集合论-泛逻辑悖论

杜国平 王洪光 李 娜

(南京航空航天大学 计算机科学与工程系，南京 210016) (南京大学 现代逻辑与逻辑应用研究所，南京 210093)

朱梧槚

(南京航空航天大学 计算机科学与工程系，南京 210016)

摘 要：对于一类 $n(2\leqslant n\leqslant \aleph_n)$值逻辑可以给出一个一般形式的形式语言，通过一个六元组的模型，可以递归地定义出该形式语言中的公式的值.这构成了刻画这类逻辑的一个泛逻辑系统 UL_1.在该系统中，可以定义出抽象否定、抽象蕴涵和抽象等值等联结词，它们分别是二值逻辑中的联结词否定、蕴涵和等值的一般化.利用这些联结词，可以给出 Russell 型造集谓词、Curry 型造集谓词的一般形式.此外，还提出了一种新型造集谓词，这种造集谓词只包含等值联结词，而不涉及其它联结词.通过这 3 种造集谓词，利用该系统的逻辑工具，证明了在通常的有穷值逻辑、可数无穷值逻辑和不可数无穷值逻辑系统中，概括原则都将导致悖论.

关 键 词：概括原则；泛逻辑；不可数无穷值逻辑；悖论

中图分类号：O 14

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2009)03-0376-04

Paradox of set theory-universal logic

Du Guoping

(Department of Computer Science and Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Wang Hongguang Li Na

(Institute of Modern Logic and its Application, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

Zhu Wujia

(Department of Computer Science and Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: A general formal language in which the value of formulas can be recursively defined can be given by a sextuple-model for $n(2\leqslant n\leqslant \aleph_n)$-valued logic. It constitutes a universal logic system UL_1, which characterizes this kind of logic. Connectives like abstract negation, abstract implication and abstract equivalence can be defined in the system. They are the generalization of negation, implication and equivalence in two valued logic. Applying these connectives, the general forms of Russellian sets-making predicate and Curryian sets-making predicate were developed. In addition, a new type of set-making predicate which only contains equivalence was developed. Applying these three kinds of sets-making predicates, abstraction principle led to paradoxes in general system of finite valued logic, countable infinite valued logic and uncountable infinite valued logic.

Key words: abstraction principle; universal logic; uncountable infinite valued logic; paradox

收稿日期：2008-03-26

基金项目：国家自然科学基金资助项目(60575038)

作者简介：杜国平(1965—)，男，江苏盱眙人，教授，dgpnju@163.com.

1　问题提出

根据 Cantor 集合论的概括原则,对于任一性质 F,有:

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow F(x))$$

(其中 y 不在 $F(x)$ 中自由出现)　　(1)

Russell 证明,在经典逻辑的基础上,概括原则将导致悖论;Curry 证明甚至仅仅在经典逻辑正命题演算基础上,概括原则将同样导致悖论[1];文献[2]证明了在 Lukasiewicz 有穷值逻辑系统 $L_n(3 \leqslant n < \aleph_0)$ 的基础上,概括原则也将导致悖论;文献[3]给出了一个在可数无穷值逻辑的基础上,概括原则将导致悖论的证明.

上述文献中逻辑学家的工作是分别进行的,因此,构造悖论的方法也各不相同. 本文将尝试采用一种统一的方法构造出一般的集合论悖论,并将此结果推广到任意不可数无穷值逻辑.

2　一般形式系统

首先来考察一类命题逻辑系统的一般形式或抽象形式,即通常的逻辑系统都具有的逻辑类型. 这一类逻辑系统中均包含如下要素:

1) 形式语言:

① 命题符号:p_1, p_2, …, p_n, …;

② 联结词符号:一元联结词♥,二元联结词↔,◆,♣.

单独一个命题符号称为原子公式,由所有原子公式构成的集合记为 Atomic(L^P);由所有公式构成的集合记为 Form(L^P);用 α 和 β 表示任一公式.

公式的形成规则:公式当且仅当由下列规则(有穷次)产生:

① Atomic(L^P)$\subseteq$Form(L^P);

② 如果 α 和 β 是公式,那么(♥α),($\alpha \leftrightarrow \beta$),($\alpha$ ◆ β),(α♣β)也是公式[4].

2) 语义:

一个模型 $\mathfrak{M}$ 是一个六元组$\langle M, D, F, G, H, v\rangle$,满足下列条件:

① M 为真值集合,$2 \leqslant |M| \leqslant \aleph_n$;

② D 为特征值集合,$D \neq \varnothing$,$D \subset M$;

③ $F = \left\{ f'(x) \,\middle|\, \text{对于任一 } x \in M, f'(x) \in \begin{cases} D, x \in M - D \\ M - D, \text{其它} \end{cases} \right\}$;

④ $G = \left\{ g'(x,y) \,\middle|\, \text{对于任意 } x \in M, y \in M, g'(x,y) \in \begin{cases} D, x \in D \text{ 当且仅当 } y \in D \\ M - D, \text{其它} \end{cases} \right\}$;

⑤ $H = \left\{ h'(x,y) \,\middle|\, \text{对于任意 } x \in M, y \in M, h'(x,y) \in \begin{cases} D, x \in D, \text{那么 } y \in D \\ M - D, \text{其它} \end{cases} \right\}$;

⑥ 赋值 v 是一个以 Form(L^P)为定义域,以 M 为值域的函数,并满足下列条件:

ⅰ 对于任一原子公式 p_n, $v(p_n) \in M$;

ⅱ v(♥)$\in F$;

ⅲ $v(\leftrightarrow) \in G$;

ⅳ v(◆)$\in G$;

ⅴ v(♣)$\in H$.

定义 1　设 $\mathfrak{M}$ 是一个模型,$\alpha \in$ Form(L^P),在模型 $\mathfrak{M}$ 下公式 α 的值递归地定义如下:

1) 若 $\alpha \in$ Atomic(L^P),则

$$\mathfrak{M}(\alpha) = v(\alpha)$$

2) 若 $\alpha =$(♥β),则

$$\mathfrak{M}(\alpha) = v(♥)(\mathfrak{M}(\beta))$$

3) 若 $\alpha = (\beta \leftrightarrow \gamma)$,则

$$\mathfrak{M}(\alpha) = v(\leftrightarrow)(\mathfrak{M}(\beta), \mathfrak{M}(\gamma))$$

4) 若 $\alpha =$(β◆γ),则

$$\mathfrak{M}(\alpha) = v(◆)(\mathfrak{M}(\beta), \mathfrak{M}(\gamma))$$

5) 若 $\alpha =$(β♣γ),则

$$\mathfrak{M}(\alpha) = v(♣)(\mathfrak{M}(\beta), \mathfrak{M}(\gamma))$$

定理 1　设 $\mathfrak{M}$ 是一个模型,对于任意的公式 α, $\mathfrak{M}(\alpha) \in M$.

定义 2　设 α 是任一公式,$\mathfrak{M}$ 为任一模型,如果 $\mathfrak{M}(\alpha) \in D$,则称模型 $\mathfrak{M}$ 满足 α;设 Σ 是任一公式集,$\mathfrak{M}$ 为任一模型,如果对于任一 $\alpha \in \Sigma$,都有 $\mathfrak{M}(\alpha) \in D$,则称模型 $\mathfrak{M}$ 满足 Σ,记为 $\mathfrak{M}(\Sigma) \in D$.

定义 3　设 α 是任一公式,若对于任一模型 $\mathfrak{M}$,均有 $\mathfrak{M}(\alpha) \in D$,则称 α 为泛有效式,记为 $\models \alpha$;设 α 是任一公式,Σ 是任一公式集,若对于任一模型 $\mathfrak{M}$,均有:若 $\mathfrak{M}(\Sigma) \in D$,则 $\mathfrak{M}(\alpha) \in D$,那么称 α 为 Σ 的泛有效后承,记为 $\Sigma \models \alpha$.

设 α 是任一公式,若对于任一 $|M| = 2$ 的模型 $\mathfrak{M}$,均有 $\mathfrak{M}(\alpha) \in D$,则称 α 为 2 值逻辑有效式,记为 $\models_2 \alpha$;若对于任一 $|M| = n$ 的模型 $\mathfrak{M}$,均有 $\mathfrak{M}(\alpha) \in D$,则称 α 为 n 值逻辑有效式,记为 $\models_n \alpha$;若对于任一 $|M| = \aleph_0$ 的模型 $\mathfrak{M}$,均有 $\mathfrak{M}(\alpha) \in D$,则称 α 为可数无穷值逻辑有效式,记为 $\models_{\aleph_0} \alpha$;若对于任一 $|M| = \aleph_n$ 的模型 $\mathfrak{M}$,均有 $\mathfrak{M}(\alpha) \in D$,则称 α 为 $\aleph_n$ 值逻辑有效式,记为 $\models_{\aleph_n} \alpha$.

上述语言和语义构成了一个形式系统,由于该系统是对常见的一类逻辑系统形式的一种抽

象,因此,该系统可以称之为一个泛逻辑系统 UL_1.

3 悖论三定理

在泛逻辑系统 UL_1 中,可以证明下列定理:

定理 2 $\alpha,(\alpha\clubsuit\beta)\models\beta$.

证明 假设 $\alpha,(\alpha\clubsuit\beta)\models\beta$ 不成立,则存在一个模型 $\mathfrak{M}$,使得

1) $\mathfrak{M}(\alpha)\in D$;

2) $\mathfrak{M}((\alpha\clubsuit\beta))\in D$;

但是

3) $\mathfrak{M}(\beta)\notin D$;

由 2)可得:

4) $v(\clubsuit)(\mathfrak{M}(\alpha),\mathfrak{M}(\beta))\in D$;

根据语义⑤有:

5) 如果 $\mathfrak{M}(\alpha)\in D$,那么 $\mathfrak{M}(\beta)\in D$;

由 1)和 5)可得:

6) $\mathfrak{M}(\beta)\in D$.

3)和 6)矛盾. 假设不成立. 所以有:

$\alpha,(\alpha\clubsuit\beta)\models\beta$. **证毕**

定理 3 下列公式都是泛有效式:

1) $((\alpha\leftrightarrow(\blacktriangledown\alpha))\clubsuit\beta)$;

2) $((\alpha\leftrightarrow(\alpha\clubsuit\beta))\clubsuit\beta)$;

3) $((\alpha\leftrightarrow(\alpha\blacklozenge\beta))\clubsuit\beta)$.

证明

1) 假设$((\alpha\leftrightarrow(\blacktriangledown\alpha))\clubsuit\beta)$不是泛有效式,则存在一个模型 $\mathfrak{M}$,使得:

① $\mathfrak{M}(((\alpha\leftrightarrow(\blacktriangledown\alpha))\clubsuit\beta))\notin D$;

根据语义⑤可得:

② $\mathfrak{M}((\alpha\leftrightarrow(\blacktriangledown\alpha))\in D$;

③ $\mathfrak{M}(\beta)\notin D$;

由②可得:

④ $\mathfrak{M}(\alpha)\in D$ 当且仅当 $\mathfrak{M}((\blacktriangledown\alpha))\in D$;

由语义知

⑤ $\mathfrak{M}((\blacktriangledown\alpha))\in D$ 当且仅当 $\mathfrak{M}(\alpha)\notin D$;

由④和⑤可得:

⑥ $\mathfrak{M}(\alpha)\in D$ 当且仅当 $\mathfrak{M}(\alpha)\notin D$.

由此得出矛盾. 假设不成立.

所以$((\alpha\leftrightarrow(\blacktriangledown\alpha))\clubsuit\beta)$是泛有效式.

2) 假设$((\alpha\leftrightarrow(\alpha\clubsuit\beta))\clubsuit\beta)$不是泛有效式,则存在一个模型 $\mathfrak{M}$,使得:

① $\mathfrak{M}(((\alpha\leftrightarrow(\alpha\clubsuit\beta))\clubsuit\beta))\notin D$;

根据语义⑤可得:

② $\mathfrak{M}((\alpha\leftrightarrow(\alpha\clubsuit\beta))\in D$;

③ $\mathfrak{M}(\beta)\notin D$;

假设 $\mathfrak{M}(\alpha)\in D$,那么根据语义由②可得:

④ $\mathfrak{M}((\alpha\clubsuit\beta))\in D$;

根据语义由③可得:

⑤ $\mathfrak{M}((\alpha\clubsuit\beta))\notin D$;

④和⑤矛盾.

假设 $\mathfrak{M}(\alpha)\notin D$,那么根据语义由②可得:

⑥$\mathfrak{M}((\alpha\clubsuit\beta))\notin D$;

根据语义由③可得:

⑦ $\mathfrak{M}((\alpha\clubsuit\beta))\in D$.

⑥和⑦矛盾.

或者 $\mathfrak{M}(\alpha)\in D$ 或者 $\mathfrak{M}(\alpha)\notin D$,两者均导致矛盾. 由此可见,假设不成立.

所以$((\alpha\leftrightarrow(\alpha\clubsuit\beta))\clubsuit\beta)$是泛有效式.

3) 假设$((\alpha\leftrightarrow(\alpha\blacklozenge\beta))\clubsuit\beta)$不是泛有效式,则存在一个模型 $\mathfrak{M}$,使得:

① $\mathfrak{M}(((\alpha\leftrightarrow(\alpha\blacklozenge\beta))\clubsuit\beta))\notin D$;

根据语义 5)可得:

② $\mathfrak{M}((\alpha\leftrightarrow(\alpha\blacklozenge\beta))\in D$;

③ $\mathfrak{M}(\beta)\notin D$;

假设 $\mathfrak{M}(\alpha)\in D$,那么根据语义由②可得:

④ $\mathfrak{M}((\alpha\blacklozenge\beta))\in D$;

根据语义由④进一步可得:

⑤ $\mathfrak{M}(\beta)\in D$;

③和⑤矛盾.

假设 $\mathfrak{M}(\alpha)\notin D$,那么根据语义由②可得:

⑥ $\mathfrak{M}((\alpha\blacklozenge\beta))\notin D$;

根据语义由⑥进一步可得:

⑦ $\mathfrak{M}(\beta)\in D$.

③和⑦矛盾.

或者 $\mathfrak{M}(\alpha)\in D$ 或者 $\mathfrak{M}(\alpha)\notin D$,两者均导致矛盾. 由此可见,假设不成立.

所以$((\alpha\leftrightarrow(\alpha\clubsuit\beta))\clubsuit\beta)$是泛有效式. **证毕**

定理 4 在泛逻辑系统 UL_1 中,取造集性质为$(\blacktriangledown x\in x)$,由概括原则将导致悖论.

证明 取造集性质为$(\blacktriangledown x\in x)$,利用式(1)有:

1) $\exists y\forall x(x\in y\leftrightarrow(\blacktriangledown x\in x))$(其中 y 不在$(\blacktriangledown x\in x)$中自由出现);

假设满足这一条件的集合为 d_1,则有:

2) $\forall x(x\in d_1\leftrightarrow(\blacktriangledown x\in x))$;

特别地,有:

3) $(d_1\in d_1\leftrightarrow(\blacktriangledown d_1\in d_1)))$;

假设 β 为任一公式,依据定理 3 的 1)有:

4) $((d_1\in d_1\leftrightarrow(\blacktriangledown d_1\in d_1)))\clubsuit\beta)$;

由 3)和 4),依据定理 2 可得:

5) β. **证毕**

定理 5　在泛逻辑系统 UL_1 中,假设 β 为任一公式,取造集性质为($x\in x\clubsuit\beta$),由概括原则将导致悖论.

证明　取造集性质为($x\in x\clubsuit\beta$),利用式(1)有:

1) $\exists y\forall x(x\in y\leftrightarrow(x\in x\clubsuit\beta))$(其中 y 不在($\clubsuit x\in x$)中自由出现);

假设满足这一条件的集合为 d_2,则有:

2) $\forall x(x\in d_2\leftrightarrow(x\in x\clubsuit\beta))$;

特别地,有:

3) $(d_2\in d_2\leftrightarrow(d_2\in d_2\clubsuit\beta))$;

依据定理 3 的 2)有:

4) $((d_2\in d_2\leftrightarrow(d_2\in d_2\clubsuit\beta))\clubsuit\beta$;

由 3)和 4),依据定理 2 可得:

5) β.　　**证毕**

定理 6　在泛逻辑系统 UL_1 中,假设 β 为任一公式,取造集性质为($x\in x\blacklozenge\beta$),由概括原则将导致悖论.

证明　取造集性质为($x\in x\blacklozenge\beta$),利用式(1)有:

1) $\exists y\forall x(x\in y\leftrightarrow(x\in x\blacklozenge\beta))$(其中 y 不在($\blacktriangledown x\in x$)中自由出现);

假设满足这一条件的集合为 d_3,则有:

2) $\forall x(x\in d_3\leftrightarrow(x\in x\blacklozenge\beta))$;

特别地,有:

3) $(d_3\in d_3\leftrightarrow(d_3\in d_3\blacklozenge\beta))$;

依据定理 3 的 3)有:

4) $((d_3\in d_3\leftrightarrow(d_3\in d_3\blacklozenge\beta))\clubsuit\beta)$;

由 3)和 4),依据定理 2 可得:

5) β.　　**证毕**

4　结 束 语

在泛逻辑系统 UL_1 中,模型 $\mathfrak{M}$ 中的真值集合 M 的基数既可以是 2,也可以是任意有穷基数 n,还可以是可数无穷基数,甚至可以是不可数无穷基数.通常的经典二值逻辑、n 值逻辑以及无穷值逻辑都具有泛逻辑系统 UL_1 所描述的逻辑类型,所以上述定理 4、定理 5 和定理 6 说明了在有穷值逻辑、可数无穷值逻辑和不可数无穷值逻辑中,概括原则都将导致悖论.

参考文献(References)

[1] Meyer R K, Routley R, Dunn J M. Curry's paradox[J]. Analysis,1979,39:124－128

[2] Moh Shaw-Kwei. Logic paradox for many-valued systems [J]. The Journal of Symbolic Logic,1954,19:37－40

[3] 朱梧槚.数学与无穷观的逻辑基础[M].大连:大连理工大学出版社, 2008: 107－123
Zhu Wujia. Logical foundation of mathematics and infinity [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press,2008: 107－123(in Chinese)

[4] 杜国平.经典逻辑与非经典逻辑基础[M].北京:高等教育出版社, 2006
Du Guoping. The basis of classical logic and non-classical logic[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006(in Chinese)

(责任编辑:文丽芳)