温度场中柔性臂超谐共振及复杂运动分析

贠 超 崔一辉 王 伟 汤 青

(北京航空航天大学 机械工程及自动化学院，北京 100191) (廊坊市智通机器人系统有限公司，廊坊 065001)

摘 要：通过 Garlerkin 方法建立了考虑阻尼、材料非线性、温度变化和轴向激励的柔性臂系统动力学微分方程.分析了系统存在同、异宿轨道及周期轨道的充分必要条件，通过 Hamilton 函数得到了对应的参数方程表达式.根据非线性振动的多尺度法，得到了系统在 3 次超谐共振情况下的一次近似解及其定常解，揭示了系统内各参数之间的关系.对得到的微分方程进行数值计算，分析柔性臂系统参数对纵向振动响应曲线的影响.结果表明，材料非线性和温度变化对系统纵向振动的影响不可忽略；在一定参数条件下，系统有发生复杂非线性运动的可能.为了有效的控制柔性臂的振动，应合理选取系统的物理参数，避免其处于混沌运动状态.

关 键 词：柔性臂；温度场；超谐共振；Garlerkin 方法

中图分类号：TH 113；O 32

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2009)02-0236-05

Super-harmonic resonance and complex movement analysis of flexible manipulator in temperature field

Yun Chao Cui Yihui Wang Wei

(School of Mechanical Engineering and Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Tang Qing

(Langfang InterSmart Robotic Systems Co., Ltd., Langfang 065001, China)

Abstract: In order to study on nonlinear vibration of flexible manipulator, a mathematical model of mechanical system considering damping, material nonlinearity, temperature variation and axial excitation was established using the Garlerkin method. Furthermore, the adequate and essential conditions for homoclinic orbits, hetroclinic orbits and period orbits were obtained by Hamilton functions of the system, and the corresponding specific analytic expressions of different orbits were deduced. Based on the multiple scales method for nonlinear vibration analysis, the first approximation solutions and corresponding to steady state solutions of the 3 super-harmonic resonances were studied. The relations between different parameters were revealed clearly. Numerical analysis results show that material nonlinearity and temperature variation are critical factors influencing the vibration, which should not be neglected. In some conditions, the movement such as chaotic motion can be found in the system. In order to control the flexible manipulator effectively, parameters should be designed correctly to avoid the chaotic movement.

Key words: flexible manipulators; temperature; resonance; Garlerkin methods

柔性机械臂在航空航天、石油化工、机械等方面有着广泛应用.与刚性臂相比，柔性臂的刚度较小，在受到载荷冲击时，细长结构的柔性臂发生弹性变形及振动，直接影响系统的稳定与控制精度.

收稿日期：2008-07-20

基金项目：国家 863 计划资助项目(2007AA04Z231266)

作者简介：贠 超(1952—)，男，陕西三原人，教授，cyun18@vip.sina.com.

文献[1－2]通过求解得到的动力学方程,对柔性机械臂的动力奇异性和振动控制进行了数值分析,得到了一些对结构设计和动力学控制有用的结论.文献[3－4]对杆状结构进行共振分析,发现在一定参数条件下,直杆可以发生混沌运动.以上研究都忽略了环境温度对系统动力学特性的影响,而实际工程应用中机械臂的动力特性越来越多的受热载荷的影响,因而研究柔性臂热振动特性显得越来越重要.文献[5－6]研究了横向非均匀分布升温场作用下弹性梁的屈曲响应,着重分析了横向升温变化对热过屈曲变形的影响,给出了相应的特性曲线.文献[7－8]表明,弹性杆件在热膨胀状态下的频率、主共振曲线和奇异性受温度变化影响.这些研究成果主要讨论了横向振动,对纵向振动没有涉及.本文以柔性臂为基本模型,采用非线性理论对模型进行分析,为机械系统参数优化和振动控制提供了一种新的思路.

1　柔性臂系统建模

如图 1 所示的密度为 ρ 长度为 L 的均质柔性臂,其非线性材料的本构关系可以表示为

$$\delta = E_0 \frac{\partial u}{\partial x} + E_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + E_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 \tag{1}$$

式中,δ 为应力;E_0,E_1,E_2 为材料的弹性常数;$u(x,t)$为纵向振动位移.

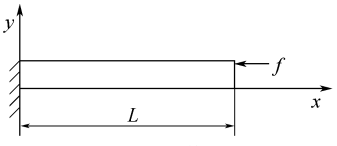


图 1　柔性臂模型

材料弹性模量随温度升高而发生变化:

$$E_i' = (1 - \kappa \Delta T) E_i \tag{2}$$

式中,$E_i (i=0,1,2)$为温度变化前弹性模量;E_i'为变化后的弹性模量.由此可以得到系统纵向振动的控制方程为

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = (1 - \kappa \Delta T) \frac{\partial}{\partial x}\left[E_0 A \frac{\partial u}{\partial x} + E_1 A \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + E_2 A \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 \right] + f(t) \tag{3}$$

式中,A 为柔性臂横截面面积;γ 为阻尼系数;κ 为热弹性系数;ΔT 为温度变化;$f(t)$为轴向扰动力.

设柔性臂的纵向振动位移形式为

$$u(x,t) = v(t) \sin kx \qquad k = \pi / 2L \tag{4}$$

轴向扰动力为

$$f(t) = P \cos \Omega t \tag{5}$$

式中 Ω 为外激励频率.

根据伽辽金法原理,将式(4)、式(5)代入式(3)得到方程:

$$\ddot{v} + \mu \dot{v} + \omega^2 v + \alpha v^2 + \beta v^3 = F \cos \Omega t \tag{6}$$

式中,$\mu = \dfrac{\gamma}{\rho A}$;$\alpha = \dfrac{(1 - \kappa \Delta T) E_1 \pi^2}{3 \rho L^3}$;$F = \dfrac{2P}{\rho A}$;$\beta = \dfrac{3(1 - \kappa \Delta T) E_2 \pi^4}{64 \rho L^4}$;$\omega^2 = \dfrac{(1 - \kappa \Delta T) E_0 \pi^2}{4 \rho L^2}$.

这是考虑阻尼、外加激励、材料非线性和温度影响后系统的运动微分方程,由方程可以推导出柔性臂在不同情况下的振动状态,分析各个参数之间的联系.从中可以看出,柔性臂系统的固有频率受温度变化和长度的影响.

2　复杂运动分析

上述系统在相应的平衡解附近可能存在双向渐进解的轨道.如果这些轨道随着时间的增加,又渐进地返回到平衡解,称之为同宿轨道,因为它们归宿并且起源于同一极限.如果一条轨道连接着两个不同的平衡解,则称之为异宿轨道.

式(6)对应的 Hamilton 系统为

$$\left.\begin{aligned} \dot{X} &= Y \\ \dot{Y} &= -\omega^2 X - \alpha X^2 - \beta X^3 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中,X 表示广义位移;Y 表示广义速度.

其能量函数为

$$H(X,Y) = \frac{1}{2} Y^2 + \frac{1}{2} \omega^2 X^2 + \frac{1}{3} \alpha X^3 + \frac{1}{4} \beta X^4 = h \tag{8}$$

由式(6)及 E_0 取值可知,$\omega^2 > 0$,则 Hamilton 系统的奇点(平衡点)为

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= (0,0) \\ P_1 &= (A,0) \\ P_2 &= (B,0) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中

$$A = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\omega^2}}{2\beta}$$

$$B = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\beta\omega^2}}{2\beta}$$

当 $\alpha^2 - 4\beta\omega^2 > 0$ 时,系统有 3 个相异的实奇点.如果 $\alpha > 0, \beta > 0, B < A < 0$, P_1 为鞍点,P_0 和 P_2 为中心;如果 $\alpha < 0, \beta > 0, 0 < B < A$, P_2 为鞍点,P_0 和 P_1 为中心.此时系统具有同宿轨道,根据 Hamilton 函数求得系统同宿轨道存在的充要条件是

$$2\alpha^2 - 9\beta\omega^2 = 0 \tag{10}$$

由此得到同宿轨道的参数方程为

$$\left.\begin{aligned} X(t) &= \pm\frac{2\sqrt{2}\alpha}{3\beta}\frac{\mathrm{e}^{\pm\frac{\alpha}{3\sqrt{\beta}}t}}{\mathrm{e}^{\pm\frac{2\alpha}{3\sqrt{\beta}}t}+1}-\frac{\alpha}{3\beta} \\ Y(t) &= \pm\frac{2\sqrt{2}\alpha^2}{9\beta\sqrt{\beta}}\frac{\mathrm{e}^{\pm\frac{\alpha}{3\sqrt{\beta}}}\left(1-\mathrm{e}^{\pm\frac{2\alpha}{3\sqrt{\beta}}t}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\pm\frac{2\alpha}{3\sqrt{\beta}}t}+1\right)^2} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

如果 $\beta<0$，$A<0<B$，P_0 为中心，P_1 和 P_2 为鞍点. 此时系统具有异宿轨道，其存在的充要条件是

$$\alpha=0 \tag{12}$$

异宿轨道的参数方程为

$$\left.\begin{aligned} X(t) &= \pm\sqrt{-\frac{\omega^2}{\beta}}\,\mathrm{th}\sqrt{\frac{\omega^2}{2}t} \\ Y(t) &= \pm\frac{\omega^2}{\sqrt{-2\beta}}\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{\omega^2}{2}t} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

当 $\alpha^2-4\beta\omega^2<0$ 时，系统只有一个实奇点. 因此(0,0)为系统的中心，并且存在一族包围该中心的闭轨族. 由于同一周期轨道上 Hamilton 量相同，取 $Y=0$，则周期轨道上：

$$H=\frac{1}{2}\omega^2A^2+\frac{1}{3}\alpha A^3+\frac{1}{4}\beta A^4=h \tag{14}$$

如果 $\beta>0$，同宿轨道内的闭周期轨道上 $0<h<\frac{\omega^4}{16\beta}$. 可以得到周期轨道参数方程为

$$\left.\begin{aligned} X(t) &= \frac{\sqrt{2}\,|\alpha|}{3\beta\sqrt{2-C^2}}\mathrm{dn}(Qt,C)-\frac{\alpha}{3\beta} \\ Y(t) &= \frac{\sqrt{2}\alpha^2C^2}{9\beta\sqrt{\beta}(2-C^2)}\mathrm{sn}(Qt,C)\cdot\mathrm{cn}(Qt,C) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

式中，$C^2=\frac{36\beta^2\sqrt{h}}{18\beta^2\sqrt{h}+\alpha^2\sqrt{\beta}}$；$Q=\frac{|\alpha|}{3\sqrt{\beta(2-C^2)}}$；dn，sn，cn 为对应的雅可比椭圆函数. 闭轨的周期为 $T(C)=\frac{12\sqrt{\beta(1-2C^2)}}{|\alpha|}K(C)$，$K(C)$ 为第一类完全椭圆积分. 闭轨周期越小，系统运动能量越大.

如果 $\beta<0$，包围中心的闭周期轨道上 $0<h<-\frac{\omega^4}{4\beta}$. 周期轨道参数方程为

$$\left.\begin{aligned} X(t) &= \frac{\sqrt{2\omega^2}D}{\sqrt{\beta(1+D^2)}}\mathrm{sn}\left(\frac{\sqrt{\omega^2}}{3\sqrt{1+kj^2}}t,D\right) \\ Y(t) &= \frac{\sqrt{2}\,\omega^2D}{\sqrt{-\beta}(1+D^2)}\mathrm{cn}(Gt,D)\cdot\mathrm{dn}(Gt,D) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中，$D^2=\frac{\omega^2-\sqrt{\omega^2+4h\beta}}{\omega^2+\sqrt{\omega^4+4h\beta}}$；$G=\frac{\sqrt{\omega^2}}{\sqrt{1+D^2}}$. 模数 D 的闭轨周期为 $T(D)=\frac{4\sqrt{(1+D^2)}}{\sqrt{\omega^2}}K(D)$，$K(D)$ 为第一类完全椭圆积分. 对于扰动系统，可以根据同异宿轨道的参数方程或者周期轨道参数方程计算满足共振条件的 Melnikov 函数：

$$M=\int_0^{nT}Y[-\mu\dot{X}-\beta\dot{X}^3-\omega^2X-\alpha X^2+F\cos\Omega t]\mathrm{d}t \tag{17}$$

该式可以用来分析系统发生混沌运动的条件.

3 超谐共振分析

考虑柔性臂系统 3 次超谐共振情况，即

$$\Omega=\frac{\omega}{3}+\varepsilon\sigma \tag{18}$$

式中，σ 为调谐值；ε 为小参数.

引入两个时间尺度 T_0，T_1，设

$$v(t)=v_1(T_0,T_1)+\varepsilon v_2(T_0,T_1) \tag{19}$$

根据非线性理论的多尺度法，得到振幅 a 与激励频率失调量 σ 之间的关系：

$$9\beta^2a^6-144\beta(\sigma\omega-\beta\Lambda^2)a^4+64\left[\left(3\sigma-\frac{3\beta\Lambda^2}{\omega}\right)^2+\mu^2\right]\omega^2a^2-\beta^2\Lambda^6=0 \tag{20}$$

式中 $\Lambda=\frac{F}{2(\Omega^2-\omega^2)}$

式(20)称为柔性臂 3 次超谐共振稳态运动定常解响应方程，由该方程可以分析系统振幅和各参数之间的关系.

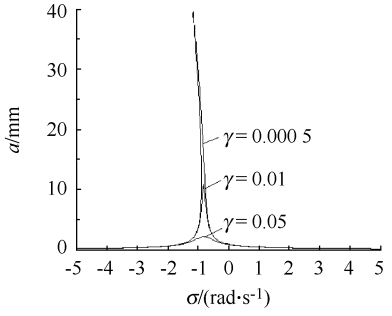
4 数值分析

为讨论柔性臂的动力学特性，给各参数赋值：$L=0.1$ m，$E_0=2.3\times10^5$ N·m^2，$E_1=5.3\times10^4$ N·m^2，$E_2=-1.6\times10^4$ N·m^2，$\rho=2\,600$ kg/m^3，$\gamma=0.000\,5$，$A=20\times10^{-6}$ m^2，$\kappa=0.005$.

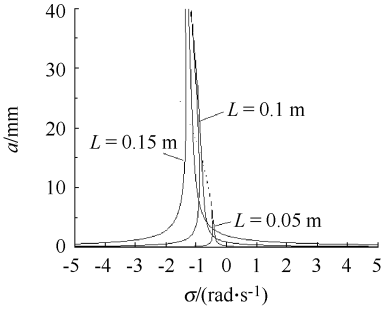
根据式(20)得到柔性机械臂系统的 3 次超谐共振响应曲线. 该响应曲线具有典型的“跳跃”现象，呈现软刚度特性. 在“跳跃”区，当调谐频率由低向高变化时，各频率点的振幅与由高向低变化时不同.

图 2a 表明减小阻尼系数能使响应曲线向闭口方向移动. 图 2b 和图 2c 分别为柔性臂长度和温度变化时的幅频响应曲线，由图可见，增大长度值和温度变化的幅度，系统共振曲线的峰值向左侧移动，同时，共振区宽度增大，振幅变大. 图 2d 为改变柔性臂截面面积时的幅频响应曲线，面积越大，响应曲线的共振区宽度越小，振幅越小，同时曲线峰值右移. 增大外加激励的幅值，柔性臂的振幅升高，共振区峰值左移，如图 2e 所示.

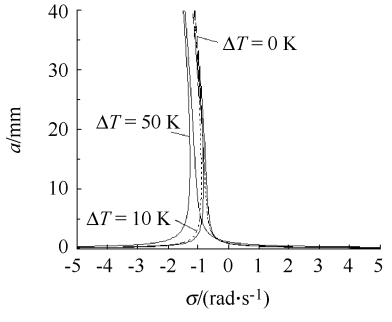
因此,可以通过调节柔性臂的物理参数,来避开某一参数点的共振,从而使该参数的取值优先得到满足.



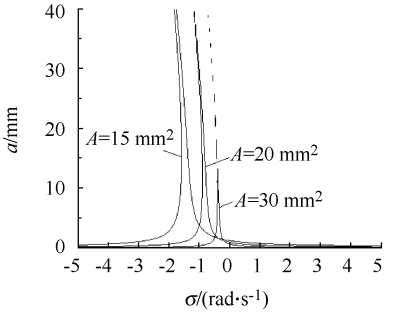
a　阻尼变化



b　臂长变化

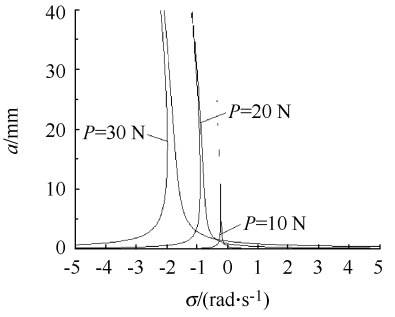


c　温度变化



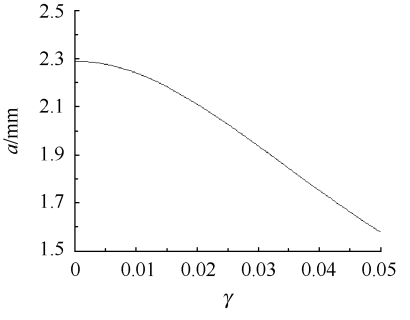
d　截面面积变化

图 3a 为振幅-阻尼响应曲线,可见,阻尼的小范围变化对柔性臂纵向振动的振幅影响不大.图 3b表明,当臂长增大时,柔性臂的纵振振幅逐渐增大,在某一区域具有“跳跃”现象,振幅出现急剧增大或减小.而温度变化时,振幅响应曲线时而增大,时而降低,在温升较小时,振幅变化不明显,如图 3c 所示.图 3d 和 3e 分别是柔性臂的振幅随横截面积及外激励变化时的响应曲线,面积逐渐

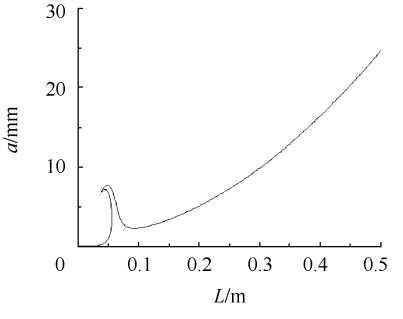


e　激励变化

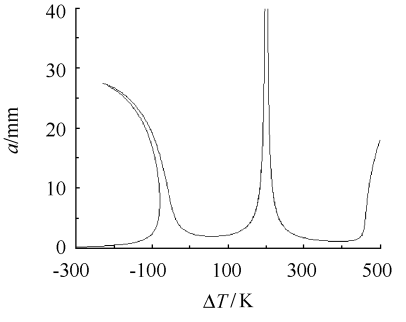
图 2　幅频响应曲线



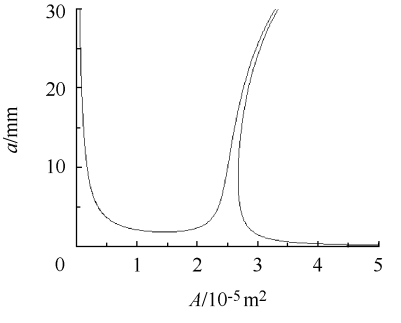
a　阻尼变化



b　臂长变化

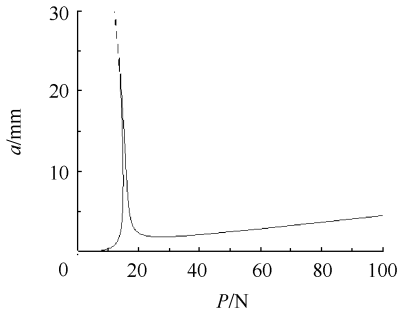


c　温度变化



d　截面面积变化

增大时,纵向振动的幅值总体趋势不断降低,外加



e 激励变化

图3 振幅-系统参数关系曲线

激励增大时,响应曲线的振幅越来越高,但是在局部区域会出现振幅急剧升降现象.根据得到的响应曲线,可以实现柔性臂系统参数的优化设计,来达到抑制纵向振动的目的.

图4为3次超谐情况下的功率谱图,表明此时系统的振动能量集中在共振频率上,是影响系统稳定性的主要因素.

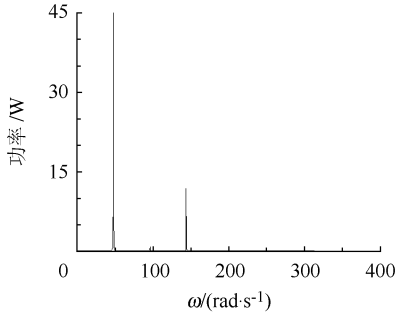


图4 功率谱图

5 结 论

通过Garlerkin方法建立了考虑阻尼、材料非线性、温度变化和轴向激振力的柔性臂系统动力学微分方程.应用非线性理论分析了柔性臂系统同宿轨道、异宿轨道和周期轨道存在的充分必要条件及相应的参数方程.根据非线性振动的多尺度法,得到了系统在3次超谐共振情况下的一次近似解及其定常解.通过数值分析,证明温度场的变化对于柔性臂的纵向振动影响复杂,在建模时不应该被忽略.在3次超谐共振情况下,系统各物理参数在局部区域的取值会造成纵振振幅的异常变化,可以通过调节柔性臂的物理参数,来抑制某一参数点处的共振,从而使该参数的取值优先得到满足.

参考文献(References)

[1] 高志慧,负超.柔性机器人避动力奇异方法的研究[J].北京航空航天大学学报,2005,31(7):726-729
Gao Zhihui, Yun Chao. Method to avoid dynamic singularity for flexible manipulators[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2005, 31(7): 726-729(in Chinese)

[2] 高志慧,负超.柔性冗余度机器人减振运动规划研究[J].机械科学与技术,2004,23(12):1515-1518
Gao Zhihui, Yun Chao. A method for redundant joint motion planning of flexible redundant manipulators[J]. Mechanical Science and Technology, 2004, 23(12): 1515-1518(in Chinese)

[3] 吴晓,邓科涛,罗烈雷.弹性直杆纵振时的混沌运动研究[J].振动与冲击,2002,21(3):65-66
Wu Xiao, Deng Ketao, Luo Lielei. Study on chaotic motion of elastic straight bar during longitudinal vibration[J]. Journal of Vibration and Shock, 2002, 21(3): 65-66 (in Chinese)

[4] 张年梅,韩强,杨桂通,等.非线性弹性杆的异常动态响应[J].应用数学和力学,2000,21(9):909-915
Zhang Nianmei, Han Qiang, Yang Guitong, et al. Anomalous dynamics response of nonlinear elastic bar[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21(9): 909-915(in Chinese)

[5] 李世荣,程昌钧,周又和.横向非均升温下弹性梁的热过屈曲[J].应用数学和力学,2003,24(5):455-460
Li Shirong, Cheng Changjun, Zhou Youhe. Thermal post-buckling of an elastic beams subjected to a transversely non-uniform temperature rising[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 24(5): 455-460(in Chinese)

[6] 周又和,郑晓静,王省哲.悬臂铁磁板磁弹性耦合作用的力学分析[J].固体力学学报,1998,19(3):239-244
Zhou Youhe, Zheng Xiaojing, Wang Xingzhe. Mechanical analysis of magne-elastic coupling interaction-cantilevered ferromagnetic plates with finite width[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1998, 19(3): 239-244 (in Chinese)

[7] 吴晓,张龙庭,马建勋.弹性直杆热膨胀状态下的非线性振动[J].工程力学,1996,13(4):129-134
Wu Xiao, Zhang Longting, Ma Jianxun. The nonlinear vibrations of elastic straight column in state of thermal expansion[J]. Engineering Mechanics, 1996, 13(4): 129-133(in Chinese)

[8] 杨志安,席晓燕,李文兰.弹性直杆在温度场中的非线性振动与奇异性[J].工程力学,2006,23(6):50-53
Yang Zhian, Xi Xiaoyan, Li Wenlan. Singularities and nonlinear vibration of elastic straight bars in thermal field under harmonic excitation[J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(6): 50-53(in Chinese)