基于SSI模型的加速应力试验定量评估方法

李晓阳 姜同敏

(北京航空航天大学 工程系统工程系，北京 100191)

摘 要：为了解决传统应力-强度干涉模型(SSI，Stress-Strength Interference)不能对加速应力试验(AST，Accelerated Stress Testing)进行可靠性指标随时间变化的定量评估问题，针对应力和强度均引入了随机过程进行描述.首先假设了产品强度退化过程和应力变化分别为漂移布朗运动和对称布朗运动.其次，为了解决Basu的布朗运动SSI模型在零时刻可靠度为1的问题，从工程角度，假设产品设计制造过程与试验或使用过程相互独立，提出了产品可靠性是设计生产决定的固有可靠性以及试验使用过程确定的使用可靠性的串联结果.通过将传统应力强度干涉模型结合Basu的布朗运动SSI模型，建立了与时间相关的应力强度干涉模型IMSDⅠ，并给出了相关评估方法.基于将加速应力试验与加速退化试验相结合，改进了已有的AST试验方法，扩大了试验数据量，最后，通过仿真算例验证了本文模型和评估方法的理论正确性和工程可实施性.

关 键 词：可靠性；寿命；退化；布朗运动；应力-强度干涉模型；加速试验

中图分类号：TB 114.3

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2008)11-1298-05

Quantitative evaluation of accelerated stress testing based on SSI

Li Xiaoyang Jiang Tongmin

(Dept. of System Engineering of Engineering Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: In conducting accelerated stress testing (AST), to quantitatively evaluate reliability with respect to time by use of stress-strength interference (SSI) model, stochastic processes were introduced to describe stress and strength. Firstly, It was assumed that strength degradation and stress variation is drift and symmetric Brownian motion, respectively. Brownian motion SSI established by Basu involved reliability equals 1 when time equals zero. To overcome this problem, from engineering view, reliability of product was regarded as the result, which inherence reliability determined by design and manufacturing is in series with operation reliability decided by experiments and operation. Based on the traditional SSI and Basu's model, time-dependent interference model of strength degradation Ⅰ (IMSDⅠ) was derived. With the combination of AST and accelerated degradation testing (ADT), data collection method in AST was improved. Finally, simulation example verified the correctness and applicability of the methodology proposed.

Key words: reliability; life; degradation; Brownian motion; stress-strength inference model; accelerated testing

应力-强度干涉(SSI，Stress-Strength Inference)模型是结构可靠性分析中常用的一种可靠性评估模型.但此模型中的应力和强度都是广义的应力和强度概念.即应力代表引起失效的因素，强度则是抵抗失效的能力[1].加速应力试验(AST，Accelerated Stress Testing)是一种激发(stimulation)试验，其内涵是用加大应力的方法，加速激发产品潜在缺陷，通过分析改进来达到提

收稿日期：2007-10-17

基金项目："十一五"预研项目(51319030301)

作者简介：李晓阳(1980—)，女，贵州贵阳人，讲师，leexy@buaa.edu.cn.

高产品可靠性的目的,使产品"健壮"起来. 目前,应力-强度干涉模型除了在结构、机械可靠性等方面的应用,还用于 AST 提高产品可靠性的定性分析[2],以及产品进行 AST 的可靠性定量评估中[3]. 但对于可靠性与时间息息相关的退化系统而言,由于传统 SSI 与时间无关的,从而出现了使用的局限性.

为此,很多学者都对 SSI 模型进行了引入时间变量的修正. 如文献[4]中,Basu, Bilikam, Raghava 以及 Aminzadeh 分别提出了基于布朗运动的 SSI、基于与时间相关的参数函数的极值分布下的 SSI、基于马尔科夫离散模型的 SSI 以及基于时间序列分析的 SSI. 文献[5]也对与时间相关的 SSI 进行过深入的研究,分别针对产品强度的确定性退化函数和随机退化过程,以及外界载荷的确定性加载函数和随机加载过程,提出了多种 SSI. 文献[6]称其为广义 SSI 模型(General SSI). 文献[7]根据强度退化原理,提出了一种简单的与时间相关的 Log-logistic(对数罗杰斯蒂克)SSI 模型. 此外,文献[8]和文献[9]还分别针对周期性应力和离散冲击型应力,在强度退化的基础上提出了两种 SSI 模型.

本文为了解决 AST 的定量评估,结合 Basu 的布朗运动 SSI 模型,通过对其进行修正和完善,对 AST 试验数据进行了分析和评估.

1　传统 SSI 模型

由于施加给产品的应力会受到随机因素的影响,且产品受到其生产制造、调试、试验、使用等过程中外界随机因素的影响,导致了应力和强度都具有随机性. 因此,应力和强度都分别服从某种分布. 且通常,当强度大于应力时,产品能够正常工作,反之产品就要失效[1]. 从图 1 可看出,这相当于当产品的强度落入干涉区域后,产品就处于不可靠状态. 若以 Y 代表应力,X 代表产品强度,则可采用 $X>Y$ 或 $X-Y>0$ 描述事件:产品在规定的条件下和规定的时间内能可靠工作. 即产品可靠度表示为

$$R(t)=P\{X>Y\}=P\{X-Y>0\} \quad (1)$$

由于应力与强度均是随机变量,若假设它们之间相互独立,且产品强度 X 服从均值为 μ_1、方差为 σ_1^2 的正态分布;应力 Y 服从均值为 μ_2、方差为 σ_2^2 的正态分布. 若设干涉变量 $Z=X-Y$,根据相互独立的随机变量若各自都服从正态分布,则这些随机变量的和与差也服从正态分布,那么 Z

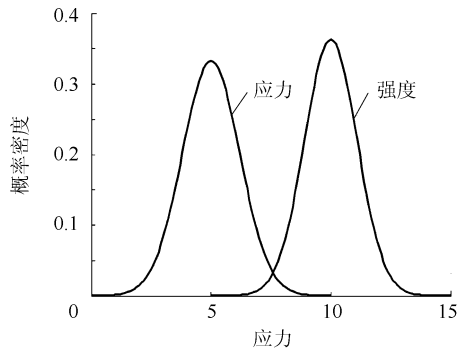

图 1　应力-强度干涉示意图

服从均值为 $\mu=\mu_1-\mu_2$,方差为 $\sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2$ 的正态分布,$Z\sim N(\mu,\sigma^2)$. 此时,产品基于 SSI 模型的可靠度函数为

$$R_Z=P(Z>0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_0^{\infty}\exp\left[-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}z \quad (2)$$

其概率密度函数为

$$f_z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3)$$

由式(2)可知,该模型中并没有时间变量. 但可靠性通常是一个与时间相关的概念. 对可靠性数据进行评估的目的不仅是通过评估产品试验结束时刻的可靠度,做出是否接受的判断,而且还需通过对产品相应的可靠性指标进行评估后,预测产品或评价产品在未来某个时间内或未来执行某个任务时,具有的可靠性水平以及在某个可靠度水平下的产品寿命指标. 而式(2)却不能满足这些需求.

实际上,强度和应力会随时间而产生变化,此时概率密度、应力、时间共同构成了一个三维空间;强度和应力在其中的变化可如图 2 所示. 由图可看出,当强度随时间发生衰退时,强度和应力组成的干涉区域随时间变化会越来越大,这意味着产品可靠性在降低. 若能从强度的这种衰退变化角度入手,建立一个与时间相关的 SSI 模型,就能通过该模型得到产品与时间相关的可靠度模型,从而可以利用与寿命相关的强度数据评价产品寿

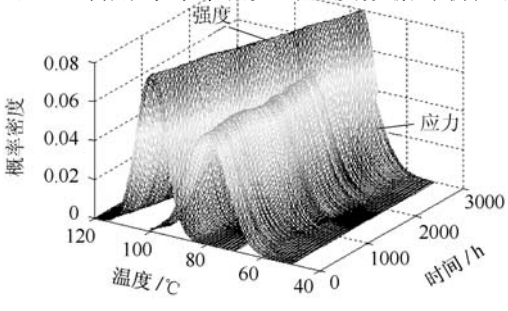

图 2　产品强度和应力随时间的变化

命与可靠性指标,也可以对产品将来的寿命情况和可靠度状态进行预测.

为此,本文将基于系统的性能退化理论,对式(2)表达的应力-强度干涉模型进行修正,以得到与时间相关的应力-强度干涉模型.

2 与时间相关的SSI模型

2.1 产品强度和应力的随机过程

将产品强度 X 与应力 Y 都看作一个随机过程 $Y(t)$ 和 $X(t)$. 分别采用齐次漂移布朗运动和对称布朗运动来描述 $X(t)$ 和 $Y(t)$,即

$$\left.\begin{aligned} X(t) &= \sigma_{B_1} B(t) + d(s) \cdot t + \mu_1 \\ Y(t) &= \sigma_{B_2} B(t) + \mu_2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中,$B(t)$ 是均值为0,方差为时间 t 的标准布朗运动,$B(t) \sim N(0,t)$;σ_B 为扩散系数,σ_{B1} 刻画了产品强度随时间退化的随机性,σ_{B2} 刻画了应力随时间变化的随机性. 通常,这扩散系数也不随应力和时间而改变,是常数;$d(s)$ 为漂移系数,是一个与应力 s 相关的确定性函数,它也是描述应力与寿命关系的加速模型;μ 为漂移布朗运动的起始点,μ_1 代表产品强度初始值,μ_2 代表应力初始值.

若 $Z(t) = X(t) - Y(t)$,则 $Z(t)$ 在 t 时刻的概率密度函数为

$$f_{ZT}(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_B^2 t}} \exp\left\{ -\frac{[z - \mu_B(t)]^2}{2\sigma_B^2 t} \right\} \tag{5}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \mu_B(t) &= d(s) \cdot t + \mu_1 - \mu_2 \\ \sigma_B^2 &= \sigma_{B_1}^2 + \sigma_{B_2}^2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

产品的可靠度模型为

$$R = P(X(t) - Y(t) > 0) = P(Z(t) > 0) \tag{7}$$

由于强度的退化通常是一个负漂移布朗运动,即 $d(s) < 0$,并结合布朗运动首达时分布,产品在时间区间 $(0, t_0)$ 内工作的可靠度模型为

$$R_{t_0} = \int_0^{\infty} \frac{|\mu|}{\sigma_B \sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{ -\frac{[\mu + d(s)t]^2}{2\sigma_B^2 t} \right\} \mathrm{d}t \tag{8}$$

上式就是文献[4]中由 Basu 提出的应力-强度随机干涉模型. 但从该模型可以看出,由于假设强度和应力均为随机过程,且采用布朗运动来描述,因此通过数值积分求解可靠度时,时间 t_0 趋于零时,产品可靠度趋于1. 但式(8)考虑了时间对产品可靠性的影响,因此是式(2)的推广. 那么当时间 t_0 趋于0时,通过式(8)得到的可靠度应该与式(2)得到的结果一致,然而它们并不相等. 而且实际上,产品在初始使用时刻,或进行任何试验之初,由图1可看出,产品的可靠度一定不等于1. 所以该模型还需要进行修正.

2.2 基于性能退化的SSI模型

为了对上述模型进行修正,需要从工程的角度出发,对影响产品可靠度的因素进行分析. 产品在试验或使用之初,产品的设计、制造、装配等因素就已经决定了此刻产品的内在可靠性,通常称该可靠性为固有可靠性. 而当产品进行试验,或投入使用之后,由于受到外界应力和各种随机因素的影响,产品会出现磨损、疲劳、参数漂移等退化现象,从而使其使用可靠性出现了下降. 由于设计制造过程与试验或使用过程可以视之为独立,且任何一个过程引发的产品失效都会导致产品失效,因此不妨将产品投入使用或试验过程中的实际可靠性看作上述两个过程的串联结果.

对于产品的固有可靠性,也就是本文所指的产品在试验或试验之初具有的可靠性水平,可以采用传统SSI模型进行描述,而产品一旦进行试验或投入使用后的可靠性水平,便采用式(8)描述. 由此可得:

$$R = P(Z > 0) \cdot P(X(t) - Y(t) > 0) = R_Z \cdot R_{t_0} \tag{9}$$

由式(9)可知,当 $t = 0$,$R = R_Z$,即产品的初始可靠度函数收敛至式(2). 由此可见,式(9)解决了式(8)初始可靠度为1的问题. 本文将式(9)称为强度退化干涉模型Ⅰ(IMSDⅠ,Inference Model of Strength Degradation Ⅰ).

2.3 基于性能退化的IMSDⅠ评估方法

极大似然法因其评估方法简单,且具有很多统计上的优良性质,所以是工程上最常使用的参数评估方法之一. 为了能够通过IMSDⅠ模型得到产品的寿命与可靠性指标,本文也采用极大似然法来对模型中的各参数进行估计.

本文提出的与时间相关的SSI模型是基于产品性能退化而来的. 而AST的步进应力试验时间相当短暂,这使得在有限时间内收集到充足的产品耐环境能力(即试验中寻找到的产品极限)随时间的退化数据非常困难. 为此,可以将用于寻找产品极限的AST方法引入ADT中. 为简便起见,本文将这种试验方法简称为ASDT(Accelerated Stress and Degradation Testing). 该方法与目前通常所进行的ADT的区别仅在于,ADT中是通过检测设备实时监控和记录具有可在线监测性的产品性能参数随时间的变化数据;而在ASDT中,是通过AST的手段来搜集产品耐环境能力,即应力极限随时间的变化数据. 除此之外,这两种试验方法基本是一致的.

本文提出的这种试验方法更适用于电子产品.因为影响电子产品可靠性与寿命的环境应力主要是温度、振动等.而电子产品通常都具有温漂特性,即产品性能随温度的变化而变化.因此,通过寻找到产品的温漂特性函数关系,就可以将这类产品耐温度能力的监控采集,转化为产品性能数据.从而提高了环境应力的采集准确性,也降低了试验的难度.

假设有 n 个 iid.样本进行 K 水平的温度步进应力 ASDT,$T_1<T_2<\cdots<T_k$,其中 $k=1,\cdots,K$.为简单起见,ASDT 中,寻找系统工作极限的寻找时间间隔为 Δt,间隔为常数.每个应力水平的寻找次数为 M_k,共检测 M 次,即 $\sum_{k=0}^{K} M_k=M$.$k=0$ 表示首次步进应力 AST.此时由于系统并没有开始寿命试验,因此并没有出现累积损伤,所以首次步进应力 AST 得到的极限,可以认为是系统处于正常应力条件下的极限,且假设 $M_0=0$.当试验从 $k=1$ 开始时,每个应力水平的试验时间为 $M_k\cdot\Delta t$,总试验时间为 $M\cdot\Delta t$.每次进行监控的时间为 $t_{ikj}(i=1,\cdots,n;k=0,\cdots,K;j=0,\cdots,M_k)$,监控到的工作极限值为 x_{ijk}.x_{i00} 表示 ASDT 中首次通过步进应力 AST 确定的第 i 个系统的工作极限,相应的检测时间为 t_{i00}.假设使用 AST 寻找工作极限的过程对系统造成的损伤可以忽略不计.

同样,假设有 L 个 iid.的应力环境,通过对这些应力环境进行的时间间隔为 $\Delta t'$,共 M'次检测,得到应力在 t_{ij}'的应力检测值 y_{ij},$i=1,\cdots,L$,$j=0,1,\cdots,M'$,$j=0$ 时,代表第一次对应力检测.

根据产品强度和应力的实测数据的初始值,式(2)的极大似然法估计值将很容易得到:

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{i00}$$

$$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i00}-\hat{\mu}_1)^2$$

$$\hat{\mu}_2=\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}y_{i0}$$

$$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}(y_{i0}-\hat{\mu}_2)^2$$

若以 Arrhenius 温度加速模型为例,此时漂移系数 $d(s)$ 中的应力 s 为温度 T,即 $d(T)=\exp(A-B/T)$.同样根据实测数据基于极大似然法,分别估计强度随时间变化的齐次漂移布朗运动和应力随时间变化的对称布朗运动的均值与方差.两种布朗运动的极大似然函数为

$$\left.\begin{aligned}
&L_X\propto\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{K}\prod_{j=1}^{M_k}f_X(\Delta x_{ikj},\Delta t)=\\
&\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{K}\prod_{j=1}^{M_k}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{B1}^2\Delta t}}\cdot\\
&\exp\left\{-\frac{[(x_{ikj}-x_{ik(j-1)})-\Delta t\exp(A-B/T_k)]^2}{2\sigma_{B_1}^2\Delta t}\right\}\\
&L_Y\propto\prod_{i=1}^{L}\prod_{j=1}^{M'}f_Y(\Delta y_{ij},\Delta t')=\\
&\prod_{i=1}^{L}\prod_{j=1}^{M'}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{B_2}^2\Delta t'}}\exp\left\{-\frac{[(y_{ij}-y_{i(j-1)})]^2}{2\sigma_{B_2}^2\Delta t'}\right\}
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

则 $\sigma_{B_1}^2$ 和 $\sigma_{B_2}^2$ 的极大似然估计如下:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{B_1}^2=&\frac{1}{n\sum_{k=1}^{K}M_k\Delta t}\sum_{i=k}^{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{M_k}[(x_{ikj}-x_{ik(j-1)})-\\
&\Delta t\exp(\hat{A}-\hat{B}/T_K)]^2\\
\hat{\sigma}_{B_2}^2=&\frac{1}{LM'\Delta t'}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{M'}(y_{ij}-y_{i(j-1)})^2
\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

其中,Arrhenius 模型参数 A 和 B 将采用文献[10]的方法进行估计.将上述评估值代入式(6)可得 $\hat{\mu}_B$ 和 $\hat{\sigma}_B^2$.

2.4　仿　真

n 个 iid.系统进行 2 水平($K=2$)的温度步进应力 ASDT.假设系统的温度工作极限为 100℃,该系统的正常工作温度为 70℃.且假设系统工作极限受温度影响,且其衰退速率由 Arrhenius 模型 $d(T)=\exp(A-B/T)$确定.仿真参数见表 1.

表 1　工作极限的退化参数信息

参数	真值	参数	真值	参数	真值
σ_{B_1}	0.1	σ_1	5	M_1	300
μ_1	100	σ_2	7	M_2	200
σ_{B_2}	0.2	A	10.669	L	100
μ_2	70	B	5802	$\Delta t=\Delta'$	2
K	2	n	300	M'	500

仿真结果如图 3 和图 4 所示.

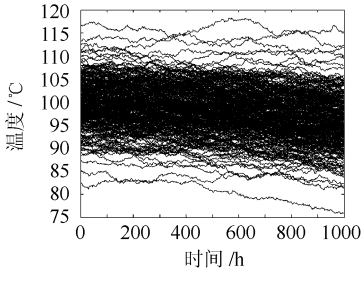

图 3　ASDT 的工作极限仿真结果

根据 2.3 节介绍的评估方法以及式(6)和式

(9)可得表2所示的正常条件下IMSDⅠ的可靠度估计值及表3所示的各参数评估结果.其中,可靠度估计曲线以及仿真可靠度真实曲线如图5.

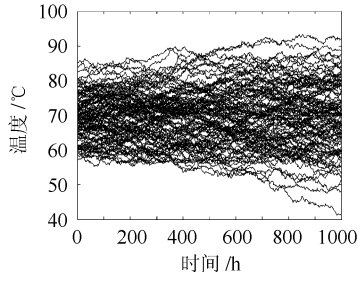

图4 ASDT的环境应力仿真结果

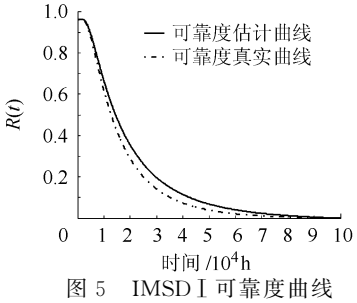

图5 IMSDⅠ可靠度曲线

表2 可靠度仿真结果

可靠度指标	估计值	仿真真值	相对误差/%
$\hat{R}\rightarrow\hat{R}_Z$ 初始可靠度	0.9747	0.9643	1.08
R(5 000 h)	0.8906	0.8748	1.81
中位寿命 $t_{0.5}$	14 450 h	12 751 h	13.32

表3 参数仿真评估结果

参 数	点估计值	相对误差/%
$\hat{\sigma}_{B_1}$	0.1008	0.80
$\hat{\sigma}_{B_2}$	0.1994	0.30
$\hat{\sigma}_1$	5.0947	1.89
$\hat{\sigma}_2$	6.2000	3.3
$\hat{\mu}_1$	100.2155	0.22
$\hat{\mu}_2$	70.3959	0.57
$\hat{A}$	12.9716	21.58
$\hat{B}$	6658.1421	14.76

3 结束语

本文从工程的角度出发,提出通过应力-强度干涉修正模型确定的产品可靠度是,在产品初始固有可靠性水平影响下,产品的干涉变量不由初始状态退化到某时刻状态的概率,从而建立了*IMSD*Ⅰ,并且进行了仿真验证.仿真结果表明,该模型能够很好的解决系统可靠性在零时刻为1的问题,且估计过程简单易行.因此该模型具有较好的工程可操作性.但由于该模型是基于漂移布朗运动的首达时分布而来,因此当时间等于零时,依然存在首达时分布中代数式$|\mu|/(\sigma_B\sqrt{2\pi t^3})$分母等于零的问题,所以通过该模型还是只能得到时间变量无限趋近于零的可靠度.

参考文献(References)

[1] 曾生奎,赵廷弟,张建国,等.系统可靠性设计与分析[M].北京:北京航空航天大学出版社,2001:198-202
Zeng Shengkui, Zhao Tingdi, Zhang Jianguo, et al. System reliability design and analysis[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2001:198-202(in Chinese)

[2] Chan H Anthony, Englert Paul J. Accelerated stress testing handbook, guide of achieving quality products [M]. New York: IEEE Press, 2001: 11-19

[3] 姚军,曹心宽,姜同敏.可靠性强化试验定量评估方法[J].北京航空航天大学学报,2006,32(1):117-120
Yao Jun, Cao Xinkuan, Jiang Tongmin. Quantitative assessment approach of RET based on interference mode[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006, 32(1): 117-120(in Chinese)

[4] Samuel Kotz, Yan Lumelskii, Marianna Pensky. The stress-strength model and its generalizations [M]. [S. l.]: World Scientific, 2003: 195-197

[5] Wei Huang. Reliability analysis considering product performance degradation [D]. Arizona: Department of System & Industrial Engeneering, the University of Arizona, 2002

[6] Huang Wei, Askin Ronald G. A generalized SSI reliability model considering stochastic loading and strength aging degradation [J]. IEEE Transactions On Reliability, 2004, 53(1):77-82

[7] Chiodo Elio, Mazzanti Giovanni. New models for reliability evaluation of power system components subjected to transient over voltages[C]// IEEE Power Engineering Society General Meeting, PES. Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers Computer Society, 2006: 1709028

[8] 赵建印,孙权,周经伦.周期性随机应力强度退化下的SSI可靠性模型研究[J].应用科学学报,2006,24(5):529-532
Zhao Jianyin, Sun Quan, Zhou Jinglun. Stress-strength interference reliability analysis considering cyclic stochastic stress and strength aging degradation[J]. Journal of Applied Sciences, 2006, 24(5):529-532(in Chinese)

[9] 孙权,赵建印,周经伦.复合应力作用下强度退化的应力-强度干涉模型可靠性统计分析[J].计算力学学报,2007,24(3):358-361
Sun Quan, Zhao Jianyin, Zhou Jinglun. Stress-strength interference reliability analysis considering stochastic multi-stress and strength aging degradation[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2007, 24(3): 258-361(in Chinese)

[10] 李晓阳,姜同敏.基于加速退化模型的卫星组件寿命与可靠性评估方法[J].航空学报,2007,28(增刊):S100-S103
Li Xiaoyang, Jiang Tongmin. Constant-stress accelerated degradation testing of satellite assemblies[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2007,28(Sup): S100-S103(in Chinese)

(责任编辑:娄 嘉)