相似多细节结构疲劳试验不完全数据参数估计

鲍 蕊 张建宇 费斌军

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院,北京 100191)

摘 要:讨论了用含相似多细节结构的不完全疲劳试验数据进行疲劳特征参量分布参数估计的方法.在假设疲劳寿命服从对数正态分布和双参数 Weibull 分布的情况下,分析了用于描述单个细节疲劳质量的随机变量的分布参数与含相似多细节结构不完全试验数据的分布参数之间的关系,分析表明二者之间存在显著的差异,但具有确定性的关系,这种关系与细节个数有关,给出了通过不完全试验数据估算单个细节疲劳分布参数的定量方法.通过数值模拟,分析了样本容量和细节个数对估算结果分散性的影响,分析表明,在细节数较少时,对分散性的影响与样本容量有关,与细节个数关系不大.

关 键 词:疲劳;试验;结构件;参数估计;不完全数据;相似多细节

中图分类号:V 215.5

文献标识码:A **文 章 编 号**:1001-5965(2008)07-0849-04

Estimation method for inadequate fatigue test result of structures with multi-similar-details

Bao Rui Zhang Jianyu Fei Binjun

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: A method for estimating fatigue life distribution parameters with inadequate result obtained by fatigue test of structures with multi-similar-details was proposed. Based on the assumption that fatigue life follows the log-normal distribution and 2-parameter Weibull distribution respectively, the relationship of two kinds of distribution parameters, one was adopted to describe the single detail fatigue quality and the other was gained by inadequate test results of multi-similar-detail structures, was discussed. The analysis indicates that there is a significantly difference between the two kinds of parameters, however a determinate function of the amount of details can be obtained to describe this relationship. The way of estimating single detail fatigue distribution parameters via inadequate data was presented. Numerical simulations were conducted to analysis the effects of number of specimens and the amount of details on the estimating results, which shows that when the amount of details is not very large, it is the number of specimens, but not the amount of details, which has great effect on the dispersivity of parameter estimation.

Key words: fatigue; experiment; structural component; parameter estimation; inadequate data; multi-similar-details

含相似多细节结构是指同一结构包含1个以上的关键细节,且细节形式相同,载荷形式与载荷水平相当.在循环载荷的作用下,各个细节均存在形成疲劳裂纹的可能性,因此发生疲劳破坏的可能性较单细节结构大大增加.

飞机结构的部件级以下疲劳试验,由于试验条件的限制,基本上采用的都是少量细节的模拟试件,虽然每个细节都存在同样的发生疲劳破坏的可能性,但通常做到1个细节发生破坏即停止试验,要通过这些数据来估算每个细节的疲劳特

收稿日期:2007-07-09

作者简介:鲍 蕊(1978—),女,内蒙古呼伦贝尔人,讲师,RBao@buaa.edu.cn.

征分布参数或者来预计含有大量细节结构的疲劳寿命及其可靠性,需要解决两方面的问题:①多细节结构疲劳试验不完全数据与单细节疲劳质量的关系;②单细节疲劳质量与多细节结构疲劳可靠性的关系.现阶段飞机结构设计中,对这个问题的处理是根据细节数的大致范围,加上相应的修正系数[1],而这些系数通常来源于经验,在试验数据量较小或本身的分散性较大时,这些系数也无法从根本上保证结构寿命预测的可靠性.因而需要建立基于疲劳统计学理论的多细节结构寿命分布参数与单细节疲劳质量的联系.

1 多细节试件不完全试验数据特点

对包含多个相似多细节的结构进行疲劳试验,获得的不完全试验数据具有如下特点:①每个试件应该包含 m 个试验数据,记为($x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im}$),$i$ 为试件编号,m 为该试件所包含的细节个数;②一个细节发生破坏即认为该件试件失效,故每个试件实际得到的破坏数据只有 1 个,记为 x_i,设第 j 个细节最先破坏,则 $x_i=\min(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im})$;③每组试验进行 n 个试件,共得到破坏数据 n 个($x_1,x_2,\cdots,x_n$),未破坏数据$(m-1)\cdot n$个,未破坏数据无具体数值,只知道 $x_{ik}>x_i$ $(k=1,\cdots,m\quad k\neq j)$.显然,由破坏的 n 个数据估算母体的均值,将得到偏小的估计值.

含多细节试件与截尾寿命试验也有所区别.截尾寿命试验是指把 n 个投试样品试验到部分失效就停止的试验,截尾试验的每个试件也只包含一个细节.在截尾寿命试验中,依先后记录的失效数据 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_r$ 称为截尾样本,其中 r 为失效数,或称截尾数.一般 $r\leqslant n$,当 $r=n$ 时,截尾寿命试验就成为完全寿命试验.正因为截尾数据可以依次排序,并可知 $x_i\geqslant x_r$ $(i=r+1,\cdots,n)$,故可以构造次序统计量并确定其分布,进而得到母体分布参数的估计值.

多细节不完全试验数据可以视为一组不规则的截尾数据,但由于即使将($x_1,x_2,\cdots,x_n$)排序,也无法判断未破坏细节的数据与 $\max(x_i)$ 或 $\min(x_i)$的关系,无法像规则的截尾数据一样构造次序统计量.

2 多细节不完全试验数据处理方法

假设:①各个试件包含相同个数的细节;②每个试件的多个细节相互独立;③每个细节的疲劳特征参量(疲劳寿命或疲劳强度)与母体同分布.

假设每个细节的疲劳寿命用随机变量 X 表示,X 的分布函数为 $F_X(x)$,破坏细节的疲劳寿命用随机变量 Y 表示,则 $Y=\min(X_1,X_2,\cdots,X_m)$,$m$ 为一个试件包含的细节数.由分布函数的定义及假设知[2]:

$$F_Y(y)=P\{Y<y\}=1-P\{X_1>y,\cdots,X_m>y\}=1-\prod_{i=1}^{m}P\{X_i>y\}=1-[1-F_X(y)]^m \quad (1)$$

2.1 X 服从对数正态分布的情况

假设 X 服从对数正态分布[3],$X'=\ln(X)$,则 X'服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,令 $X''=(X'-\mu)/\sigma$,则 X''服从标准正态分布 $N(0,1)$.

由于对数函数具有单调性,且 $\sigma>0$,故:

$$\ln(Y)=\min(\ln(X_1),\ln(X_2),\cdots,\ln(X_m)) \quad (2)$$

$$(\ln(Y)-\mu)/\sigma=\min(X''_1,X''_2,\cdots,X''_m) \quad (3)$$

令 $Y''=(\ln(Y)-\mu)/\sigma$,则 Y''的分布函数$F_{Y''}(x)=1-[1-F_{X''}(x)]^m$,且:

$$\left.\begin{aligned}E(Y'')&=\frac{E[\ln(Y)]-\mu}{\sigma}\\ \mathrm{Var}(Y'')&=\frac{\mathrm{Var}[\ln(Y)]}{\sigma^2}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

由于 $F_{Y''}$中只有一个参数 m,即为每个试件包含的细节个数,因而 Y''的数学期望 $E(Y'')$和方差 $\mathrm{Var}(Y'')$可知,且只与 m 有关.设 $E(Y'')=a_N(m)$,$\mathrm{Var}(Y'')=V_N(m)$,由式(4)得

$$\left.\begin{aligned}\mu&=E[\ln(Y)]-\sigma a_N(m)\\ \sigma^2&=\mathrm{Var}[\ln(Y)]/V_N(m)\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

由于 $a_N(m)\geqslant 0$,$V_N(m)\leqslant 1$,所以 $\mu\geqslant E[\ln(Y)]$,$\sigma^2\geqslant\mathrm{Var}[\ln(Y)]$,即母体的对数均值和对数方差均大于观测样本的对数数学期望和对数方差.

2.2 X 服从双参数 Weibull 分布的情况

假设疲劳寿命 X 服从双参数 Weibull 分布[4],β 为特征寿命,α 为形状参数.则对数寿命 $X'=\ln(X)$服从极值分布 $G(\mu,\sigma)$,其分布函数为

$$F_{X'}(x)=1-\exp[-\exp((x-\mu)/\sigma)] \quad (6)$$

式中,$\mu=\ln\beta,\sigma=1/\alpha$.令 $X''=(X'-\mu)/\sigma$,则 X''服从标准极值分布,分布函数为 $F_{X''}(x)=1-\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}$.同 2.1 节,有 $Y''=(\ln(Y)-\mu)/\sigma=\min(X''_i)$,则

$$\left.\begin{aligned}E(Y'')&=(E[\ln(Y)]-\mu)/\sigma\\ \mathrm{Var}(Y'')&=\mathrm{Var}[\ln(Y)]/\sigma^2\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Y''的分布函数为 $F_{Y''}(x)=1-\mathrm{e}^{-m\mathrm{e}^x}$.由于 $F_{Y''}$中也只有一个参数 m,因而 $E(Y'')$和 $\mathrm{Var}(Y'')$可知,且只与 m 有关.设 $E(Y'')=a_W(m)$,$\mathrm{Var}(Y'')=V_W(m)$,由式(7)得

$$\left.\begin{aligned}\mu &= E[\ln(Y)] - \sigma a_{\mathrm{W}}(m)\\ \sigma^2 &= \mathrm{Var}[\ln(Y)]/V_{\mathrm{W}}(m)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= (\mathrm{Var}[\ln(Y)]/V_{\mathrm{w}}(m))^{-\frac{1}{2}}\\ \beta &= \exp(E[\ln(Y)] - a_{\mathrm{w}}(m)/\alpha)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

表 1 给出了 $m=1-5$ 时 $a_{\mathrm{N}}(m)$,$V_{\mathrm{N}}(m)$,$a_{\mathrm{W}}(m)$和 $V_{\mathrm{W}}(m)$的值.可见 $V_{\mathrm{W}}(m)$与 m 无关,即当 X 服从双参数 Weibull 分布时,用单细节试件试验数据得到的母体分布参数 α 的估计值与用多细节不完全试验数据得到的应该相同,即 $F_Y(y)=1-\exp[-(y/\beta')^{\alpha}]$,其中,$\beta'$是 Y 的特征寿命,$\beta=m^{1/\sigma}\cdot\beta'$.

表 1　$a_{\mathrm{N}}(m)$和 $V_{\mathrm{N}}(m)$,$a_{\mathrm{W}}(m)$和 $V_{\mathrm{W}}(m)$的值

m	$a_{\mathrm{N}}(m)$	$V_{\mathrm{N}}(m)$	$a_{\mathrm{W}}(m)$	$V_{\mathrm{W}}(m)$
1	0	1	−0.577 22	1.644 93
2	−0.564 19	0.681 68	−1.270 36	1.644 93
3	−0.846 28	0.559 45	−1.675 83	1.644 93
4	−1.029 37	0.491 70	−1.963 51	1.644 93
5	−1.162 96	0.447 51	−2.188 65	1.644 93

由于 $\alpha>0$,$m\geqslant 1$,所以 $\beta\geqslant\beta'$,即母体的形状参数与观测样本的形状参数相同,而母体的特征寿命要大于样本的特征寿命.

3　数值模拟与分析讨论

通过蒙特卡罗方法产生服从指定分布的随机数模拟试验数据,分析通过以上方法进行试验数据处理过程中样本容量和细节个数对估计结果的影响.

3.1　样本容量的影响

计算机生成随机数模拟双细节试件的试验数据,分别模拟试验件数为 5,10,20 和 50 的情况,讨论样本容量对母体参数估计结果的影响.模拟方法为:产生 10 组样本容量等于试验件数 n 的服从指定分布的随机数 x,$x_i=(x_{i1},\cdots x_{in})$($i=1,\cdots,10$).在这 10 组随机数中选择两组模拟一根试件的两个细节,这样可以得到 45 组不同的组合形式,即可以模拟 45 次试验的试验结果,而第 k 次试验观测到的寿命数据 y 应该为

$$y_k=\min\{x_i,x_j\}$$
$$(i,j=1,\cdots,10,i\neq j,k=1,\cdots,45) \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{E}[\ln(Y_k)] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(y_{ki})\\ \hat{\mathrm{Var}}[\ln(Y)] &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(y_{ki})-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(y_{ki})\right)^2}{n-1}}\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

根据式(5)和式(9)可以获得$(\hat{\mu},\hat{\sigma})$及$(\hat{\alpha},\hat{\beta})$.由$(\hat{\mu},\hat{\sigma})$,$(\hat{\alpha},\hat{\beta})$和产生随机数时所采用的$(\mu,\sigma)$,$(\alpha,\beta)$的比较分析样本容量 n 对估计结果的影响.

分别产生服从对数均值 $\mu=11.5$、对数标准差 $\sigma=0.2$ 的随机数和服从 $\alpha=4$,$\beta=10^5$ 的双参数 Weibull 分布的随机数.进行组合和数据处理,分别得到 45 次试件数为 5 件、10 件、20 件和 50 件的模拟试验数据,按照式(5)得到$(\hat{\mu},\hat{\sigma})$见图 1,得到 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$ 的均值 $\bar{\hat{\mu}}$ 和 $\bar{\hat{\sigma}}$ 及 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$ 的标准差 $s_{\hat{\mu}}$,$s_{\hat{\sigma}}$ 见表 2.按照式(9)得到$(\hat{\alpha},\hat{\beta})$见图 2,得到 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 的均值 $\bar{\hat{\alpha}}$,$\bar{\hat{\beta}}$ 及 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 的标准差 $s_{\hat{\alpha}}$,$s_{\hat{\beta}}$ 见表 3.

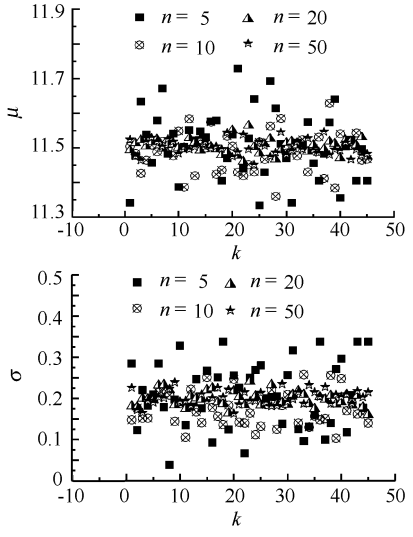


图 1　模拟试验数据获得的 μ,σ 的估计值

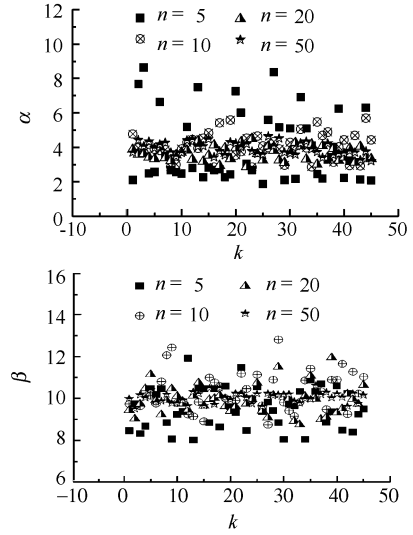


图 2　模拟试验数据获得的 α,β 的估计值

从表 2,表 3 的统计结果可以看出,当试验件数为 5 和 10 时,获得的母体参数估计值的标准差较大,但均值是无偏的,当试验件数大于 20 件时,对母体参数的估计较好.

3.2　细节个数的影响

采用与 3.1 中相同的方法产生服从指定分布

的随机数模拟试验数据，不同的是模拟的试验件数 n 一定，$n=20$，而每个试件所包含的细节个数 m 不同. 在随机数 x 中分别选择两组模拟双细节试件，选择3组模拟3细节试件，选择5组模拟5细节试件，模拟大于50次的试验结果.

同样由式(5)和式(9)可以获得及$(\hat{\mu},\hat{\sigma})$及$(\hat{\alpha},\hat{\beta})$. 产生随机数时所采用的母体参数与3.1中相同，即 $\mu=11.5$，$\sigma=0.2$；$\sigma=4$，$\beta=10^5$. 比较分析结果如图3、图4所示. 统计结果见表4、表5. 从图及统计数据可体看出，细节数2，3，5对母体参数的估计值的均值和分散性的影响不大.

表2 样本容量对对数正态分布参数估计的影响

n	$\overline{\hat{\mu}}$	$s_{\hat{\mu}}$	$\overline{\hat{\sigma}}$	$s_{\hat{\sigma}}$
5	11.509 64	0.094 14	0.208 02	0.080 26
10	11.487 27	0.057 84	0.173 84	0.041 37
20	11.505 36	0.020 54	0.198 31	0.018 64
50	11.501 91	0.022 66	0.201 69	0.018 17

表3 样本容量对双参数 Weibull 分布参数估计的影响

n	$\overline{\hat{\alpha}}$	$s_{\hat{\alpha}}$	$\overline{\hat{\beta}}$	$s_{\hat{\beta}}$
5	4.414 60	3.001 00	95 764	9 677.65
10	4.087 71	0.769 67	103 014	9 161.42
20	3.632 11	0.419 65	99 392	6 746.01
50	3.911 82	0.365 58	100 409	2 616.80

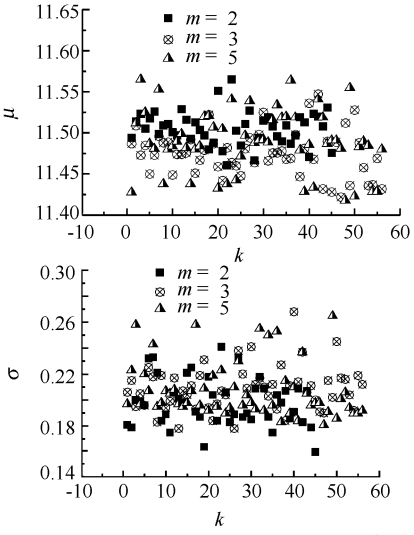


图3 模拟试验数据获得的 μ，σ 的估计值

表4 细节数对对数正态分布参数估计的影响

m	$\overline{\hat{\mu}}$	$s_{\hat{\mu}}$	$\overline{\hat{\sigma}}$	$s_{\hat{\sigma}}$
2	11.505 36	0.020 54	0.198 31	0.018 64
3	11.475 09	0.027 50	0.208 68	0.017 25
5	11.489 36	0.038 06	0.207 52	0.021 36

表5 细节数对双参数 Weibull 分布参数估计的影响

m	$\overline{\hat{\alpha}}$	$s_{\hat{\alpha}}$	$\overline{\hat{\beta}}$	$s_{\hat{\beta}}$
2	4.087 1	0.769 67	103 014	9 161.42
3	4.162 55	0.835 20	98 811.9	6 475.09
5	4.438 16	0.694 53	106 861	6 211.91

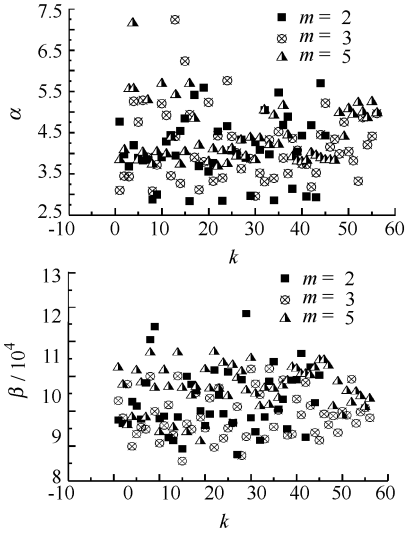


图4 模拟试验数据获得的 α，β 的估计值

4 结 论

通过分析和数值模拟得到结论如下：①相似独立多细节试验件的不完全疲劳寿命试验数据的数字特征与母体的数字特征存在显著的差异，差异的大小与细节个数有关，不能简单地用观测样本的数字特征评估母体的疲劳性能；②当疲劳寿命服从对数正态分布或双参数 Weibull 分布时，不完全试验数据的数字特征与母体分布参数有本文式(5)和式(9)所示的对应关系，这种确定性关系中的参数仅与细节个数有关；③观测样本对母体参数的估计值的分散性的影响与样本容量有关，而在细节数较少时与细节个数关系不大.

参考文献（References）

[1] 郑晓玲，李令芳. 民机结构耐久性与损伤容限设计手册(上册). 疲劳设计与分析[M]. 北京：航空工业出版社，2003：220
Zheng Xiaoling，Li Lingfang. Handbook of civil aircraft structures durability and damage tolerance design[M]. Beijing：Aviation Industry Press，2003：220 (in Chinese)

[2] Stone C J. A course in probability and statistics[M]. Beijing：China Machine Press，2003：1－80

[3] 徐灏. 概率疲劳[M]. 沈阳：东北大学出版社，1994：10－12
Xu Hao，Probability fatigue[M]. Shenyang：Northeast University Press，1994：10－12 (in Chinese).

[4] 高镇同. 应用疲劳统计学[M]. 北京：国防工业出版社，1986：82－95
Gao Zhentong. Statistics in fatigue[M]，Beijing：National Defense Industry Press，1986：82－95(in Chinese)

[5] 王传胜，张建宇，鲍蕊，等. 飞机结构多部位损伤发生的可能性分析[J]. 北京：北京航空航天大学学报，2006，32(8)：899－902
Wang Chuansheng，Zhang Jianyu，Bao Rui，et al. Reliability analysis on structure with multiple site damage[J]. Beijing：Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics，2006，32(8)：899－ 902(in Chinese)

(责任编辑：张 嵘)