光纤陀螺中分形噪声的参数估计和去除

武华伍 任 章

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘 要: 光纤陀螺零漂信号中主要存在分形噪声和高斯白噪声,采用传统的时间序列分析法很难去除这类混合噪声. 基于小波分析,提出一种分步估计加性白噪声强度和分形随机过程参数的新方法. 先通过拟合自相关函数,估计出白噪声的强度;再在小波变换域估计分形噪声参数,并选取适当软阈值对测量值滤波. 实验结果表明该估计和降噪方法有效地去除了光纤陀螺中的混合噪声,且不需要噪声的先验知识,具有很好的适应性.

关 键 词: 光纤陀螺; $1/f^{\gamma}$噪声; 参数估计; 小波分析; 小波滤波

中图分类号: V 241; TN 911. 72

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965 (2008) 06-0630-04

Parameter estimation and elimination to fractal noise of fiber optic gyro

Wu Huawu Ren Zhang

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: There are Gauss white noise and fractal noise in drift of fiber-optic gyro. It is difficult to eliminate this mixed noise using traditional time series analysis method. Based on wavelet analysis, a new parameter estimation approach step by step for fractal stochastic processes and added white noise was proposed. On the basis of the fit for autocorrelation function, the power of white noise was estimated. Then the parameters of fractal noise were estimated in wavelet transform. The suitable threshold was selected to filter fractal noise and white noise of measurements. This estimation and denoising method is effective for this mixed noise in fiber optic gyro which can be proven by experiment results. Furthermore, a prior knowledge of noise is not needed, which means it is suitable in most situations.

Key words: fiber optic gyro; $1/f^{\gamma}$ noise; parameter estimation; wavelet analysis; wavelet filtering

为提高陀螺的精度,许多研究人员通过不同的理论对光纤陀螺 (FOG, Fiber Optic Gyro)的随机漂移进行建模并使用各种滤波技术来消除或降低 FOG的噪声. 国内外对 FOG随机模型建立的方法主要有时间序列分析、神经网络、状态空间和小波分析建模. 神经网络建模结构简单,但如何快速训练及模型的局部最优判定有待进一步研究;状态空间建模更适用于具有随机趋势和扰动噪声的情况. 文献[1-2]指出 FOG中主要存在高斯白噪声和 $1/f^{\gamma}$分形噪声,有的文献也称 $1/f$分形噪声. 文献[3]提出的极大似然估计法 (ML, Maximum-Likelihood)是传统的估计 $1/f^{\gamma}$ 类分形过程参数的方法. 然而该方法要迭代解非线性方程,计算繁琐,具有一定的局限性[4]:当存在其它噪声干扰时,仅当谱指数 $\gamma \in (0, 1)$时才是相合估计,否则以概率 1收敛到错误结果. 本文考虑 FOG中白噪声和分形噪声共存,根据白噪声和分形噪声互相独立的前提,采用基于拟合自相关函数来估计分形信号的信噪比的方法[5],把白噪声方差单独估计出来,再根据 $1/f^{\gamma}$分形过程小波系数的特点和性质估计分形噪声的参数.

1 分形噪声模型及性质

1.1 分形噪声模型

文献[6]从时域上提出分数布朗运动 (FBM, Fractional Brownian Motion)与分数高斯噪声概念

收稿日期: 2007-05-23

作者简介: 武华伍 (1983-),男,湖南郴州人,硕士生, wuhuawu@163.com.

来研究 $1/f^{\gamma}$类分形噪声. 布朗运动的增量是零均值、方差为 $\sigma^2 | t_2 - t_1 |$的平稳随机过程,在一定条件下可粗略认为布朗运动 $B_H(t) = \int_{-\infty}^{t} \omega(t)\,dt$, 其中 $\omega(t)$是白噪声. FBM 是布朗运动的推广,通过引入一个称为 Hurst指数的附加参数 $H \in (0, 1)$引出 FBM 的定义:

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{q}{\Gamma(H+1/2)} \propto \left[\int_{-\infty}^{0} (|t-\tau|^{H-1/2} - |\tau|^{H-1/2}) \omega(\tau)\,d\tau + \int_{0}^{t} |t-\tau|^{H-1/2} \omega(\tau)\,d\tau \right] \quad (1)$$

1.2 分形噪声性质

FBM 的增量是平稳统计自相似的:

$$B_H(t+\tau) - B_H(t) = a^{-H}[B_H(t+a\tau) - B_H(t)] \quad (2)$$

如果 $B_H(0) = 0$,令式 (2)中 $t = 0$,得 $B_H(\tau) = a^{-H} B_H(a\tau)$,可见 FBM 属于自相似过程,但它本身不是平稳过程. 可推导 FBM 的均值、自相关函数及功率谱分别得到对应的自相似性质[7]:

$$E[x(t)] = a^{-H} E[x(at)]$$

$$R_x(t_1, t_2) = a^{-2H} R_x(at_1, at_2)$$

$$S_x(\omega) = a^{2H+1} S_x(a\omega) = \sigma^2 / |\omega|^{2H+1}$$

2 噪声参数估计

2.1 加性白噪声强度估计

$1/f^{\gamma}$过程具有长程相关性,若其谱密度指数 $\gamma \in (1, 2)$,自相关函数按幂函数式衰减[5]:

$$R_x(\tau) = \frac{\sigma_x^2 |\tau|^{\gamma-1}}{2\Gamma(\gamma)\cos\frac{\gamma\pi}{2}} \propto |\tau|^{\gamma-1} \quad (3)$$

式中,$\Gamma(\gamma) = \int_0^{\infty} s^{\gamma-1} e^{-s}\,ds$; γ为谱密度指数. 从式 (3)可以看出自相关函数随时刻 τ的增加而缓慢下降. 考虑 $1/f^{\gamma}$ 分形噪声附加白噪声的情况,设 $f(i) = x_1(i) + x_2(i) + \omega(i)$, $x_1(i)$为有效信号; $x_2(i)$为分形噪声; $\omega(i)$为白噪声. 假设 $x_2(i)$和 $\omega(i)$互相独立,有效信号也认为与噪声不相关,在低精度 FOG零漂中,有效信号非常弱,淹没在噪声中,近似认为 $x_1(i) = 0$,则可以将 $x_2(i)$当作分形过程信号,作为下面分析中的有效信号,将 $x_1(i)$忽略,原序列自相关函数为

$$R_f(\tau) = E[f(i) f(i+\tau)] = E[(x_1(i) + x_2(i) + \omega(i))(x_1(i+\tau) + x_2(i+\tau) + \omega(i+\tau))] = R_2(\tau) + R_{\omega}(\tau) \quad (4)$$

式中, $R_{\omega}(\tau) = \begin{cases} \sigma_{\omega}^2 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases}$, σ_{ω}^2 为白噪声方差.

由以上分析,带白噪声的 $1/f^{\gamma}$分形过程与原分形过程自相关函数曲线只在零点处相差 σ_{ω}^2,在其它地方相同. 通过拟合带噪信号样本的自相关函数 $R_f(\tau)$-τ的曲线,估计出零点处的值,则原自相关函数曲线与拟合曲线在零点处的差便是加性白噪声方差的估值 $\hat{\sigma}_{\omega}^2$. 然而完全不相关的白噪声并不存在,实测的带噪信号的自相关函数与理想的不带噪的 $1/f^{\gamma}$过程的自相关函数在非零处并不完全重合. 因此,为了提高曲线拟合的精度得到更加准确的白噪声强度估计,最佳总延迟 T的选取很关键. 文献[5]中通过计算带噪分形信号互信息函数的方法来解决最佳总延迟的选择问题,表 1反映了信噪比对最佳总延迟的影响. 可以近似认为 $\tau > T$时, $R_f(\tau) = 0$,仍然保证有用数据和拟合结果的准确性.

表 1　信噪比对最佳总延迟的影响[5]

原信噪比/dB	-10	-8	-4	0	4	8	10
最佳总延迟	33	33	41	44	52	54	60

注:原信噪比为 $10\lg[(\sigma_f^2 - \sigma_{\omega}^2)/\sigma_{\omega}^2)]$(dB); σ_f^2为带噪分形信号的方差估计; σ_{ω}^2为白噪声方差估计.

本文采用试凑法确定最佳总延迟,先预选取 $T = 44$,计算出信噪比与表 1的结论相比较,逐次调整 T的值为实际最佳总延迟,最后按照上述方法得到准确的白噪声方差估计值 $\hat{\sigma}_{\omega}^2$.

2.2 $1/f^{\gamma}$分形噪声参数估计

低精度 FOG静态输出信号经过温度补偿,去常值漂移,去线性趋势项预处理后得到零漂数据序列,又称随机漂移序列. 零漂数据中通常主要含有分形噪声和高斯白噪声. 基于上述理由,设

$$r(t) = x(t) + \omega(t) \quad (5)$$

式中, $r(t)$为零漂序列; $x(t)$为非平稳、零均值 $1/f^{\gamma}$分形噪声; $\omega(t)$为与 $x(t)$统计独立的加性高斯白噪声. 由于分形噪声在时域是非平稳的,本文在小波变换域进行处理. $x(t)$的尺度为 m ($m \in \{1, 2, \cdots, M\}$)、时刻为 k的小波系数为

$$x_k^m = \int x(t) \psi_k^m(t)\,dt \quad (6)$$

式中

$$\psi_k^m(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - k) \quad (7)$$

$\psi(t)$为母小波,设其消失矩阶数为 R (即若 $k < R$, 有 $\int x^k \psi(x)\,dx = 0$,则称小波 $\psi(t)$具有 R阶消失矩),对于 $0 < \gamma < 2R$,有如下性质:

1) 在尺度 m 下,小波系数 (x_k^m) 是均值为 0,方差为 $\sigma^2 2^{-\gamma m}$ 的序列[6];

2) 同一尺度下,小波系数 (x_k^m) 序列近似为弱相关的平稳随机序列;

3) 不同尺度的同一时刻 $(2^m k = 2^{m'} k')$ 下的小波系数的协方差只是 $(m - m')$ 的函数;

4) 自相似参数 $H \in (0, 1)$ 的分形过程 $B_H(t)$,其同一尺度下的小波系数的自相关函数近似满足下式[8]:

$$E[x_n^m, x_k^m] \propto O(|n - k|^{2(H-R)}) \tag{8}$$

由此可见,$(H - R)$ 直接影响了同一尺度小波系数序列相关性的变化趋势. 相关性随 R 的增加而呈指数下降,当 R 较大时,相关函数近似为冲激函数,序列几乎不相关. 因此小波变换对分形噪声有近似的 Karhunen-Loeve 展开的作用,小波系数的相关函数衰减很快,不再具有长程相关性质[9];但是选择消失矩大的小波基同时会增加计算量.

本文采用具有五阶消失矩的 Daubechies 5 小波,最大分解尺度为 5,满足上述要求. 基于上述理论对式 (5) 作小波变换得各尺度下小波系数的方差为

$$V(r_k^m) = \sigma^2 2^{-\gamma m} + \sigma_\omega^2 = \sigma_m^2 \tag{9}$$

用 2.1 节的方法估计出来的 $\hat{\sigma}_\omega^2$ 代替 σ_ω^2,对式 (9) 变换得:

$$\log_2(\sigma^2 2^{-\gamma m}) = \log_2(\sigma_m^2 - \hat{\sigma}_\omega^2) \tag{10}$$

$$2\log_2\sigma - \gamma m = \log_2(\sigma_m^2 - \hat{\sigma}_\omega^2) \tag{11}$$

式 (11) 是一个线性方程,自变量为尺度 m,因变量为 $\log_2(\sigma_m^2 - \hat{\sigma}_\omega^2)$,其中 σ_m^2 可由直接计算各尺度下小波系数的方差得到;参数 γ 和 σ^2 由最小二乘拟合的方法得到,γ 为一次项系数,$2\log_2\sigma$ 为常数项.

3 小波阈值滤波

文献 [10] 提出用小波软阈值滤波方法从噪声中恢复有用信号,假定信号模型为

$$f(t_i) = s(t_i) + \sigma^* z_i \tag{12}$$

式中,z_i 为高斯白噪声;σ^* 为噪声水平. 阈值选择为

$$t_n = \sigma^* \sqrt{2\log_2 n} \tag{13}$$

按式 (13) 选取阈值时,重构信号具有很好的光滑性和适应性. 本文参考文献 [11] 的方法,采用改进的软阈值,选取阈值为

$$t_n = \sigma^* \sqrt{2\log_2 n}/\ln(1 + m) \tag{14}$$

式中 m 为尺度. 该改进具有良好的效果.

FOG 输出信号小波滤波降噪的步骤如下:

1) 信号分解. 选用 Daubechies 5 小波对预处理后的 FOG 数据序列进行 5 尺度的正交小波分解,得各尺度下的小波系数和粗糙系数.

2) 小波系数阈值量化. 根据式 (14) 选取阈值,由于 FOG 零漂信号主要包括白噪声和分形噪声,所以 σ^* 应按下式调整:

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma^2 \cdot 2^{-\gamma m} + \sigma_\omega^2} \tag{15}$$

式中,m 为尺度;σ_ω^2 为白噪声的方差,用 2.1 节的方法估计得到;σ^2 和 γ 为 $1/f^\gamma$ 分形噪声参数,由 2.2 节的方法估计得到. 用非线性函数 $\eta(y)$ 作用于各尺度小波系数,对其用软阈值进行量化,从而可同时去除信号中的分形噪声和白噪声.

$$\eta(y) = \begin{cases} \operatorname{sign}(y)(|y| - t_n) & |y| > t_n \\ 0 & |y| \le t_n \end{cases} \tag{16}$$

3) 信号重构. 根据修正后的小波系数和第 5 尺度下的粗糙系数,可重构得到去噪后的信号.

上述方法采用的是软阈值滤波,阈值和样本长度有关,当样本长度变化较大时可以在前面乘以一个调节因子增加适应性.

4 实验仿真结果

实验用的 FOG 是俄罗斯 Fizoptika 公司的 vg949p 型低精度 FOG,整个估计降噪过程如下:

1) 静态数据采集及预处理. 采样周期为 1 s,采样时间为 1 h,数据包括 3 个方向陀螺输出和温度输出,AD 为 16 位,原始数据见表 2,陀螺输出数据是电压 (V),预处理包括温度补偿和线性趋势项去除,数据格式转换为角速度 ((°)/h),取 2 048 个样本分析处理. 图 1 为预处理后 x 轴陀螺漂移数据.

表 2 陀螺原始数据

组号	G_x	G_y	G_z	T
1	32 947	32 937	32 976	41 351
2	32 948	32 937	32 975	41 352
3	32 946	32 936	32 974	41 353

注:G_x, G_y, G_z 分别为 AD 采样陀螺 x 轴、y 轴、z 轴方向的输出信号数字量;T 为 AD 采样的温度传感器输出信号数字量.

2) 求自相关函数估计白噪声方差. 按 2.1 节的方法,取最佳总延迟 $T = 33$,$\sigma_\omega^2 = 39.5433$,图 2 为带噪信号自相关函数及其拟合曲线.

3) 小波变换域估计分形参数. 按 2.2 节的方法,先对图 1 所示的漂移序列以 Daubechies 5 小波作 5 尺度分解,计算各尺度下小波系数的方差,

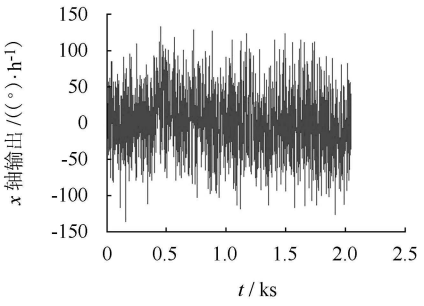


图 1　预处理后 x轴漂移数据

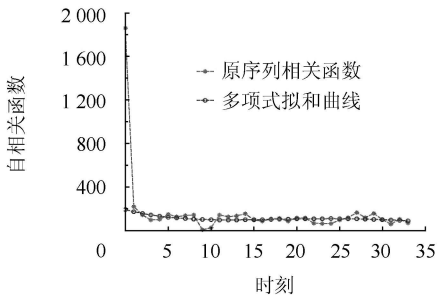


图 2　带噪信号序列自相关函数及其拟合

按式 (11)作最小二乘估计得分形参数估计值: $\gamma = 1.8372, \sigma = 1.4992$.

4) 小波软阈值滤波. 在上一步的基础上,按第 3节的方法对各尺度小波系数作软阈值量化处理,用处理后的小波系数和第 5尺度粗糙系数重构得到去噪后的信号. 图 3为去噪后的信号,表 3为滤波前后漂移序列参数对比. 经滤波后零漂序列标准差从 42.9574(°)/h降到 12.0096(°)/h

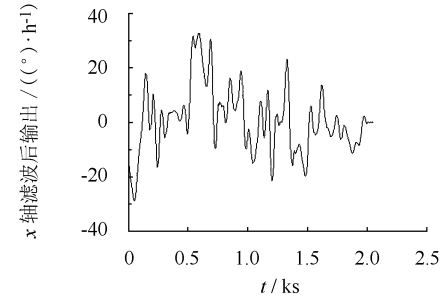


图 3　滤波后信号输出

表 3　滤波前后漂移序列参数对比　(°)/h

参数状态	均值 u	标准差 σ
滤波前	0	42.9574
滤波后	0.7752	12.0096

5　结 束 语

本文总结了在满足一定条件下,$1/f^{\gamma}$分形过程在时域及小波变换域的性质. 提出了一种新的估计分形参数及高斯白噪声强度的方法,该方法适用于 $1/f^{\gamma}$分形过程被白噪声污染的情况,不需要白噪声的先验知识. 通过选取适当的阈值,小波阈值滤波对 FOG信号中的分形噪声和白噪声具有很好的抑制作用.

参考文献 (References)

[1] Bialas B M. Stochastic and dynamic modeling of fiber gyros [C]//Proc SPIE Int Soc Opt Eng. Bellingham, WA: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 1994, 2292: 240 - 253

[2] Skaloud J, Bruton A M, Schwarz K P. Detection and filtering of short-term ($1/f^{\gamma}$) noise in inertial sensors [J]. Navigation, 1999, 46(2): 97 - 107

[3] Wornell G, Oppenheim A. Estimation of fractal signals from noise measurements using wavelets [J]. IEEE Trans On Signal Processing, 1992, 40(3): 611 - 623

[4] Ninness B. Estimation of $1/f$ noise [J]. IEEE Trans on Info Theory, 1998, 44(1): 32 - 46

[5] 何凯,王树勋,戴逸松. 估计 $1/f$类分形信号信噪比的新方法 [J]. 吉林大学学报, 2004, 34(1): 36 - 38
He Kai, Wang Shuxun, Dai Yisong. New SNR estimation method to $1/f$ fractal signal [J]. Journal of Jilin University, 2004, 34(1): 36 - 38 (in Chinese)

[6] 杨福生. 小波变换的工程分析与应用 [M]. 北京:科学出版社, 2003: 235 - 238
Yang Fusheng. Engineering analysis and application of wavelet transform [M]. Beijing: Science Industry Press, 2003: 235 - 238 (in Chinese)

[7] Wornell G W. Wavelet-based representations for the $1/f$ family of fractal processes [J]. Proc of the IEEE, 1993, 91(10): 1428 - 1450

[8] Wornell G W. A karhunen-loeve-like expansion for $1/f$ processes via wavelet [J]. IEEE Tran IT, 1990, 26(4): 859 - 860

[9] 高新波,谢维信. 基于小波变换的分形噪声白话滤波器 [J]. 西安电子科技大学学报, 1998, 25(5): 566 - 569
Gao Xinbo, Xie Weixin. Wavelet-based whitening filter of fractal noise [J]. Journal of XiDian University, 1998, 25(5): 566 - 569 (in Chinese)

[10] Donoho D L. Denoising by soft-thresholding [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(3): 613 - 627

[11] 赵瑞珍,宋国乡. 一种基于小波变换的白噪声消噪方法的改进 [J]. 西安电子科技大学学报, 2000, 27(5): 619 - 622
Zhao Ruizhen, Song Guoxinag. An improved method for white noise reduction based on wavelet transform [J]. Journal of XiDian University, 2000, 27(5): 619 - 622 (in Chinese)

(责任编辑:文丽芳)