一种优化的挠性陀螺仪六位置试验方案

富 立 刘文丽

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院，北京 100083)

摘 要：为了以较低的试验成本获得较高的挠性陀螺静态误差模型系数估计精度，提出了一种基于D-最优准则和正交试验设计的优化地理坐标六位置试验方案.为了验证D-最优地理坐标六位置试验方案的有效性，进行了多次D-最优地理坐标六位置试验和ANSI/IEEE Std 813-1988中规定的地理坐标八位置试验.试验结果表明，在试验成本较低的情况下，D-最优地理坐标六位置试验方案不仅可以估计出挠性陀螺简化静态误差模型系数，而且其估计精度比ANSI/IEEE Std 813-1988中规定的地理坐标八位置试验方案的估计精度略高.

关 键 词：试验；陀螺仪；优选法

中图分类号：V 249.32

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2008)05-0609-04

D-optimal six position testing method for dynamically tuned gyro

Fu Li Liu Wenli

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: The construction of a D-optimal six position experimental design for the two-degree of freedom dynamically tuned gyroscope was presented, in order to improve estimate accuracy of the acceleration-insensitive drift rate and acceleration-sensitive drift rate coefficients of the assumed error model at reasonable experimental cost. The basis idea is to choose six measurement positions to build a D-optimal experiment by applying the symmetric separate design method of orthogonal design. In order to test the efficiency of D-optimal six position experimental design, a series of lab tests were conducted to compare the coefficients solution computed with a usual experimental design in ANSI/IEEE Std 813-1988 and the D-optimal six position experimental design. Tests results show that the D-optimal six position experimental design provides at least same accurate estimates of the acceleration-insensitive drift rate and acceleration-sensitive drift rate coefficients compared to a usual experimental design in ANSI/IEEE Std 813-1988 at less experimental cost .

Key words: experiments; gyroscopes; optimization

地理坐标位置试验是一种力矩反馈试验，主要用于估计陀螺的静态误差系数和评价陀螺的短期重复性.由于这种试验简单易行，可以将陀螺二次项静态误差系数的影响隔离掉，从而精确地计算出陀螺的零次和一次项主要静态误差系数，因此被生产单位和研制单位作为挠性陀螺的常规试验方法之一.目前常用的挠性陀螺地理坐标位置试验包括国军标GJB1183-91和ANSI/IEEE Std 813-1988中规定的八位置试验方案以及正交二十四位置试验方案.

根据试验目的和方法的不同，挠性陀螺地理坐标位置试验一般需要利用高精度的双轴或三轴试验转台，随着试验位置数的增加，试验成本则按比例地增加；而工程上需要估计误差系数精度高，而试验成本经济的试验方法.为了解决这个矛盾，本文基于D-最优准则[1]和正交试验设计[2]方法，

收稿日期：2007-12-03

基金项目：国家973基金资助项目

作者简介：富 立(1969—)，女，辽宁沈阳人，副教授，fuli@buaa.edu.cn.

提出了一种优化的六位置试验方案.在试验成本较低的情况下,该试验方案可以较高的精度估计出挠性陀螺包括安装误差在内的零次和一次项静态误差系数.

1 挠性陀螺简化静态误差模型

在精度要求不是特别高的应用系统中,在基准坐标系(地理坐标系)$OXYZ$下挠性陀螺静态误差模型可简化为[3]

$$\left.\begin{aligned} D(X)&=D(X)_{\mathrm{F}}+D(X)_X a_X+\\ &\quad D(X)_Y a_Y+D(X)_Z a_Z\\ D(Y)&=D(Y)_{\mathrm{F}}+D(Y)_X a_X+\\ &\quad D(Y)_Y a_Y+D(Y)_Z a_Z \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中,$D(X)$,$D(Y)$分别为陀螺漂移在基准坐标系X轴和Y轴上的投影;$D(X)_{\mathrm{F}}$,$D(Y)_{\mathrm{F}}$分别为基准坐标系下加速度无关漂移系数;$D(X)_X$,$D(X)_Y$,$D(X)_Z$及$D(Y)_X$,$D(Y)_Y$,$D(Y)_Z$分别为基准坐标系下与加速度有关漂移系数;a_X,a_R,a_Z分别为基准坐标系OX轴,OY轴和OZ轴上的加速度分量.

设$Oxyz$为挠性陀螺测量坐标系,Ox轴和Oy轴为挠性陀螺测量轴,z轴为自转参考轴,则陀螺测量坐标系相对基准坐标系的安装误差角(ε,ζ)如图1所示,其中ε为测量轴Ox轴与基准坐标系OX轴之间的夹角,ξ为测量Ox轴与测量Oy轴之间的垂直的偏差角,则在陀螺测量坐标系下陀螺x轴和y轴的漂移$D(x)$,$D(y)$可表示为

$$\left.\begin{aligned} D(x)&=K_y i_y\\ D(y)&=K_x i_x \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中,K_x,K_y分别为陀螺x轴和y轴上力矩器刻度系数;i_x,i_y为对应轴上的力矩器电流.由测量坐标系到基准坐标系的变换关系可得

$$\begin{bmatrix} D(X)\\ D(Y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon+\xi)\\ \cos(\varepsilon) & \cos(\varepsilon+\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} D(x)\\ D(y)\end{bmatrix} \tag{3}$$

将式(1)和式(2)代入式(3)中可得

$$\begin{bmatrix} K_y i_y\\ K_x i_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\cos(\varepsilon+\xi)}{\cos\xi} & \dfrac{\cos(\varepsilon+\xi)}{\cos\xi}\\ \dfrac{-\sin\varepsilon}{\cos\xi} & \dfrac{\cos\varepsilon}{\cos\xi}\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} D_0(X)_{\mathrm{F}}+D(X)_X a_X+D(X)_Y a_Y+D(X)_Z a_Z+\omega_X\\ D_0(Y)_{\mathrm{F}}+D(Y)_X a_X+D(Y)_Y a_Y+D(Y)_Z a_Z+\omega_Y\end{bmatrix} \tag{4}$$

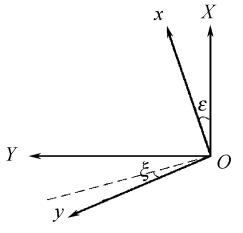


图1 陀螺测量坐标系相对基准坐标系的安装误差角

式中,ω_X,ω_Y分别是地球自转角速度在基准坐标系OX和OY上的分量;并有

$$\left.\begin{aligned} D(X)_{\mathrm{F}}&=D_0(X)_{\mathrm{F}}+\omega_X\\ D(Y)_{\mathrm{F}}&=D_0(Y)_{\mathrm{F}}+\omega_Y \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

令

$$\left.\begin{aligned} &\begin{bmatrix} U_1 & U_2\\ V_1 & V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\cos(\varepsilon+\xi)}{K_y\cos\xi} & \dfrac{\sin(\varepsilon+\xi)}{K_y\cos\xi}\\ \dfrac{-\sin\varepsilon}{K_x\cos\xi} & \dfrac{\cos\varepsilon}{K_x\cos\xi}\end{bmatrix}\\ &\begin{bmatrix} U_0\\ V_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_1 & U_2\\ V_1 & V_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} D(X)_{\mathrm{F}}\\ D(X)_{\mathrm{F}}\end{bmatrix}\\ &\begin{bmatrix} U_3 & U_4\\ V_3 & V_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_1 & U_2\\ V_1 & V_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} D(X)_X & D(X)_Y\\ D(Y)_X & D(Y)_Y\end{bmatrix}\\ &\begin{bmatrix} U_5\\ V_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_1 & U_2\\ V_1 & V_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} D(X)_Z\\ D(Y)_Z\end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

则式(4)可写为

$$\begin{bmatrix} i_y\\ i_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_0\\ V_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} U_1 & U_2\\ V_1 & V_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_Y\\ \omega_X\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} U_3 & U_4\\ V_3 & V_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_X\\ a_Y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} U_5\\ V_5\end{bmatrix}a_Z \tag{7}$$

针对式(7)给出的挠性陀螺简化静态误差模型,利用地理坐标位置试验数据和最小二乘方法可以估计出参数$U_0,\cdots,U_5,V_0,\cdots,V_5$,再根据式(6)可以估计陀螺刻度系数,安装误差以及陀螺的零次和一次项主要静态误差系数.

2 优化的地理坐标六位置试验方案

由式(7)可以看出,挠性陀螺简化静态误差模型中X轴和Y轴分别对应有6个模型参数,因此进行地理坐标六位置试验即可估计出全部的误差模型参数.由于挠性陀螺简化静态误差模型是一种线性回归模型,可采用最优试验设计方法设计地理坐标六位置试验方案,以保证准确的估计误差模型参数.

所谓最优试验设计是基于回归模型的一类试验设计方法[4].假设线性回归模型为

$$Y=\sum_{j=1}^{q}\beta_j f_j(x_1,\cdots,x_p)+\xi \tag{8}$$

式中,$p=\{X_k=(x_{k1},\cdots,x_{kp}),k=1,\cdots,n\}$为试验区域上的$n$个试验点,$Y$为相应点的测量值,$\xi$为测量噪声,并满足$\xi\sim(0,\sigma^2)$,$\beta_j(j=1\sim q)$为回归模型系数.将式(8)写为矩阵形式有

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\xi} \tag{9}$$

式中,$\boldsymbol{F}$ 称为结构矩阵.由最小二乘法可得回归模型系数矢量的估值为

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}Y \tag{10}$$

估计参数的方差-协方差阵:

$$\text{Var-Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}})=\sigma^2(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{-1} \tag{11}$$

如果 Var-Cov($\hat{\boldsymbol{\beta}}$)越小,表明模型系数估计的准确程度越高,所以应选择设计点集 P 使($\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$)尽可能地大.定义 $\boldsymbol{M}(P)=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}/n$ 为信息矩阵,如果设计一个试验点集 P 使得信息矩阵行列式 $|\boldsymbol{M}(P)|$ 达到极大,则该设计为 D-最优设计.

文献[5]指出任何一种正交设计一定是某一个多项式回归模型的 D-最优设计,而正交设计的试验点具有均匀分散性的特点.因此,可以在地理坐标位置试验总共 24 种不同的基准坐标系取向中,选取 6 个均匀分散性好的基准坐标系取向作为试验点,使得该试验方案的信息阵行列式在所有六位置试验方案中最大,从而获得具有 D-最优性质的地理坐标六位置试验方案.在此试验方案中,陀螺坐标系的取向以及重力加速度和地球自转角速度分量如表 1 所示.其中重力方向取向上为正;Ω 为地球自转角度;L 为当地纬度;$\omega_{\mathrm{N}}=\Omega\cos L$;$\omega_{\mathrm{U}}=\Omega\sin L$.

由表 1 可得挠性陀螺简化静态误差模型公式(7)的最小二乘估计的结构阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & \omega_{\mathrm{N}} & \omega_{\mathrm{U}} & 1 & 0 & 0\\ 1 & \omega_{\mathrm{N}} & -\omega_{\mathrm{U}} & -1 & 0 & 0\\ 1 & \omega_{\mathrm{U}} & \omega_{\mathrm{N}} & 0 & 1 & 0\\ 1 & -\omega_{\mathrm{U}} & \omega_{\mathrm{N}} & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -\omega_{\mathrm{N}} & 0 & 0 & 1\\ 1 & -\omega_{\mathrm{N}} & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \tag{12}$$

对应的信息阵的行列式为

$$|\boldsymbol{M}(P_{\boldsymbol{A}})|=|1/6\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=0.005\,49\omega_{\mathrm{N}}^4 \tag{13}$$

表 1　D-最优地理坐标六位置试验

位置	基准坐标轴取向			地球自转角速度分量		重力分量		
	X	Y	Z	ω_X	ω_Y	a_X	a_Y	a_Z
1	天	北	西	ω_{U}	ω_{N}	1	0	0
2	地	北	东	$-\omega_{\mathrm{U}}$	ω_{N}	−1	0	0
3	北	天	东	ω_{N}	ω_{N}	0	1	0
4	北	地	西	ω_{N}	$-\omega_{\mathrm{U}}$	0	−1	0
5	南	东	天	$-\omega_{\mathrm{N}}$	0	0	0	1
6	东	南	地	0	$-\omega_{\mathrm{N}}$	0	0	−1

对于式(7)这样简化的误差模型,目前工程上普遍采用 IEEE Std 813-1988[6] 中规定的地理坐标八位置试验来估计误差模型系数.在此试验中,基准坐标系的取向以及重力加速度和地球自转角速度分量如表 2 所示.

表 2　IEEE Std 813-1988 中规定的地理坐标八位置试验

位置	基准坐标轴取向			地球自转角速度分量		重力分量		
	X	Y	Z	ω_X	ω_Y	a_X	a_Y	a_Z
1	北	西	天	ω_{N}	0	0	0	1
2	西	南	天	0	$-\omega_{\mathrm{N}}$	0	0	1
3	南	东	天	$-\omega_{\mathrm{N}}$	0	0	0	1
4	东	北	天	0	ω_{N}	0	0	1
5	地	西	北	$-\omega_{\mathrm{U}}$	0	−1	0	0
6	西	天	北	0	ω_{U}	0	1	0
7	天	东	北	ω_{U}	0	1	0	0
8	东	地	北	0	$-\omega_{\mathrm{U}}$	0	−1	0

由表 2 可得最小二乘估计的结构阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \omega_{\mathrm{N}} & 0 & 0 & 1\\ 1 & -\omega_{\mathrm{N}} & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -\omega_{\mathrm{N}} & 0 & 0 & 1\\ 1 & \omega_{\mathrm{N}} & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -\omega_{\mathrm{U}} & -1 & 0 & 0\\ 1 & \omega_{\mathrm{U}} & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & \omega_{\mathrm{U}} & 1 & 0 & 0\\ 1 & -\omega_{\mathrm{U}} & 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix} \tag{14}$$

相应信息阵的行列式为

$$|\boldsymbol{M}(P_{\boldsymbol{B}})|=|1/8\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|=0.000\,977\omega_{\mathrm{N}}^4 \tag{15}$$

比较式(13)和式(15)可以看出,D-最优地理坐标六位置试验方案(简称方案 1)的信息阵行列式的值比 IEEE Std 813-1988 中规定的地理坐标八位置试验方案(简称方案 2)的信息阵行列式的值大接近 5 倍,表明方案 1 的估计误差方差比方案 2 的小,估计精度高.同时由于方案 1 的试验位置数较少,试验成本相对较低.

3　试验结果

为了验证上述理论结论,在航天某公司的测试中心利用某型挠性陀螺在相同试验条件下分别针对方案 1 和方案 2 进行了对比试验,陀螺的测试结果如表 3 和表 4 所示.

表 3　IEEE Std 813-1988 中八位置试验测试数据

位置	基准坐标轴取向			$D(X)$/Hz	$D(Y)$/Hz
	X	Y	Z		
1	北	西	天	71.80	−29.96
2	西	南	天	−85.27	−191.68
3	南	东	天	−246.71	−32.35
4	东	北	天	−89.61	129.49
5	地	西	北	−93.15	−203.79
6	西	天	北	−259.38	−23.61
7	天	东	北	−81.42	143.42
8	东	地	北	85.05	−36.83

表 4　D-最优六位置试验测试数据

位置	基准坐标轴取向			$D(X)$/Hz	$D(Y)$/Hz
	X	Y	Z		
1	天	北	西	84.38	124.63
2	地	北	东	−261.24	134.53
3	北	天	东	75.61	142.68
4	北	地	西	66.97	−205.22
5	南	东	天	−247.09	−33.04
6	东	南	地	−88.73	−191.07

由测试数据和最小二乘方法可得式(7)中误差模型系数的估计值如表5,表6所示.为了比较方案1和方案2估计挠性陀螺静态误差模型零次和一次项漂移系数的精度,取三组正交位置作为验证试验点,并在3天里做了3次重复验证试验.在验证试验点上陀螺的测试结果如表7所示.

以补偿后的剩余误差平方和作为评价估计漂移系数精度高低的指标,方案1估计的静态误差模型和方案2估计的静态误差模型补偿X轴漂移误差的结果如表8所示.从表8可以看出,方案1补偿后的剩余平方和小于方案2补偿后的剩余平方和.

表5 误差模型系数(V_0,…,V_5)的估计值

方案	V_0/Hz	V_1/((°)·s^{-1}·Hz)	V_2/((°)·s^{-1}·Hz)	V_3/(Hz·g^{-1})	V_4/(Hz·g^{-1})	V_5/(Hz·g^{-1})
1	−88.24	13.83	−0.02	39.36	4.48	0.68
2	−87.29	13.81	−0.19	39.12	7.68	−0.16

表6 误差模型系数(U_0,…,U_5)的估计值

方案	U_0/Hz	U_1/((°)·s^{-1}·Hz)	U_2/((°)·s^{-1}·Hz)	U_3/(Hz·g^{-1})	U_4/(Hz·g^{-1})	U_5/(Hz·g^{-1})
1	−31.45	0.02	13.96	−5.10	39.24	−1.41
2	−30.21	0.11	13.92	−7.59	39.27	−0.91

表7 验证试验点测试数据

位置	基准坐标轴取向			第1天		第2天		第3天	
	X	Y	Z	$D(X)$/Hz	$D(Y)$/Hz	$D(X)$/Hz	$D(Y)$/Hz	$D(X)$/Hz	$D(Y)$/Hz
1	天	南	东	84.4	−198.3	84.7	−196.4	85.1	−195.6
2	地	南	西	−258.7	−188.4	−259.7	−186.4	−258.4	−187.4
3	西	北	地	−85.8	130.9	−85.3	129.6	−84.9	131.6

表8 测试与评价结果

序号	方案1剩余平方和/Hz^2	方案2剩余平方和/Hz^2
第1天	1.505	18.152
第2天	4.073	8.704
第3天	3.708	13.391

4 结束语

上述试验结果表明,在相同的试验条件下采用本文提出的D-最优六位置试验方案估计挠性陀螺简化静态误差模型漂移系数的精度比IEEE Std 813-1988中规定的正交八位置试验方案的估计精度略高,同时由于D-最优六位置试验方案的试验位置数少,试验成本较低,从而有效地解决了挠性陀螺测试过程中测试精度与试验成本之间的矛盾.

参考文献(References)

[1] 王惠文,孟洁.多元线性回归的预测建模方法[J].北京航空航天大学学报,2007,33(4):500−504
Wang Huiwen, Meng Jie. Predictive modeling on multivariate linear regression [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 33(4): 500−504 (in Chinese)

[2] 何麟书,刘刚.一种求解函数全局优化问题的正交方向法[J].北京航空航天大学学报,2005,31(4):425−429
He Linshu, Liu Gang. Orthogonal direction algorithm for global function optimization[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2005, 31(4): 425−429 (in Chinese)

[3] 许国祯.惯性技术手册[M].北京:中国宇航出版社,1995:12−14
Xu Guozhen. Inertial technology handbook[M]. Beijing: China Astronautics Publishing House, 1995: 12−14 (in Chinese)

[4] 徐利治.现代数学手册[M].武汉:华中科技大学出版社,2000:140−142
Xu Lizhi. Modern mathematics handbook[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2000: 140−142 (in Chinese)

[5] 方开泰,马长兴,李久坤.正交设计的最新发展和应用-正交设计的D最优性[J].数理统计与管理,1999,18(4):43−52
Fang Kaitai, Ma Changxing, Li Jiukun. Recent develop of orthogonal factorial designs and their applications D-optimality of orthogonal designs[J]. Application of Statistics and Management, 1999, 18(4): 43−52 (in Chinese).

[6] ANSI/IEEE Std 813-1988, IEEE specification format guide and Test procedure for two-degree-of freedom dynamically tuned gyros[S]

(责任编辑:张 嵘)