单圆轨道扫描的 Grangeat 改进算法

魏东波 张立凯 傅 健

(北京航空航天大学 机械工程及自动化学院，北京 100191)

摘 要：为减少 ICT(Industrial Computed Tomography)重建图像的伪影，研究了 Grangeat 精确重建算法的原理.基于平板探测器依次通过对投影数据沿行、列一阶偏微分，求 Radon 导以及两步反投影等步骤仿真实现了 Grangeat 算法.针对单圆轨道锥束扫描投影数据的不完备性，分析了 Radon 空间的数据缺失情况，提出了通过近邻插值、线性插值、二次三点插值和一元线性回归插值的方法对 Radon 空间缺失数据进行插值改进该算法的几种途径.计算机仿真结果证明了改进算法的正确性和可行性.

关 键 词：锥束；CT；精确重建；Radon 变换

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2009)02-0170-04

Modified Grangeat algorithm as apply to a circular scan orbit

Wei Dongbo Zhang Likai Fu Jian

(School of Mechanical Engineering and Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: To compensate for artifacts in reconstructed images of industrial computed tomography (ICT), Grangeat type exact cone beam reconstruction algorithm was studied. Grangeat algorithm based on flat detector was implemented by the steps of computing first partial derivatives of cone-beam projection data along rows and lines respectively, first partial derivatives of Radon data, back-projection and so on. Due to the missed data of a circular scan orbit, the incomplete Radon space was analyzed. The nearest-neighbor interpolation, linear interpolation, 3-points quadratic interpolation and one-dimensional linear regression interpolation methods were used to estimate missed data respectively, and the effects of different methods on the image quality were examined. The compute simulation results prove the validity of proposed methods.

Key words: cone beam; computed tomography (CT); exact reconstruction; Radon transform

出于重建算法计算量和工程实现可行性的考虑，基于单圆轨道扫描方式的 FDK(Feldkamp, Davis and Kress)重建算法[1]和 Grangeat 重建算法[2]等得到了广泛的应用.其中，Grangeat 重建算法不仅理论上可以实现精确重建，而且通过求取 Radon 导的计算办法[3]极大地提高了该算法的可行性.

由于单圆轨道锥束扫描不能获得完备的投影数据[4-5]，本文通过研究多种数值和统计的插值方法，合理外推缺失数据的值，获得完备的 Radon 空间导数值，然后采用 Grangeat 方法重建物体，有效抑制了伪影，提高了图像质量.

1 Grangeat 重建算法

1.1 算法原理

如图 1，S 为射线源点，单圆轨迹在 xy 平面内；物体由坐标系 xyz 表示；探测器平面 pq 记为 D_ψ；Radon 空间中由(ρ, θ)构成的极坐标平面 rz 记为 M_ϕ；假设 A 为探测器上任一点，SA 为射线投影方向，D_{SA}为线段 SA 的长度；通过 SA、法向为 $\boldsymbol{n}$ 的积分平面与 D_ψ相交，交线为 t，过 O 点作垂直于 t 的向量 $\boldsymbol{n}_D$；D_{SO}为射线源到探测器的距离.

收稿日期：2008-07-20

基金项目：国家自然科学基金资助项目(50575015, 50875013)；航空科学基金资助项目(20070951023)；北京市教育委员会共建项目

作者简介：魏东波(1952—)，男，湖北赤壁人，教授，weidongbo1019@yahoo.com.cn.

首先根据式(1)对锥束投影 g 进行加权,得到加权投影 G,然后利用式(2)对加权投影 G 重排计算,得到 Radon 变换的一阶导数 R',最后根据式(3)进行卷积反投影重建,得到重建结果 f.

$$G(S,A)=\frac{D_{SO}}{D_{SA}}g(S,A) \tag{1}$$

$$R'(\rho\boldsymbol{n})=\frac{1}{\cos^2\beta}\frac{\partial}{\partial s}\int_{-\infty}^{\infty}G(S,A)\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$f(\bar{x})=-\frac{1}{8\pi^2}\cdot$$

$$\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}R((\boldsymbol{xn}),\boldsymbol{n})\mid\sin\theta\mid\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta \tag{3}$$

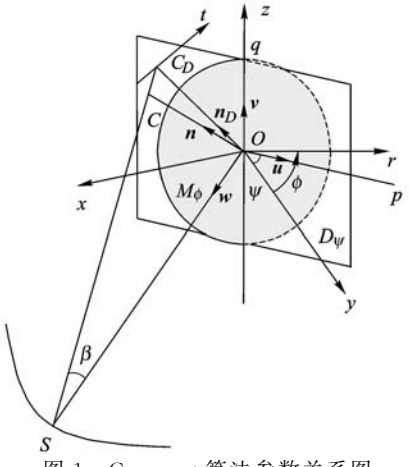


图 1　Grangeat 算法参数关系图

1.2　Grangeat 算法的具体实现

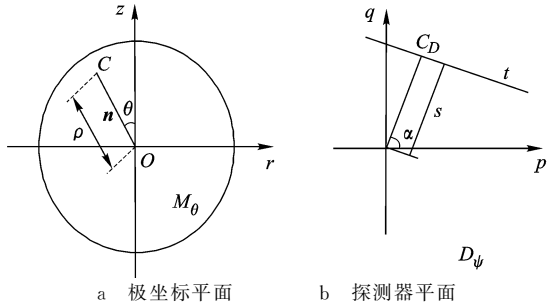
1.2.1　重　排

针对极坐标平面 M_ϕ 上的任一点(ρ,θ,ϕ),通过图 2 所示的 Radon 空间极坐标平面 M_ϕ 和探测器平面 D_ψ 的关系,利用式(4)确定其对应的探测器平面 D_ψ 即特征点 $C_D(s,\alpha,\Psi)$,然后利用式(2)通过求沿积分平面与探测器平面交线 t 的线积分获得 Radon 空间中的面积分,最后进行偏导和角度加权计算,得到 Radon 变换的一阶导数.

$$\left.\begin{aligned}s(\rho)&=\frac{\rho D_{SO}}{\sqrt{D_{SO}^2-\rho^2}}\\ \alpha(\rho,\theta)&=\arctan\frac{\theta}{\mid\theta\mid}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{D_{SO}^2-\rho^2}{D_{SO}^2\cos^2\theta}-1}}\\ \Psi(\rho,\theta,\phi)&=\phi+\arcsin\frac{\rho}{D_{SO}\sin\theta}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

当 $\rho>D_{SO}\sin\theta$ 时对应 Radon 数据的缺失区域,为方便计算机实现,将式(2)进一步转化为式(5),即将沿直线 s 的微分分解为沿探测器行和列的积分,再进行角度加权.

$$R'(\rho\boldsymbol{n})=\frac{1}{\cos^2\beta}\Big(\cos\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial p}\frac{D_{SO}}{D_{SA}}g(s(\rho\boldsymbol{n}),t)\mathrm{d}t+\sin\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial q}\frac{D_{SO}}{D_{SA}}g(s(\rho\boldsymbol{n}),t)\Big)\mathrm{d}t) \tag{5}$$



a　极坐标平面　　b　探测器平面

图 2　Grangeat 参数结构的投影平面

1.2.2　重　建

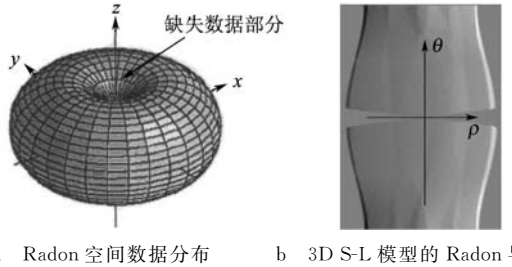
根据 Marr 的方法[6],Grangeat 重建算法分两步完成,首先利用式(6)在每一个 M_ϕ 平面上对插值后的三维 Radon 导数进行卷积,得到第一步卷积重建的结果 $H(\phi,B)$,B 为 M_ϕ 与 xy 平面的交点,然后在 xy 平面利用式(7)对 $H(\phi,\beta)$ 进行反投影重建,得到重建结果 f.

$$H(\phi,B)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial' R}{\partial\rho}((\boldsymbol{xn}),\boldsymbol{n})\mid\sin\theta\mid\mathrm{d}\theta \tag{6}$$

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\int_{\phi=0}^{2\pi}H(\phi,B(\phi,x))\mathrm{d}\phi \tag{7}$$

1.3　单圆轨道 Radon 数据的缺失

由于单圆轨道锥束扫描投影数据的不完备性,Radon 空间出现如图 3 所示的数据缺失,Grangeat 算法的重建结果会出现明显的伪影,并且该伪影随锥角的增大而越发严重.本文研究证明通过对数据缺失部分进行合理插值可以有效地抑制由 Radon 空间数据缺失导致的图像伪影.



a　Radon 空间数据分布　　b　3D S-L 模型的 Radon 导

图 3　圆轨迹扫描下得到的数据范围

2　改进算法

通过对 Radon 空间中 M_ϕ 平面数据的缺失部分进行合理插值,得到完整的三维 Radon 导数分

布,然后利用完备数据进行精确重建,从而修正了单圆轨道锥束扫描数据缺失带来的误差.

2.1 数值方法插补缺失数据

1) 连续填充

连续填充,又称近邻插值,原理是利用缺失像素值 $r'(\rho,\theta)$ 邻近的像素值替代缺失像素值.该方法简单直观,计算机实现容易,但由于缺失像素直接使用与之近邻的像素灰度值生成,因此重建图像细节模糊,分辨率较低.

2) 线性插值

线性插值的算法原理如图 4 所示,利用已知的两个像素点 (x_0,y_0), (x_1,y_1) 确定未知点 (x',y') 的像素值,根据直线的点斜式,得

$$y'=y_0+(y_1-y_0)\times(x'-x_0)/(x_1-x_0) \tag{8}$$

该算法简单高效,计算量小,克服了连续填充导致的图像细节分辨率较低的缺点.

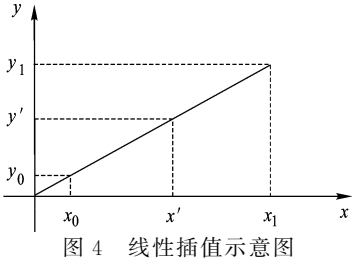


图 4 线性插值示意图

3) 二次三点插值

基于抛物线二次三点插值方法的原理是:首先根据 x_k, x' 与 x_{k+1}, $x_k<x'<x_{k+1}$ 的关系选取最靠近插值点 x' 处的的 3 个节点,如果 $|x_k-x'|>|x'-x_{k+1}|$,则取 3 个节点为 x_k, x_{k+1}, x_{k+2};如果 $|x_k-x'|<|x'-x_{k+1}|$,则取 3 个节点为 x_{k-1}, x_k, x_{k+1}.然后利用式(9)计算未知点 x' 处的像素 y'.

$$y'=\sum_{i=m}^{m+2}y_i\prod_{j=m,j\neq i}^{m+2}\left[\frac{(x'-x_j)}{(x_i-x_j)}\right] \tag{9}$$

该方法获得的插补结果较好.

2.2 统计方法插补缺失数据

本文采用一元线性回归插值方法:设随机变量 y 随自变量 x 变化,根据 n 组已知数据 (x_i,y_i) $(i=0,1,\cdots,n-1)$,首先用式(10)~式(12)确定回归系数 a, b,然后用直线 $y=ax+b$ 做回归分析.

$$Q=\sum_{i=0}^{n-1}[y_i-(ax_i+b)]^2 \tag{10}$$

a, b 满足下列两个方程:

$$\frac{\partial Q}{\partial a}=2\sum_{i=0}^{n-1}[y_i-(ax_i+b)](-x_i)=0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b}=2\sum_{i=0}^{n-1}[y_i-(ax_i+b)](-1)=0$$

可得

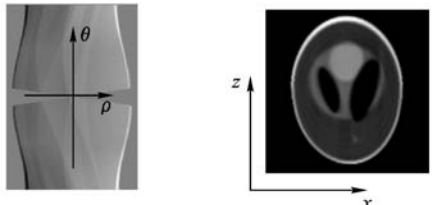
$$a=\sum_{i=0}^{n-1}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\Big/\sum_{i=0}^{n-1}(x_i-\overline{x})^2 \tag{11}$$

$$b=\overline{y}-a\,\overline{x} \tag{12}$$

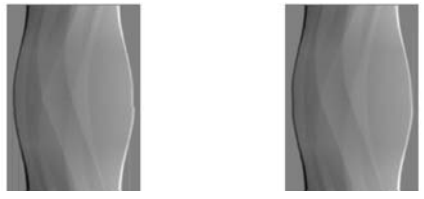
其中 $\overline{x}=\sum_{i=0}^{n-1}x_i/n$ $\overline{y}=\sum_{i=0}^{n-1}y_i/n$

3 仿真实验

本文采用 3D S-L 模型,通过计算机仿真,运用 2.1,2.2 所述的插值方法对 Radon 导数图像插值,插值结果如图 5 所示,然后用式(6)、式(7)重建得到如图 6 所示的重建结果.



a 缺失数据的 Radon 导 b 补值前的重建


c 连续填充结果 d 线性插值结果

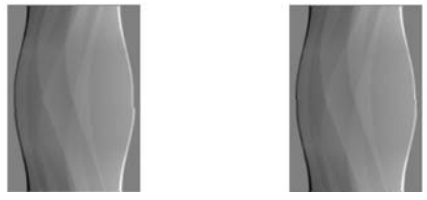
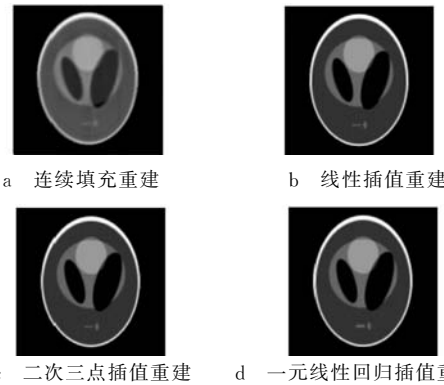

e 二次三点插值结果 f 一元线性回归插值结果

图 5 Radon 空间缺失数据补偿前后图像


a 连续填充重建 b 线性插值重建

c 二次三点插值重建 d 一元线性回归插值重建

图 6 重建结果 x-z 截面图像

仿真参数为:$D_{SO}=1\,463$ 像素,探测器大小为 256 像素×256 像素.

通过对图 6 的重建结果和图 7 不同插值方法

在 $\rho=21$ 时灰度曲线的比较,证明运用统计方法插值、线性和二次三点方法对 Radon 缺失数据插值后图像重建效果都较好,而连续填充方法较差.

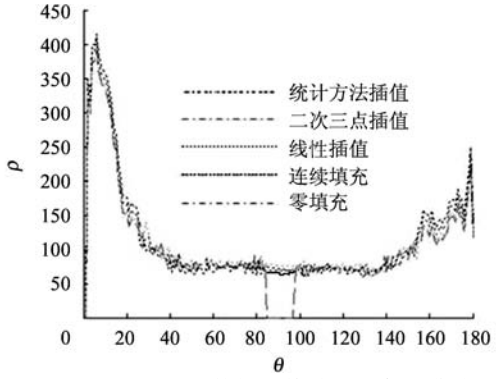


图 7　Radon 缺失数据补偿前后的灰度曲线比较

式(13)为归一化均方判据,式(14)为归一化平均绝对判据,其中,$t_{u,v}$,$r_{u,v}$ 分别表示标准模型和重建图像中第 u 行、v 列的像素密度,$\bar{t}$ 为标准模型密度的平均值;图像的像素为 $N\times N$ 个. d 和 r 越大,表示重建图像与标准模型偏差越大. d 主要反映某几点产生较大误差的情况,r 反映许多点均有一些小误差的情况. 不同插值方法重建图像质量的分析结果如表 1 所示.

$$d=\left[\frac{\sum_{u=1}^{N}\sum_{v=1}^{N}(t_{u,v}-r_{u,v})^2}{\sum_{u=1}^{N}\sum_{v=1}^{N}(t_{u,v}-\bar{t})^2}\right]^2 \tag{13}$$

$$r=\frac{\sum_{u=1}^{N}\sum_{v=1}^{N}|t_{u,v}-r_{u,v}|}{\sum_{u=1}^{N}\sum_{v=1}^{N}|t_{u,v}|} \tag{14}$$

表 1　不同插值方法重建图像质量评价参数比较

判据	方法			
	连续填充	线性插值	二次三点插值	统计方法插值
均方距离	0.2584	0.2498	0.2499	0.2406
绝对距离	0.1436	0.1344	0.1338	0.1333

表 1 的图像质量评价结果进一步证明了统计方法是比较有效的补偿方法.

4　结 束 语

本文研究了 Grangeat 精确重建算法的原理,针对单圆轨道扫描投影数据的不完备性,通过采用近邻插值、线性插值、二次三点插值和一元线性回归插值的方法插补 Radon 空间数据缺失部分改进 Grangeat 重建算法. 计算机仿真证明改进算法中一元线性回归插值方法有效抑制了伪影,可以获得较好的图像质量.

参考文献(References)

[1] Feldkamp, Davis L A, Kress J. Practical cone-beam algorithm[J]. Journal of the Optical Society of America, 1984, 1(1):1612－619

[2] Grangeat P. Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform [C]//Louis A K, Natterer F. Mathematical Methods in Tomography. Herman GT: Springer Verlag, 1991:66－97

[3] Lee Seung Wook, Cho Gyuseong, Wang Ge. Artifacts associated with implementation of the Grangeat formula[J]. Med Phys, 2002, 29(12):2871－2880

[4] 曾凯,陈志强,张丽,等. 圆轨道锥束重建精度与锥角关系的研究[J]. CT 理论与应用研究, 2003,12(3):9－16
Zeng Kai, Chen Zhiqiang, Zhang Li, et al. The study of relationship between circular orbit cone beam reconstruction error and cone angle[J]. CT Theory and Applications, 2003,12(3):9－16(in Chinese)

[5] Chen Zhiqiang, Li Liang, Kang Kejun, et al. New developments of exact cone-beam CT reconstruction algorithms[J]. CT Theory and Applications, 2005,14(3):65－70

[6] Marr R B, Chen C N, lauterbur P C. On two approaches to 3D reconstruction in NMR zeugmatography[C]//Natterer F. Mathematical Aspects of Computerized Tomography. Herman GT: Springer Verlag, 1981:225－240