Reissner型矩形板分析的U变换-有限元法

陈富利 蒋持平

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院,北京 100191)

摘 要:将U变换法推广应用于Reissner矩形板的有限元分析中.对原结构进行等效变换,形成周期循环的板单元,使刚度矩阵成为循环矩阵,应用双重U变换解耦了有限元的矩阵方程,使有限元计算只须在一个板单元上进行,并且仍能方便分析整个板的一般分布载荷.所发展的U变换-有限元法不仅提高了计算效率,很快收敛于精确解,对于简支板还给出了精确分析的有限元解、准确的误差估计表达式和收敛速度,可以直接掌控计算精度,这是其它方法难以得到的.对简支和固支矩形板的数值算例及与其它方法的对比说明了U变换-有限元法的优点和重要的工程实用价值.

关 键 词:Reissner矩形板;U变换;有限元法;误差分析

中图分类号:O 242.21

文献标识码:A **文 章 编 号**:1001-5965(2008)11-1303-04

U-transformation finite element method in analysis of Reissner rectangular plates

Chen Fuli Jiang Chiping

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The U-transformation method was applied to the Reissner rectangular plates. The actual plate was extended to make up an equivalent cyclic periodicity system and the plate elements become cyclic periodic elements, whereby the stiffness matrix become a cyclic matrix and the finite element matrix equation was uncoupled by using double U-transformation. This method can easily analyze the plate with arbitrarily distributed loads and the calculation is only performed for one element. The method has high computational efficiency and can quickly converge to exact solutions. The exact analytical finite element solution, the exact error expression and exact convergence rate are derived. These results can be not obtained if other methods are used instead. Numerical examples of rectangular plates with simply supported or clamped edges and a comparison with other methods show the advantages and practical importance of the U-transformation finite element method in engineering analysis.

Key words: Reissner rectangular plates; U-transformation; finite element method; error analysis

矩形板是结构工程中重要的结构形式之一,广泛应用于航天、航空、船舶、土建等工程领域.与经典Kirchhoff平板理论相比,Reissner板理论在保持其作为二维平板理论,计算工作量增加不多的条件下,考虑了板的横向剪切变形的作用,大大拓展了平板理论的应用范围,已经广泛应用于中厚板、夹层板、多层复合板等工程分析中.关于考虑剪切变形板的研究有多种方法,如:有限元法[1]、有限条法[2]、微分求积单元法[3]、离散奇异卷积法[4]等.研究者们仍然在不断追求精度和效率更高的分析方法.

有限元法是工程分析中广泛采用的分析方

收稿日期:2007-11-06

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10672008)

作者简介:陈富利(1980—),男,山东新泰人,博士生,flchen@ase.buaa.edu.cn.

法.当计算精度要求增加时,单元网格必须细化,工作量急剧增加,提高精度和降低工作量一直是工程分析的重要课题.

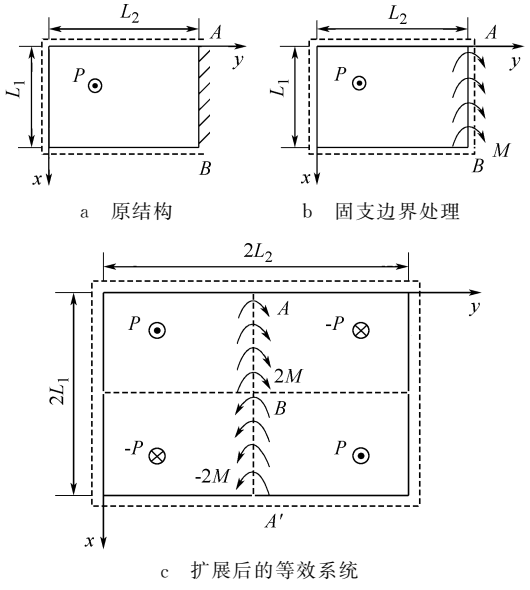
文献[5]提出了研究周期循环系统的U变换方法,将周期循环系统解耦,大大提高了计算效率.本文将Reissner矩形板进行等效变换,构成了周期循环的板单元,解耦了有限元矩阵方程,发展了Reissner矩形板分析的U变换-有限元法.

1 有限元矩阵方程及其解耦

有限元矩阵方程表达格式一般为

$$\boldsymbol{K\delta}=\boldsymbol{F} \tag{1}$$

其中$\boldsymbol{K}$,$\boldsymbol{\delta}$和$\boldsymbol{F}$分别为组装后的刚度矩阵、节点位移向量和载荷向量,采用U变换有限元法的目的是将式(1)对矩形单元解耦求解,使有限元计算只须在一个板单元上进行,并且仍能方便分析整个板的一般分布载荷.该方法的关键是将$\boldsymbol{K}$转化为循环矩阵,因此需要将原结构进行等效变换,形成周期循环的板单元.以三边简支一边固支板为例,其等效变换和扩展流程如图1所示.



a 原结构 b 固支边界处理

c 扩展后的等效系统

图1 三边简支一边固支板等效周期循环扩展

将原结构的固支边界AB(图1a)等效为具有未知约束反力M的简支边(图1b),并且使得

$$\theta_y=0 \qquad \text{在 } AB \text{ 边上} \tag{2}$$

从而等效扩展为图1c所示的周期循环系统.为了进一步满足单元周期循环的性质,网格划分为$2m\times 2n$个矩形单元如图2所示[5].

至此,$\boldsymbol{K}$满足循环矩阵的要求,根据循环矩阵的性质,令变换:

$$\boldsymbol{\delta}_{(j,k)}=\frac{1}{\sqrt{2m}\sqrt{2n}}\sum_{r=1}^{2m}\sum_{s=1}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-1)r\psi_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-1)s\psi_2}\boldsymbol{q}_{(r,s)}$$

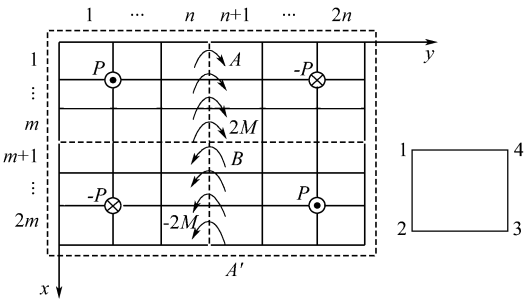


图2 周期循环单元的网格划分

$$j=1,2,\cdots,2m \qquad k=1,2,\cdots,2n \tag{3}$$

其中,$\psi_1=\pi/m$;$\psi_2=\pi/n$;$\boldsymbol{\delta}_{(j,k)}$表示$(j,k)$单元节点位移向量;$\boldsymbol{q}_{(r,s)}$称为广义位移向量.式(3)即为U变换方程,将其带入式(1)化简后得

$$\boldsymbol{K}_{(r,s)}\boldsymbol{q}_{(r,s)}=\boldsymbol{f}_{(r,s)}$$
$$r=1,2,\cdots,2m \qquad s=1,2,\cdots,2n \tag{4}$$

可以证明$\boldsymbol{K}_{(r,s)}$即为单元刚度矩阵$\boldsymbol{K}^{\mathrm{e}}$,并且

$$\boldsymbol{f}_{(r,s)}=\frac{1}{\sqrt{2m}\sqrt{2n}}\sum_{j=1}^{2m}\sum_{k=1}^{2n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(j-1)r\psi_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-1)s\psi_2}\boldsymbol{F}_{(j,k)} \tag{5}$$

其中$\boldsymbol{F}_{(j,k)}$表示单元(j,k)的节点载荷向量.

结合单元的连续条件和周期循环条件,式(4)可以继续化简为

$$\boldsymbol{K}^{*}_{(r,s)}\boldsymbol{q}_{1(r,s)}=\boldsymbol{f}^{*}_{(r,s)}$$
$$r=1,2,\cdots,2m \qquad s=1,2,\cdots,2n \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{q}_{(r,s)}=\boldsymbol{T}_{(r,s)}\boldsymbol{q}_{1(r,s)} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{K}^{*}_{(r,s)}=\overline{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}_{(r,s)}\boldsymbol{K}_{(r,s)}\boldsymbol{T}_{(r,s)} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{f}^{*}_{(r,s)}=\overline{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}_{(r,s)}\boldsymbol{f}_{(r,s)} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{T}_{(r,s)}=\left[\boldsymbol{I}_3,\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\psi_1}\boldsymbol{I}_3,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(r\psi_1+s\psi_2)}\boldsymbol{I}_3,\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\psi_2}\boldsymbol{I}_3\right]^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

其中,$\boldsymbol{q}_{1(r,s)}$表示$\boldsymbol{q}_{(r,s)}$的第1组分量;$\overline{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}_{(r,s)}$表示$\boldsymbol{T}_{(r,s)}$的共轭转置;$\boldsymbol{I}_3$表示3阶单位矩阵.

针对具体问题,根据式(6)可求解广义位移向量分量$\boldsymbol{q}_{1(r,s)}$,将其回代入式(7)和式(3),从而求解整个板的位移场.

2 简支方板板中挠度精确表达式

均布载荷p_0作用于四边简支Reissner方板时,结合四边形厚薄板通用单元TMQ[6],式(8)可改写为

$$\boldsymbol{K}^{*}_{(r,s)}=\overline{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}_{(r,s)}(\boldsymbol{K}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{K}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{s}})\boldsymbol{T}_{(r,s)} \tag{11}$$

式中$\boldsymbol{K}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{b}}$,$\boldsymbol{K}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{s}}$分别为TMQ单元的弯曲刚度矩阵和剪切刚度矩阵.此时有$L_1=L_2=L$,$m=n$,$\psi_1=\psi_2=\psi$,求解$\boldsymbol{q}_{1(r,s)}$得

$$q_{(r,s)1}=\begin{cases}\Delta_1/\Delta & r,s=1,3,\cdots,2n-1\\ 0 & r\text{ 或 }s=2,4,\cdots,2n\end{cases}\tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta=&k_{11}k_{22}k_{33}-k_{13}k_{22}k_{31}+k_{12}k_{23}k_{31}+\\&k_{13}k_{21}k_{32}-k_{11}k_{23}k_{32}-k_{12}k_{21}k_{33}\\ \Delta_1=&bk_{22}k_{33}-bk_{23}k_{32}\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

$$b=\frac{-8p_0a^2}{D_0n}\cot\frac{r\psi}{2}\cot\frac{s\psi}{2}\tag{14}$$

其中,$k_{ij}(i,j=1,2,3)$为 $\boldsymbol{K}^*_{(r,s)}$ 的分量;$q_{(r,s)1}$ 表示 $\boldsymbol{q}_{1(r,s)}$ 的第 1 个分量.

单元(j,k)上第 1 个节点的挠度可以表达为

$$w_{(j,k)1}=\frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{2n}\sum_{s=1}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-1)r\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-1)s\psi}q_{(r,s)1}\tag{15}$$

当单元划分为偶数份,即 n 为偶数时,方板的最大位移发生在中心点上,对应此时的单元(j,k)为$(n/2+1,n/2+1)$.将其带入式(15),并对式中 $q_{(r,s)1}$ 的 ψ 泰勒展开,则式(15)可化简为

$$\begin{aligned}w_{\max}=&\frac{16p_0L^4}{\pi^6D_0}\Bigg\{\sum_{r=1,3}^{\infty}\sum_{s=1,3}^{\infty}\sin\frac{r\pi}{2}\sin\frac{s\pi}{2}\cdot\\&\left[\frac{1}{rs(r^2+s^2)^2}+\frac{\pi^2\beta^2}{5s(r^3+rs^2)(1-\nu)}\right]+\\&\sum_{r=1,3}^{\infty}\sum_{s=1,3}^{\infty}\sin\frac{r\pi}{2}\sin\frac{s\pi}{2}\cdot\\&\left[\frac{\pi^2(-2r^4-2s^4+r^2s^2(1+\nu))}{24rs(r^2+s^2)^3}-\right.\\&\left.\frac{\pi^4rs\beta^2}{30(r^2+s^2)^2(\nu-1)}\right]n^{-2}+O(n^{-4})\Bigg\}\end{aligned}\tag{16}$$

其中,厚跨比 $\beta=t/L$,t 为板厚,L 为边长;ν 为泊松比;$D_0=\dfrac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$为板的弯曲刚度.

由式(16)可以看出第 1 项即是精确解,第 2 项则是有限元法主要误差的显式表达,实际计算中只能取有限项,后面算例中详细讨论了式(16)的收敛性.

3　含固支边界条件矩形板的求解

3.1　三边简支一边固支矩形板约束反力的求解

前面已经介绍了三边简支一边固支矩形板的扩展过程.将已知的载荷向量经 U 变换后表达为 $\boldsymbol{f}^{*\mathrm{S}}_{(r,s)}$,对应固支边界上的未知约束反力经 U 变换后形成的载荷向量表示为 $\boldsymbol{f}^{*\mathrm{SC}}_{(r,s)}$,则此时系统的载荷向量为

$$\boldsymbol{f}^*_{(r,s)}=\boldsymbol{f}^{*\mathrm{S}}_{(r,s)}+\boldsymbol{f}^{*\mathrm{SC}}_{(r,s)}\tag{17}$$

由式(6)求得 $\boldsymbol{q}_{1(r,s)}$ 为

$$\boldsymbol{q}_{1(r,s)}=\boldsymbol{K}^{*-1}_{(r,s)}\boldsymbol{f}^*_{(r,s)}\tag{18}$$

将式(18)带入式(3),并考虑到约束反力为 $y=L_2$ 边界上的力矩,则 $\boldsymbol{f}^{*\mathrm{SC}}_{(r,s)}$ 有如下形式:

$$\boldsymbol{f}^{*\mathrm{SC}}_{(r,s)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\pi}\{0,0,f_r^{*\mathrm{SC}}\}^{\mathrm{T}}\tag{19}$$

结合式(2),得

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{2m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-1)n\psi_1}\sum_{s=1}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\pi}&(\boldsymbol{K}_3^{*-1}\boldsymbol{f}^{*\mathrm{S}}_{(r,s)}+\\&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\pi}K^{*-1}_{(3,3)}f_r^{*\mathrm{SC}})=0\\ j=1,2,\cdots,2m&\end{aligned}\tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{K}_3^{*-1}$,$K^{*-1}_{(3,3)}$分别表示矩阵 $\boldsymbol{K}^{*-1}_{(r,s)}$ 的第 3 行元素组成的向量和第(3,3)个元素.

由于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-1)n\psi_1}(r,j=1,2,\cdots,2m)$表达的矩阵是满秩方阵,因此式(20)只存在唯一零解:

$$\sum_{s=1}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\pi}(\boldsymbol{K}_3^{*-1}\boldsymbol{f}^{*\mathrm{S}}_{(r,s)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\pi}K^{*1}_{(3,3)}f_r^{*\mathrm{SC}})=0\tag{21}$$

进一步求解 $f_r^{*\mathrm{SC}}$ 得

$$f_r^{*\mathrm{SC}}=\frac{-\sum_{s=1}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\pi}\boldsymbol{K}_3^{*-1}\boldsymbol{f}^{*\mathrm{S}}_{(r,s)}}{\sum_{s=1}^{2n}K^{*-1}_{(3,3)}}\tag{22}$$

3.2　对边简支对边固支矩形板约束反力的求解

考虑在 $y=0$,$y=L_2$ 处为固支边界条件的对边简支对边固支矩形板,其扩展后固支边界上的未知约束反力经 U 变换后形成的载荷向量表示为 $\boldsymbol{f}^{*\mathrm{CC}}_{(r,s)}$,仿式(17):

$$\boldsymbol{f}^*_{(r,s)}=\boldsymbol{f}^{*\mathrm{S}}_{(r,s)}+\boldsymbol{f}^{*\mathrm{CC}}_{(r,s)}\tag{23}$$

由于约束反力为 $y=0$,$y=L_2$ 边界上的力矩,则 $\boldsymbol{f}^{*\mathrm{CC}}_{(r,s)}$有如下形式:

$$\boldsymbol{f}^{*\mathrm{CC}}_{(r,s)}=\{0,0,f_{r1}^{*\mathrm{CC}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\pi}f_{r2}^{*\mathrm{CC}}\}^{\mathrm{T}}\tag{24}$$

则类似于三边简支一边固支矩形板的分析过程,求解

$$\left.\begin{aligned}f_{r1}^{*\mathrm{CC}}&=\frac{A_2B_2-A_1B_1}{B_1^2-B_2^2}\\ f_{r2}^{*\mathrm{CC}}&=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{B_1^2-B_2^2}\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\sum_{s=1}^{2n}\boldsymbol{K}_3^{*-1}\boldsymbol{f}^{*\mathrm{S}}_{(r,s)}\\ A_2&=\sum_{s=1}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\pi}\boldsymbol{K}_3^{*-1}\boldsymbol{f}^{*\mathrm{S}}_{(r,s)}\\ B_1&=\sum_{s=1}^{2n}K^{*-1}_{(3,3)}\\ B_2&=\sum_{s=1}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\pi}K^{*-1}_{(3,3)}\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

对于其它几种边界形式:邻边简支邻边固支、三边固支一边简支、四边固支等 Reissner 矩形板的求解形式类似,这里不再赘述.特别注意的是上述 3 种情况下求解未知载荷时需要选择 $f_r^{*\mathrm{SC}}$,$f_{r1}^{*\mathrm{CC}}$,$f_{r2}^{*\mathrm{CC}}$作为迭代初值进行求解.

4　数值算例

为方便与文献结果比较,本文计算了边长为

L,$\nu=0.3$ 的方形 Reissner 板.

1) $\beta=0.2$ 的四边简支方板,作用有均布载荷 p_0 时,取有限项计算式(16),考察其第 1 项记为 w_1 与第 2 项即主要误差的收敛性,并与传统有限元结果(取 1/4 模型计算)比较,板中挠度因子 w_0 ($w=w_0 p_0 L^4/1\,000D_0$)的计算结果见表 1.

表 1 均布载荷作用简支方板 w_0 的计算结果

$m\times n$	w_1	主要误差	文献[6]
4×4	4.880 5	−0.060 7	4.856 4
8×8	4.901 4	−0.016 9	4.888 9
16×16	4.904 0	−0.004 3	4.900 1
32×32	4.904 3	−0.001 1	4.903 2

由表 1 结果可以看出单元划分相同情形下,本文解精度高于传统有限元解(精确解为4.906),主要误差项收敛速度快.

2) 考察均布载荷作用下,对边简支对边固支与四边固支方板的 w 和固支边界中点($x=L_1/2$, $y=L_2$)的弯矩 M. 为了方便与文献[7]结果比较,引入 $\Lambda=\beta^2/5(1-\nu)$,w_0 和弯矩因子 M_0 ($M=M_0 p_0 L^2$)的计算结果见表 2、表 3.

表 2 对边简支对边固支方板在 $n=20$ 时 w_0 和 M_0 的计算结果

Λ	w_0		M_0	
	本文解	文献[7]	本文解	文献[7]
0	1.924 3	1.92	−0.069 693	−0.069 8
0.01	2.895 1	2.89	−0.064 513	−0.063 5
0.02	3.788 5	3.79	−0.060 024	−0.058 5
0.03	4.640 7	4.64	−0.056 559	−0.054 8
0.04	5.467 2	5.47	−0.053 819	−0.051 8

表 3 四边固支方板在 $n=20$ 时 w_0 和 M_0 的计算结果

Λ	w_0		M_0	
	本文解	文献[7]	本文解	文献[7]
0	1.274 3	1.26	−0.052 531	−0.051 3
0.01	2.070 1	2.07	−0.048 459	−0.046 4
0.02	2.826 8	2.82	−0.046 479	−0.044 5
0.03	3.574 2	3.57	−0.045 421	−0.043 6
0.04	4.318 0	4.32	−0.044 775	−0.043 0

以上结果可以看出本文方法仅在一个单元上计算,不仅提高了工作效率,结果亦满足较高的精度要求.

5 结 论

将 U 变换推广应用于 Reissner 矩形板的有限元分析中,通过等效变换形成周期循环的板单元.从而对有限元的矩阵方程解耦,使有限元计算只须在一个板单元上进行.本文所发展的 U 变换-有限元法不仅大大提高了计算效率,很快收敛于精确解,同时还能给出误差估计的显式表达式,直接掌控计算精度,具有重要的工程实用价值.

参考文献(References)

[1] 党发宁,荣廷玉,孙训方. Reissner 板问题的有限元广义混合法[J]. 计算力学学报,2000,17(2):218−221
Dang Faning, Rong Tingyu, Sun Xunfang. Generalized mixed finite elements method of Reissner plates[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2000, 17(2):218−221 (in Chinese)

[2] Gagnon P, GosselIn C, Cloutier L. A finite strip element for the analysis of variable thickness rectangular thick plates[J]. Computers and Structures, 1997, 63(2):349−362

[3] Liu F L, Liew K M. Analysis of vibrating thick rectangular plates with mixed boundary constraints using differential quadrature element method[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 225(5): 915−934

[4] Civalek O. Three-dimensional vibration, buckling and bending analyses of thick rectangular plates based on discrete singular convolution method[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2007, 49(6):752−765

[5] Chan H C, Cai C W, Cheung Y K. Exact analysis of structures with periodicity using U-transformation[M]. Singapore: World Scientific, 1998

[6] 龙志飞,岑松. 有限元法新论——原理·程序·进展[M]. 北京:中国水利水电出版社,2001
Long Zhifei, Cen Song. Finite element method: principle, program and advancement [M]. Beijing: China Water Conservancy and Hydropower Press, 2001(in Chinese)

[7] 中国科学院北京力学研究所,固体力学研究室板壳组. 夹层板壳的弯曲、稳定和振动[M]. 北京:科学出版社,1977
Chinese Academy of Science Beijing Mechanics Research Institute, Plate Group of Solid Mechanics Research Office. The bending, stabilization and vibration of sandwich plate and shell[M]. Beijing: Science Press, 1977(in Chinese)

(责任编辑:赵海容)