Roe格式中不同类型熵修正性能分析

周 禹 阎 超

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 针对 Roe格式中较为流行的 3类熵修正: Muller型、Harten-Yee型和 Harten-Hyman型熵修正,从理论分析入手,辅以 Euler方程为控制方程的激波管问题,前台阶流动和运动激波的双马赫反射 3个数值实验,对不同熵修正的性能做了深入研究,得出如下结论: Muller型和 Harten-Yee型熵修正方法作用于激波和非物理的膨胀激波 2种情况:激波情况下引入的数值耗散,能根本改善"Carbuncle"现象,膨胀激波时其数值粘性也足以使膨胀激波得以耗散;而类 Harten-Hyman型熵修正只对膨胀过程起修正作用,对激波情况无效,不能改善"Carbuncle"现象,该类熵修正的数值粘性较小,不足以使膨胀过程正确求解;直接采用 δ值代替特征值的特征值修正方法效果好于传统的特征值修正方法.

关 键 词: 计算流体力学; 数值分析; 激波

中图分类号: V 211.3

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2009)03-0356-05

Entropy correction analyses for Roe scheme

Zhou Yu Yan Chao

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Three types' entropy fix formulations for the Roe scheme were analyzed in theory and assessed by three numerical tests which were shock tube problem, step flow and double Mach reflection. The results show that "Carbuncle phenomena" occurs when capturing strong shock because of the original Roe scheme's numerical instability. Muller's and Harten-Yee's entropy fix methods introduce numerical dissipation to both shock and non-physical expansion shock processes. The numerical dissipation improves the Roe scheme's numerical stability and cures "Carbuncle phenomena" entirely for shock case and diffuses the expansion shock completely as well. Harten-Hyman type's entropy correction formulations do no contribution to shock case and can not cure the "Carbuncle phenomena". They can only fix non-physical expansion processes partially because their numerical dissipation is not large enough. The eigenvalue correction method which directly uses delta replace eigenvalue itself exceeds the traditional method.

Key words: computational fluid dynamics; numerical analysis; shock waves

Roe格式[1]作为基于 Riemann解的 Godunov类求解器,是严格的上风格式,具有耗散低、接触间断分辨率高和激波捕获性能较强的优点,计算稳定,是当前广为应用最受欢迎的格式之一. 但 Roe格式也具有非物理解出现的可能,膨胀激波问题和在高马赫时出现"Carbuncle"现象. 其中,膨胀激波问题是由于音速点附近,控制方程通量的 Jacobian矩阵特征值很小甚至为 0,违反了熵条件,导致膨胀过程不能正确求解. 一般的解决方法是在计算中引入额外的耗散来修正奇异的特征值,即熵修正方法. 目前,熵修正形式较多,对于不同计算问题,表现性能各异[2]. 国内外尚且缺乏此方面全面深入地研究. 本文目的就是研究分析较为流行具有代表性的熵修正方法的性能效果.

收稿日期: 2008-03-11

基金项目: 国防科学技术预先研究空气动力学资助项目(513130501)

作者简介: 周 禹(1981-),女,北京人,博士生, zhouyu@ase.buaa.edu.cn.

1　熵修正理论及熵修正方法

1.1　熵修正理论

对于一维 Euler方程 $\partial Q/\partial t+\partial F/\partial x=0$,拟线性化后为 $\partial Q/\partial t+A(\partial Q/\partial x)=0$. 本文各符号含义见文献[2]. 根据双曲型方程的特征性质理论[2]有 $\partial W/\partial t+\Lambda(\partial W/\partial x)=0$. 改写为标量方程组的形式有

$$\begin{cases}\partial w_1/\partial t+\lambda_1\cdot\partial w_1/\partial x=0\\ \partial w_2/\partial t+\lambda_2\cdot\partial w_2/\partial x=0\\ \partial w_3/\partial t+\lambda_3\cdot\partial w_3/\partial x=0\end{cases}$$

其中,$\lambda_1=u+a;\lambda_2=u;\lambda_3=u-a$, a是音速.

如果初始问题为一膨胀激波,经该方程求解耗散为一膨胀扇区,得到符合真实物理过程的解. 当流动位于音速点附近,即 $u=a$时, $\lambda_3=0$,有 $\partial w_3/\partial t=0$,这时在任何时刻,初始数据都在原点被真实重现. 膨胀激波的初值问题求解后仍为膨胀激波,不能得到正确的耗散. 膨胀激波解是熵增的非物理过程,违反了熵条件,导致流动错误求解. 为了正确求解流动,一般引入一个小的正数 ε 修正音速膨胀区域的 Jacobian特征值,使其不为0,从而能够产生足够的耗散求解得符合物理过程的膨胀扇区,即熵修正. ε有 2个作用: ①修正特征值的大小; ②确定需要修正的区域范围 ——往往通过 $|\lambda|<\varepsilon$判定.

1.2　熵修正的方法公式

本文主要研究了目前 CFD (Computational Fluid Dynamics)界应用最广泛的 3类、共 7种熵修正方法. 其中熵修正 1和 2为 Muller型[3],熵修正 3为 Harten-Yee型[4],熵修正 4～7均为类 Harten-Hyman型[5-6]. 当 $|\lambda|<\delta$时,熵修正 1～6的特征值修正方式为 $\lambda=(\lambda^2+\delta^2)/(2\delta)$,熵修正 7为 $\lambda=\delta$. 三维曲线系下各熵修正中 δ表达式为

1) $\delta=\bar{\delta}(\sigma_\xi/J)[1+(\sigma_\eta/\sigma_\xi)^{2/3}]$;

2) $\delta=\bar{\delta}(\sigma_\xi/J)\{1+[\max(\sigma_\eta,\sigma_\zeta)/\sigma_\xi]^{2/3}\}$;

3) $\delta=\bar{\delta}[|U|+|V|+|W|+\frac{1}{3}(|\nabla\xi|+|\nabla\eta|+|\nabla\zeta|)a]$;

4) $\delta=2.0\max[0,(\lambda_R-\lambda_L)]$;

5) $\delta=4.0\max[0,(\lambda-\lambda_L),(\lambda_R-\lambda)]$;

6) $\delta=\max[0,(\lambda-\lambda_L),(\lambda_R-\lambda)]$;

7) $\lambda=\delta=\max[0,(\lambda-\lambda_L),(\lambda_R-\lambda)]$.

1.3　熵修正公式理论分析

δ引入的方式上,前 2种熵修正系数根据经验取值,基于最大特征值并考虑到其他流向特征值因素. 熵修正 3直接加入其他 2个方向的特征值,相对于熵修正 1和 2,其主计算方向的最大特征值的网格度量系数为 3个方向度量系数梯度的平均. 该种熵修正系数值同样需人为给定.

后 4种分裂型熵修正与前 3种相比,避免了人工选取 δ值. 其 δ值由计算界面左右特征值的梯度确定,通过计算点相邻区域特征值的梯度信息修正该点的特征值,避免特征值的奇异性. 其中,熵修正 4直接采用界面左右特征值的梯度值,避开了计算点的特征值. 熵修正 5～7则采用界面两侧特征值与计算点特征值的最大非负梯度值,强迫引入了熵条件,更符合物理本质. 从形式上,熵修正 5～7优于熵修正 4. 熵修正 5乘以系数因子后,其 δ值比熵修正 6和 7大. 因此熵修正 5修正范围比熵修正 6和 7大,引入的数值耗散也较大. 对特征值 λ的修正方式上,熵修正 6与前 5种熵修正都是 $\lambda\rightarrow(\lambda^2+\delta^2)/(2\delta)$,即将 δ值叠加在特征值上修正,而熵修正 7有 $\delta\rightarrow\lambda$,直接用 δ来代替 $|\lambda|<\delta$时的特征值. 当 $|\lambda|<\delta$时,有 $(\lambda^2+\delta^2)/(2\delta)\leq\delta$,所以熵修正 7比熵修正 6的作用范围大,数值粘性也大.

考虑激波和膨胀 2种情况: 对熵修正 4,音速点附近,设 $U_L<U_R$,流向 L→R,此膨胀过程 $\delta=2.0\max[0,(\lambda_R-\lambda_L)]=2(\lambda_R-\lambda_L)$;而其他 3种情况: 膨胀过程 $U_L>U_R$,流向 R→L和压缩过程 $U_L>U_R$,流向 L→R与 $U_L<U_R$,流向 R→L,均有 $\delta=2.0\max[0,(\lambda_R-\lambda_L)]=0$. 即熵修正 4只在 L→R方向的膨胀过程起修正作用,在 R→L的膨胀过程未起修正作用,并对全部激波情况不修正. 熵修正 5～7的修正情况与熵修正 4类似. 对熵修正 1～3,流动在音速附近,只要满足 $|\lambda|<\delta$就进行修正,无论该间断是符合物理现象的激波还是非物理的膨胀激波.

综上所述,熵修正 1～3总能对膨胀间断进行修正,在激波的捕获过程同样引入过多的耗散;熵修正 4～7虽然避免了激波计算过程熵修正引起的多余粘性,但缺乏上风机制的判断,只能对一个方向的膨胀激波进行修正.

尽管引入熵修正是为了消除非物理的膨胀激波,熵修正 1～3区别膨胀和激波的盲目性使计算激波过程增加了不必要的耗散,但不代表修正 4～7比前 3种完善. Euler方程中 Roe格式界面无粘通量的计算表达式:

$$F_{i+1/2}=1/2[F(Q_L)+F(Q_R)]_{i+1/2}-1/2|\bar{A}|(Q_L-Q_R)_{i+1/2}$$

根据严格上风格式的构造理论, $1/2|\bar{A}|\cdot$

$(Q_L - Q_R) = 1/2\left(R|\bar{\Lambda}|L\right)\Delta Q$ 就是 Roe格式的数值耗散项[7],可以增强格式的稳定性. 如前所述,在音速点附近,矩阵 $\bar{A}$ 会有一个特征值为 0,使耗散项减小,影响格式的稳定性. 修正 1～3不区分激波或膨胀而对特征值的统一修正,某种程度上同时起到改善 Roe格式数值稳定性的作用. 下面将通过数值实验来补充验证以上的分析.

2 熵修正数值实验验证及分析

数值实验选取一维激波管[8]、前台阶流动和运动激波的双马赫反射[9]3个考核熵修正的经典算例. 其中,激波管算例考核不同熵修正对膨胀激波的修正能力;后 2个算例验证熵修正对激波后非物理紊乱的改善. 前台阶流动和双马赫反射的流动现象复杂. 流场中的激波均为强激波,包含三波结构,Roe格式求解易出现"Carbuncle"现象,即强激波后流场的非物理紊乱及所捕获的激波发生扭曲弯折. 该现象的本质是数值不稳定性[10]. 熵修正作为人工粘性,引入后可增强格式数值稳定性,改善"Carbuncle"现象. 同时,前台阶流动问题存在过度膨胀现象,求解不理想时出现膨胀激波,适于考核各类熵修正对膨胀激波的修正性能.

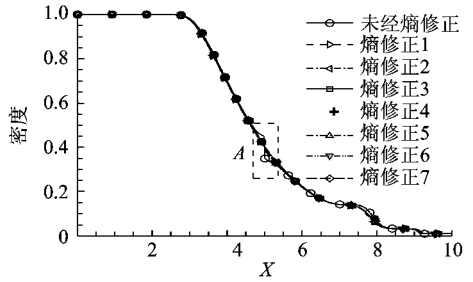
数值计算的控制方程选取 Euler方程,不计物理粘性以突显熵修正本身的数值粘性. 实验算例均为非定常算例,时间离散采用含亚迭代的 LU-SGS (Lower Upper Symmetric Gauss-Seidal)方法. 空间格式为 Roe的 FDS格式. 为了排除其他因素对熵修正的影响,空间格式不采用 muscl插值,只用一阶精度的 Roe格式配合各类熵修正方法计算比较. 需人工给定的 $\bar{\delta}$值均取 0.3.

2.1 激波管问题

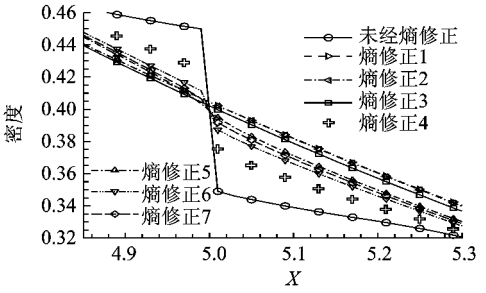
计算结果见图 1. 未经熵修正的计算结果膨胀激波明显存在,熵修正 1～3的数值粘性能够完全将其耗散. 同理论分析一致,熵修正 5,7,6的数值粘性依次减弱,修正效果逐渐变差. 熵修正 4由于构造差异,修正效果最弱. 后 4种熵修正中,修正效果最好的熵修正 5也不能使膨胀激波完全耗散. 熵修正 1～3的数值粘性要大于熵修正 4～7.

2.2 前台阶流动

此算例为马赫数 3的自由来流经过风洞中前台阶的超音速流动问题. 来流在台阶前方形成一道弓形激波,经风洞上壁面马赫反射形成一道 λ 激波,后又在下壁面和上壁面各反射一次. 弓形激波后流动在台阶拐角处过度膨胀. 计算网格数为 240 ×80. 图 2为 $Y = 0.2$台阶拐角附近无量纲密度沿壁面分布曲线图——反映了各类熵修正对膨胀过程的计算,图 3为流场发展稳定后等密度线流场图. 未经熵修正的弓形激波形状扭曲,激波下部外突,出现明显的"Carbuncle"现象,且台阶拐点处有一道法向膨胀激波 (图 2、图 3a). 数值计算验证了理论分析:熵修正 1～3参与了激波情况下特征值的修正,提高了格式的数值稳定性,使计算结果明显改善;熵修正 4～7对压缩过程不起作用,"Carbuncle"现象没有改善 (图 3e～图 3h).



a 无量纲密度分布曲线



b 图 1a中 A点膨胀激波修正局部放大

图 1 激波管无量纲密度分布曲线

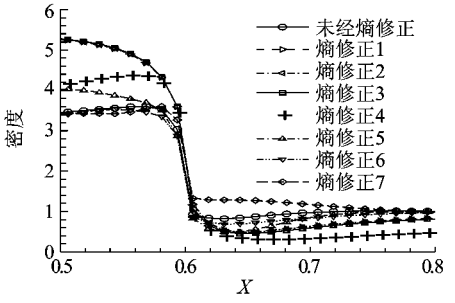
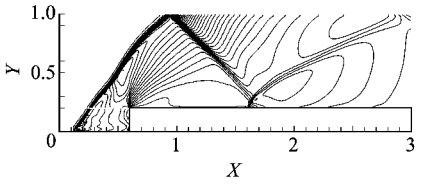


图 2 各类熵修正对膨胀过程的计算

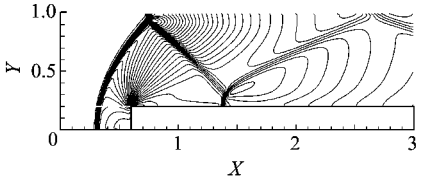
各类熵修正对膨胀激波的修正效果如下 (图 2):熵修正 1～3使膨胀激波耗散为膨胀扇区;熵修正 5对膨胀激波略有修正;熵修正 6和 7对膨胀激波改善甚微,熵修正 7的结果稍好于熵修正 6;熵修正 4的表现最差. 前 3种熵修正提供足够的耗散使膨胀过程得到正确的物理解,熵修正 4～7的数值粘性不足以完全修正膨胀激波. 熵修正 5的数值粘性较强,熵修正 4的耗散性最弱.

2.3 运动激波双马赫反射问题

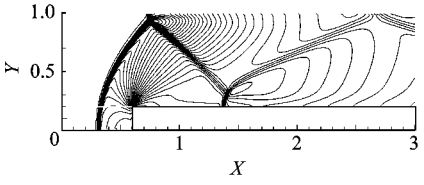
马赫数 10的运动强激波入射到壁面发生马赫反射,在三叉点拖出一接触间断,随后反射激波在接触间断表面再次反射. 经过 2次马赫反射,整个流场中共有 2个马赫杆和一接触间断. 图 4为



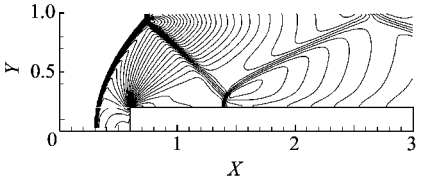
a　未经熵修正



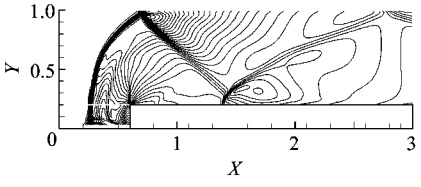
b　熵修正 1



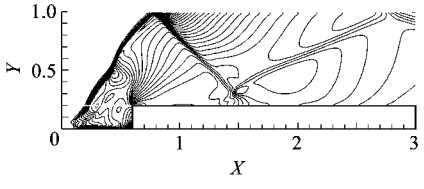
c　熵修正 2



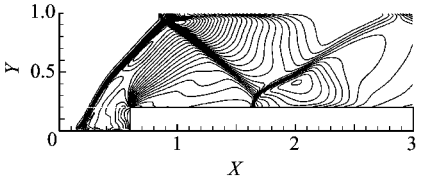
d　熵修正 3



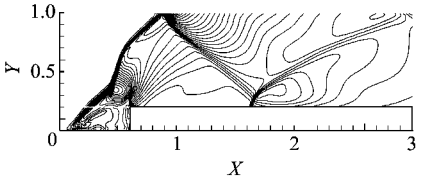
e　熵修正 4



f　熵修正 5

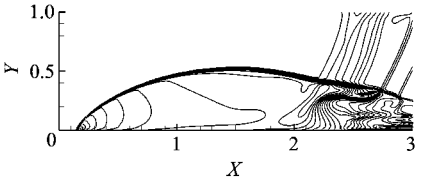


g　熵修正 6

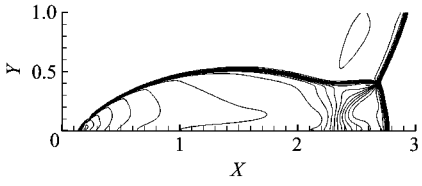


h　熵修正 7

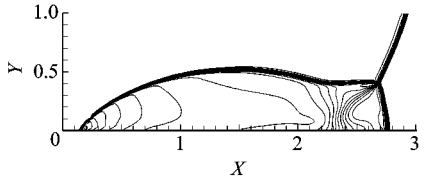
图 3　前台阶激波反射等密度线流场图



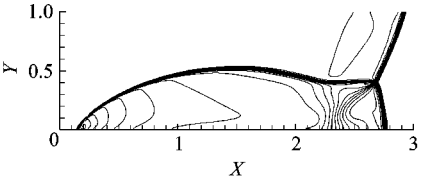
a　未经熵修正



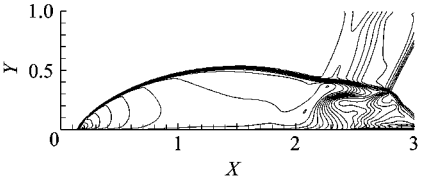
b　熵修正 1



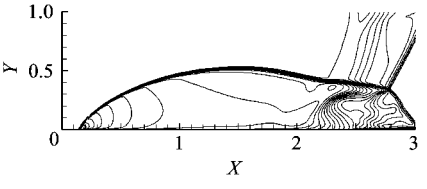
c　熵修正 2



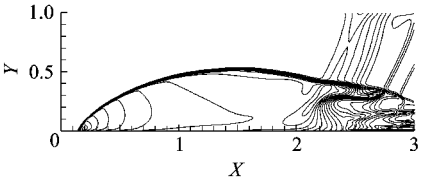
d　熵修正 3



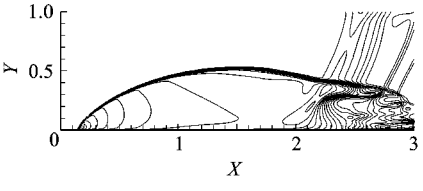
e　熵修正 4



f　熵修正 5



g　熵修正 6



h　熵修正 7

图 4　双马赫反射 $t=0.2$时刻等密度线流场图

$t=0.2$时刻等密度线流场图. 过强激波,未经熵修正结果出现明显的“Carbuncle”现象,接触间断打在壁面形成的卷曲与第1道马赫杆掺混碰撞,使第1道马赫杆严重扭曲(图4a). 经熵修正后,前3种熵修正修正了“Carbuncle”现象,对第1道马赫杆和接触间断都有明确的刻画,同时也大致捕捉到第2道马赫杆(图4b~图4d). 而后4种熵修正并未修正激波(图4e~图4h).

3 结 论

本文通过理论分析和数值实验的验证研究了7种熵修正方法的数值特性,得到以下结论:

1) 未经熵修正Roe格式音速点附近的数值不稳定性使得在其过强激波的计算结果中出现了明显的“Carbuncle”现象;

2) 熵修正1~3不仅对非物理的膨胀激波进行修正,同时也作用于激波情况,改善“Carbuncle”现象;熵修正4~7仅在膨胀过程发挥作用,不能修正数值不稳定性所带来的强激波后的非物理紊乱;

3) 熵修正1~3完全修正膨胀激波;熵修正4~7不足以完全修正膨胀激波;

4) 直接将δ代替特征值进行修正比传统的特征值修正方法$\lambda=(\lambda^2+\delta^2)/(2\delta)$好.

参考文献 (References)

[1] Roe P L. Approximate Riemann solvers parameter vectors and difference schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1981, 43(2): 357 - 372

[2] 阎超. 计算流体力学方法及应用 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006: 64 - 66
Yan Chao. Computational fluid dynamics method and application [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2006: 64 - 66 (in Chinese)

[3] Muller B. Simple improvements if an upwind TVD scheme for hypersonic flow [R]. AIAA-89-1977, 1989

[4] Yee H C. Upwind and symmetric shock-capturing schemes[R]. NASA-TM-89464, 1987

[5] Harten A, Hyman J M. Self-adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 1983, 50(2): 235 - 269

[6] Kermani M J, Pleet E G. Modified entropy correction formula for the roe scheme[R]. AIAA-2001-0083, 2001

[7] Sanders R, Morano E, Druguet M C. Multidimensional dissipation for upwind schemes: stability and applications to gas dynamics [J]. Journal of Computational Physics, 1998, 145(2): 511 - 537

[8] Woodward P, Colella P. The numerical simulation of two dimensional fluid flow with strong shocks [J]. Journal of Computational Physics, 1984, 54(1): 115 - 173

[9] Anderson D J. Computational fluid dynamics: the basis with applications [M]. New York: McGraw-Hill, 1995: 502 - 504

[10] Maurizio P, Domenic D. Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the “carbuncle” phenomenon [J]. Journal of Computational Physics, 2001, 166(2): 271 - 301

[11] 谢锦睿,吴颂平. TVD格式与高超音速气动加热数值模拟 [J]. 北京航空航天大学学报, 2007, 33(4): 392 - 396
Xie Jinrui, Wu Songping. TVD scheme and numerical simulation of aerodynamic heating in hypersonic flows[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 33(4): 392 - 396 (in Chinese)

(责任编辑:赵海容)