} - \Delta v_{2x})^2 + (\Delta v_{1z} - \Delta v_{2z})^2}{(\Delta v_{1x} + \Delta v_{2x})^2 + (\Delta v_{1z} + \Delta v_{2z})^2}$$

$$Q_z = \frac{(\Delta v_{1x} - \Delta v_{2x})^2 + (\Delta v_{1y} - \Delta v_{2y})^2}{(\Delta v_{1x} + \Delta v_{2x})^2 + (\Delta v_{1y} + \Delta v_{2y})^2}$$

另外

$$\hat{U}_3 = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3} + s_1 R_x + t_1 R_x^2\right) \quad (e_{1y}e_{2z} - e_{2y}e_{1z}) \\ \left(\frac{2}{3} + s_2 R_y + t_2 R_y^2\right) \quad (e_{1z}e_{2x} - e_{2z}e_{1x}) \\ \left(\frac{2}{3} + s_3 R_z + t_3 R_z^2\right) \quad (e_{1x}e_{2y} - e_{2x}e_{1y}) \end{bmatrix} \tag{15}$$

其中 $e_1 = [e_{1x} \quad e_{1y} \quad e_{1z}]^{\mathrm{T}} = \Delta v_1 + \Delta\theta_1$

$e_2 = [e_{2x} \quad e_{2y} \quad e_{2z}]^{\mathrm{T}} = \Delta v_2 + \Delta\theta_2$

$$R_x = \frac{(e_{1y} - e_{2y})^2 + (e_{1z} - e_{2z})^2}{(e_{1y} + e_{2y})^2 + (e_{1z} + e_{2z})^2}$$

$$R_y = \frac{(e_{1x} - e_{2x})^2 + (e_{1z} - e_{2z})^2}{(e_{1x} + e_{2x})^2 + (e_{1z} + e_{2z})^2}$$

$$R_z = \frac{(e_{1x} - e_{2x})^2 + (e_{1y} - e_{2y})^2}{(e_{1x} + e_{2x})^2 + (e_{1y} + e_{2y})^2}$$

将式(13)、式(14)和式(15)代入式(11)，可得到与二子样修正圆锥补偿算法对应的二子样划船补偿算法. 由于在典型划船运动中，$\Delta v_1 \times \Delta v_2 = \mathbf{0}$，$\Delta\theta_1 \times \Delta\theta_2 = \mathbf{0}$，则二子样划船补偿算法可简化为

$$\left.\begin{aligned} \delta\hat{v}_{mx} &= \left(\frac{2}{3} + s_1 R_x + t_1 R_x^2\right) \cdot \\ &(\Delta v_{1y}\Delta\theta_{2z} - \Delta v_{1z}\Delta\theta_{2y} + \Delta\theta_{1y}\Delta v_{2z} - \Delta\theta_{1z}\Delta v_{2y}) \\ \delta\hat{v}_{my} &= \left(\frac{2}{3} + s_2 R_y + t_2 R_y^2\right) \cdot \\ &(\Delta v_{1z}\Delta\theta_{2x} - \Delta v_{1x}\Delta\theta_{2z} + \Delta\theta_{1z}\Delta v_{2x} - \Delta\theta_{1x}\Delta v_{2z}) \\ \delta\hat{v}_{my} &= \left(\frac{2}{3} + s_3 R_y + t_3 R_y^2\right) \cdot \\ &(\Delta v_{1z}\Delta\theta_{2x} - \Delta v_{1x}\Delta\theta_{2z} + \Delta\theta_{1z}\Delta v_{2x} - \Delta\theta_{1x}\Delta v_{2z}) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中，R_x，R_y，R_z的定义如前所述. 由于此算法带有2项修正系数，所以定义此算法为二子样修正划船补偿算法.

二子样修正划船补偿算法的表达形式确定后，还需要确定修正算法系数的取值准则. 在二子样修正圆锥补偿算法中，修正算法系数求取的过程如下：假设 $P_i \ll 1$ $(i = x, y, z)$，利用 G-R 定理获得 A_i的表达式(即二子样修正圆锥补偿算法表达式)；然后通过计算机将算法表达式与 A_i的实际大小进行拟合，从而得到补偿算法系数的大小[4].

将求得的算法系数引入到二子样划船补偿修正算法中，并规定：当 $R_x < n$ $(n < 1)$时，$s_1 = 0.1330$，$t_1 = 0.01478$，$s_1 = 0.1336$，$t_1 = -0.01992$；当 $R_x \geq n$时，$s_1 = t_1 = 0$. 当 $R_y < n$时，s_2，t_2的取值同 s_1，t_1；当 $R_y \geq n$时，$s_2 = t_2 = 0$. 当 $R_z < n$时，s_3，t_3的取值同 s_1，t_1；当 $R_z \geq n$时，$s_3 = t_3 = 0$.

n的取值一定程度上决定了二子样修正划船补偿算法的补偿精度. n过小，则无法显现修正算法的优势；n过大，则会出现过补偿情况. 本文选取 $n = 0.5$作为判断依据.

4 数字仿真

经典划船运动的表达式为

$$\omega = [0 \quad a\Omega\cos\Omega t \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

$$f = [b\Omega\sin(\Omega t + c) \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

其中，a为角振动幅度，rad；b为线振动时的速度幅度，m/s；Ω为振动角速度，rad/s；c为振动相位差，rad

现定义二子样最优划船补偿算法 $\delta\hat{v}_m = 2/3 \cdot (\theta_1 v_2 + v_1\theta_2)$为算法 1；取 $s_i = 0.1330$，$t_i = 0.01478$ $(i = x, y, z)$为算法 2；取 $s_i = 0.1336$，$t_i = -0.01992$ $(i = x, y, z)$为算法 3

仿真条件 1：$a = \pi/180$ rad，$b = 10$ m/s，$\Omega =$

26π rad/s, c在 0～π/2间变化,更新周期 0.01 s,分别采用上述 3种算法计算,得到速度误差图形(见图 1).

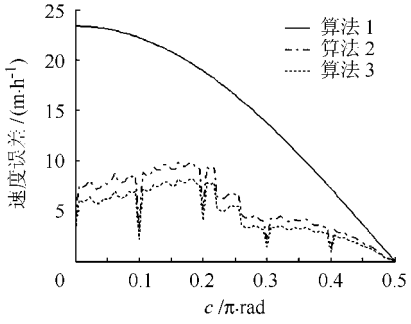

图 1　速度误差随相位差变化曲线

仿真条件 2: a =π/180 rad, b = 10 m/s, c = 0, Ω在 2π～60π rad/s间变化,更新周期 0.01 s,分别采用上述 3种算法计算,得到速度误差图形(见图 2).

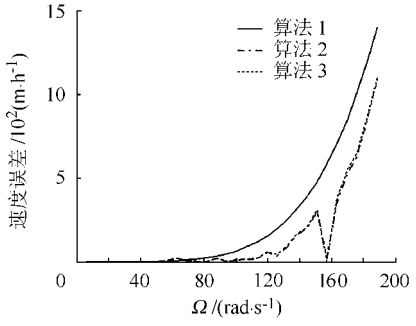

图 2　速度误差随振动频率变化曲线

仿真条件 3: b = 10 m/s, c = 0, Ω = 26π rad/s, a在 0～10π/180 rad间变化,更新周期 0.01 s,分别采用上述 3种算法计算,得到速度误差图形(见图 3).

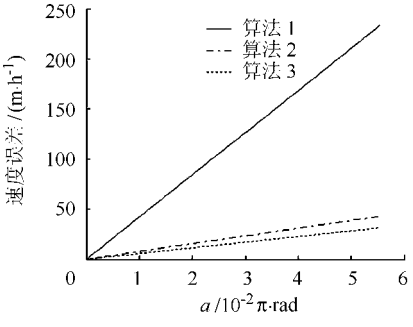

图 3　速度误差随角振动幅度变化曲线

仿真条件 4: a =π/180 rad, c = 0, Ω = 26π rad/s, b在 0～100 m/s间变化,更新周期 0.01 s,分别采用上述 3种算法计算,得到速度误差图形(见图 4).

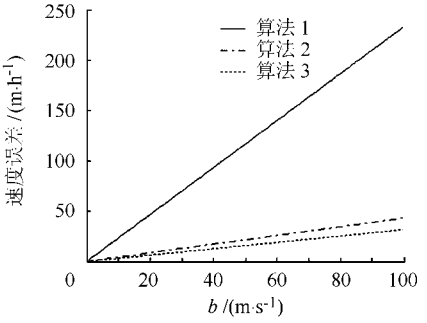

图 4　速度误差随线振动速度幅度变化曲线

由图 1～图 4可以看出:算法 2, 3的解算精度明显高于算法 1;算法 3的精度稍高于算法 2的精度.

5　结　论

本文利用对偶原理以及圆锥误差和划船误差间的关系,以二子样修正圆锥补偿算法为基础对二子样修正划船补偿算法进行了详细的推导.将得到的速度算法进行了数字仿真并与二子样优化划船补偿算法进行了对比研究.仿真结果表明:①二子样修正划船补偿算法的补偿精度高于优化算法补偿精度;②修正算法系数选择不同时,修正算法补偿精度有所不同,算法 3(系数采用第 2种)的补偿精度稍高于算法 2(系数采用第 1种)的补偿精度.

参考文献 (References)

[1] 耿延睿,王养柱,崔中兴.捷联惯导系统划船效应补偿算法研究[J].北京航空航天大学学报,2001,27(6):694 - 698
Geng Yanrui, Wang Yangzhu, Cui Zhongxing. Optimal design for on sculling algorithms of SINS [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2001, 27(6): 694 - 698 (in Chinese)

[2] Roscoe K M. Equivalency between strapdown inertial navigation coning and sculling integrals/algorithms [J]. Journal of Guidance and Control and Dynamics, 2001, 24(2): 201 - 205

[3] 张玲霞,陈明,曹晓青.基于对偶性原理捷联惯导划船误差补偿优化算法[J].中国惯性技术学报,2003,11(5):33 - 38
Zhang Lingxia, Chen Ming, Cao Xiaoqing. Sculling compensation algorithms in strapdown inertial navigation system [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2003, 11(5): 33 - 38 (in Chinese)

[4] 余杨,张洪钺.高精度捷联姿态算法设计[J].中国惯性技术学报,2008,16(1):39 - 43
Yu Yang, Zhang Hongyue. Design for an accurate strapdown attitude algorithm [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(1): 39 - 43 (in Chinese)

[5] Bortz J E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1971, 7(1): 61 - 66

[6] Yu Yang, Zhang Hongyue. Precision analysis and comparison of sculling compensation algorithms [C] // Fang Jiancheng, Wang Zhongyu. 6th ISICT: Sensors, Automatic Measurement, Control, and Computer Simulation. Beijing: SPIE-The International Society for Optical Engineering, 2006: 63583E1 - 7

(责任编辑:娄　嘉)