可变直径轮月球探测车运动学建模与分析

崔 莹 高 峰

(北京航空航天大学 汽车工程系，北京 100083)

摘 要：针对月球探测的特殊要求，设计了具有滚动扭转转向特性的四轮直径可变月球探测车.通过对可变直径轮的原理进行分析，推导出车轮等效半径的公式.根据该月球探测车的结构特点，以闭链坐标变换和瞬时重合坐标法为基本工具，推导了四轮可变直径轮月球车基于三维地形环境的正、逆运动学模型，分析了相关的运动学特征，提出了运动学逆解的理论解法和实用解法.实用解法有效地降低了计算量.并提出了用车轮等效半径调整探测车辆俯仰角度的方法，提高了月球车的稳定性和通过性能.该研究结果为四轮月球探测车的结构分析与运动控制提供了有力的基础.

关 键 词：月球探测车；可变直径轮；运动学建模；姿态调整

中图分类号：TP 242

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2008)03-0348-05

Kinematic modeling and analysis of variable diameter wheeled lunar rover

Cui Ying Gao Feng

(Dept. of Automobile Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: According to the lunar surface environmental characteristics, a new four variable diameter wheeled lunar rover which consists of a rolling-torsion all wheel steering mechanism was developed. Through the principle analysis of the variable diameter wheel, derived the wheel equivalent radius formula. The calculation formulae based on 3-D environment of positive and inverse kinematics were derived with the method of closed chains coordinates transformation and instantaneous coordinate coincidence founded on the structural characteristic. The kinematic features were analyzed. The theoretical solution and practical solution were deduced. This practical solution can reduce the calculation load. A simplification method of adjusting the pitch angle with the charge of the equivalent radius was suggested. This method can improve the mobility and stability. The results provide the theoretical foundation for structural analysis and motion control of the four-wheeled lunar rover.

Key words: lunar rover; variable-diameter wheel; kinematics modeling; attitude adjustment

本文设计的可变直径轮月球车属于步行轮的一种[1].步行轮由于无轮缘，它在地面上形成不连续的轮辙，滚动阻力及压实土壤阻力大大减少，所以它的附着性能良好，能产生较大的牵引力.可变直径轮月球车不仅继承了步行轮的优点，通过创新设计的机构，实现调整车轮等效半径的目的，并对车辆姿态进行调整，提高车辆的通过性和安全性.

在移动机器人研究领域中，运动学建模大多是针对二维平坦光滑的地形进行，只能实现机器人3个自由度的运动[2].文献[3]于1987年提出了平面轮式移动机器人的基于坐标变换的运动学建模方法.此后文献[4]对美国喷气实验室的六轮摇臂火星探测车Rocky 7的运动学建模进行了研究.通过采用开链机构中常用的D-H齐次矩阵法建立坐标变换系统，该方法对摇臂探测车这种复杂闭链系统而言通用性不强，且忽略了车轮的纵向和侧向滑移.文献[5]采用了闭链系统通用位姿

收稿日期：2007-06-29

作者简介：崔 莹(1980—)，女，山东诸城人，博士生，cuiyingbuaa@yahoo.com.cn.

矩阵变换法,研究了 6 轮摇臂探测车的正运动学、逆运动学,但并未考虑车轮复合倾角的影响.本文采用闭链坐标变换和瞬时运动坐标系重合法,研究了具有复合倾角的可变直径轮月球车的正运动学、逆运动学,给出了理论分析和实时计算的具体公式,并分析了相关的运动特征.提出了通过调整车轮等效半径,改善车辆俯仰角和侧倾角的方法,提高了月球车的通过性与可靠性.

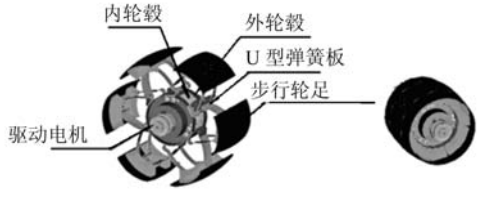
1　可变直径轮月球车原理分析

本文研究的月球探测车采用 4 轮可变直径轮差速悬架式结构,4 轮独立驱动、独立转向,轮子为新型的可变直径轮.其地形适应能力强,可进行姿态调整,具有较好的通过性能与机动能力.整车结构如图 1 所示.



图 1　可变直径轮月球车

通过安装在轮子内部两个电机的驱动,使内轮毂和外轮毂相对旋转,安装在内、外轮毂上的 U 型弹簧板变形,实现轮子直径可变.月球车在发射状态时,轮收缩到最小直径,节省了占地空间.在硬地面行驶时,轮子收缩,轮缘为封闭的圆,降低了步行轮行驶时轮心波动的现象.在松软土壤条件下,轮子张开为步行轮,提高车辆在松软地面的通过性能.同时,通过调整各个车轮的等效直径,可对车辆姿态进行调整,提高探测车辆的性能.见图 2.



a　张开状态　　b　收拢状态

图 2　可变直径轮伸缩示意图

在推导前,先做如下假设:①忽略轮脚的尺寸;②内轮毂和外轮毂的直径相差很小,简化为直径相等;③当内轮毂和外轮毂相对转动时,U 型钢板可看成五连杆机构,各连杆的长度分别为 a, b, c;④轮子的等效半径为 r,其大小随着内外轮毂的相对转动角度 η 而改变.其原理如图 3 所示.

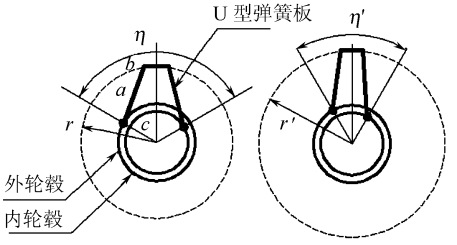


图 3　轮子直径可变原理图

则直径可变步行轮机构的等效半径为

$$r=\sqrt{a^2-\left(c\sin\frac{\eta}{2}-\frac{b}{2}\right)^2}+c\cos\frac{\eta}{2}$$
$$0\leqslant\eta\leqslant\pi \tag{1}$$

2　运动学分析

在坐标系建立前,先做如下简化:①地面条件为水平路面;②轮子与地面接触时,只做纯滚动,是点接触,不存在滑动摩擦力;③轮子转向轴和摇臂交于空间点 R,其坐标系如图 4 所示,均为右手系;④轮子的半径为等效半径 r,其大小可变.

建立如图 4 所示的坐标系:地面坐标系 $\boldsymbol{G}$;车体参考点坐标系 $\boldsymbol{B}$;车体参考点瞬时重合坐标系 $\overline{\boldsymbol{B}}$;摇臂中心点坐标系 $\boldsymbol{M}_j(j=1,2)$;轮子参考点坐标系 $\boldsymbol{R}_i$;摇臂轴坐标系 $\boldsymbol{H}_i(i=1,2,3,4)$;轮子转向轴坐标系 $\boldsymbol{S}_i(i=1,2,3,4)$,原点 $\boldsymbol{S}_i$ 与 $\boldsymbol{R}_i$ 重合,初始位置和坐标系 $\boldsymbol{H}_i(i=1,2,3,4)$ 重合;车轮坐标系 $\boldsymbol{W}_i(i=1,2,3,4)$;轮子地面接触点坐标系 $\boldsymbol{C}_i(i=1,2,3,4)$;轮子地面瞬时重合坐标系 $\overline{\boldsymbol{C}}_i$ $(i=1,2,3,4)$,初始位置与坐标 $\boldsymbol{C}_i(i=1,2,3,4)$ 重合.其中,$\alpha_i(i=1,2,3,4)$:轮 i 的转向轴内倾角;L:摇臂中心点到转向轴的垂直距离;c:车体参考点 B 到摇臂中心点的距离;l_s:转向臂长度.

轮式深空探测车辆的坐标变换如图 5 所示,采用闭链坐标变换和瞬时运动坐标系重合法,得到下述的各个变换矩阵[6].

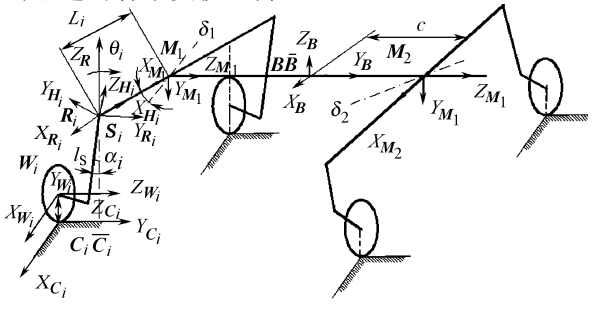


图 4　可变直径轮月球车坐标示意图

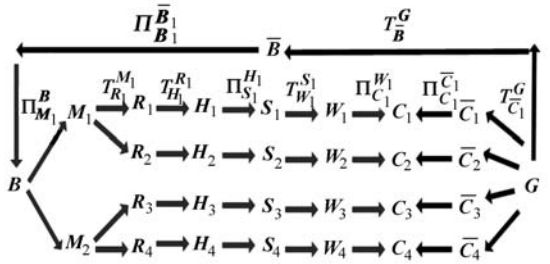


图5 坐标变换关系图

$$\boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{B}}^{\bar{\boldsymbol{B}}}=(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{G}})^{-1}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{C}_i}^{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{C}_i}^{\bar{\boldsymbol{C}}_i}(\boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{C}_i}^{\boldsymbol{W}_i})^{-1}(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{W}_i}^{\boldsymbol{S}_i})^{-1}\cdot(\boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{S}_i}^{\boldsymbol{H}_i})^{-1}(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{H}_i}^{\boldsymbol{R}_i})^{-1}(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{R}_i}^{\boldsymbol{M}_j})^{-1}(\boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{M}_i}^{\boldsymbol{B}})^{-1}$$

令
$$\boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{B}}^{\bar{\boldsymbol{B}}}=\begin{bmatrix}0 & -\dot{\phi} & \dot{\beta} & \bar{\upsilon}_x\\ \dot{\phi} & 0 & -\dot{\varphi} & \bar{\upsilon}_y\\ \dot{\beta} & \dot{\varphi} & 0 & \bar{\upsilon}_z\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}^{\bar{\boldsymbol{B}}}=[\bar{\upsilon}_x\quad\bar{\upsilon}_y\quad\bar{\upsilon}_z\quad\dot{\varphi}\quad\dot{\beta}\quad\dot{\phi}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{u}_i=[\upsilon_{ix}\quad\upsilon_{iy}\quad\upsilon_{iz}\quad\dot{\omega}_i\quad\frac{1}{\dot{r}_i}\quad\dot{\theta}_i\quad\dot{\delta}_j]^{\mathrm{T}}$$

式中，$\bar{\upsilon}_x$，$\bar{\upsilon}_y$，$\bar{\upsilon}_z$，$\dot{\varphi}$，$\dot{\beta}$，$\dot{\phi}$ 为车体坐标系 $\boldsymbol{B}$ 在瞬时重合坐标系$\bar{\boldsymbol{B}}$中的速度及角速度分量；υ_{ix}，υ_{iy}，υ_{iz} 为轮 i 的地面接触点坐标系 $\boldsymbol{C}_i$ 在轮子地面接触点瞬时重合坐标系$\bar{\boldsymbol{C}}$中的速度；φ_i 为车轮 i 的驱动旋转角度；r_i 为车轮 i 的等效半径；θ_i 为轮 i 的转向角度；δ_i 为摇臂 i 的转角，则可变直径轮月球车运动学方程为

$$\dot{\boldsymbol{p}}^{\bar{\boldsymbol{B}}}=\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{u}_i \tag{2}$$

$$\boldsymbol{D}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_{x1} & \boldsymbol{o}_{x1} & \boldsymbol{a}_{x1} & \boldsymbol{A}_{14} & \boldsymbol{B}_{14} & \boldsymbol{C}_{14} & 0\\ \boldsymbol{n}_{y1} & \boldsymbol{o}_{y1} & \boldsymbol{a}_{y1} & \boldsymbol{A}_{24} & \boldsymbol{B}_{24} & \boldsymbol{C}_{24} & 0\\ \boldsymbol{n}_{z1} & \boldsymbol{o}_{z1} & \boldsymbol{a}_{z1} & \boldsymbol{A}_{34} & \boldsymbol{B}_{34} & \boldsymbol{C}_{34} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{A}_{12} & 0 & \boldsymbol{C}_{12} & -1\\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{A}_{13} & 0 & \boldsymbol{C}_{13} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{A}_{23} & 0 & \boldsymbol{C}_{23} & 0\end{bmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{n}_{x1}$，$\boldsymbol{n}_{y1}$，$\boldsymbol{n}_{z1}$；$\boldsymbol{o}_{x1}$，$\boldsymbol{o}_{y1}$，$\boldsymbol{o}_{z1}$；$\boldsymbol{a}_{x1}$，$\boldsymbol{a}_{y1}$，$\boldsymbol{a}_{z1}$；$\boldsymbol{A}_{14}$，$\boldsymbol{A}_{24}$，$\boldsymbol{A}_{34}$，$\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}_{13}$，$\boldsymbol{A}_{23}$；$\boldsymbol{B}_{14}$，$\boldsymbol{B}_{24}$，$\boldsymbol{B}_{34}$；$\boldsymbol{C}_{12}$，$\boldsymbol{C}_{13}$，$\boldsymbol{C}_{23}$ 的大小由参数 δ_i，θ_i，α_i，L，c，l_s，r_i 决定.

3 正运动学

对于轮式探测车辆而言，其正运动学的含义是指用单个车轮的速度参数求解车体坐标系参考点(质心)的速度参数. 从而求出车体坐标系参考点相对于地面坐标系的位置和姿态. 求得的位置和姿态将用于导航和控制中.

广义速度向量 $\boldsymbol{u}_i$ 可以分解为可测的广义速度向量 $\boldsymbol{q}_{a_i}$ 和不可测的广义速度向量 $\boldsymbol{q}_{u_i}$，即：

$$\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{S}_i\boldsymbol{q}_{a_i}+\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{q}_{u_i} \tag{3}$$

式中
$$\boldsymbol{q}_{a_i}=\begin{bmatrix}\dot{\omega}_i & \frac{1}{\dot{r}_i} & \dot{\theta}_i & \dot{\delta}_j\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{q}_{u_i}=[\dot{\tau}_i\quad\dot{\eta}_i\quad\dot{\xi}_i]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{S}_i=\begin{bmatrix}r_i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad\boldsymbol{U}_i=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{q}_{a_i}$，$\boldsymbol{q}_{u_i}$，$\boldsymbol{S}_i$，$\boldsymbol{U}_i$ 带入式(2)，得

$$\dot{\boldsymbol{p}}^{\bar{\boldsymbol{B}}}=\boldsymbol{J}_{a_i}\boldsymbol{q}_{a_i}+\boldsymbol{J}_{u_i}\boldsymbol{q}_{u_i}=[\boldsymbol{J}_{a_i}\quad\boldsymbol{J}_{u_i}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_{a_i}\\ \boldsymbol{q}_{u_i}\end{bmatrix} \tag{4}$$

式(4)表示了单个车轮引起的车体参考点的运动. 4个这样的方程共同决定了车体质心的运动. 为了计算出由可测量的轮子的广义速度向量 $\boldsymbol{q}_a$ 确定的质心的位姿，根据上面的推论，可以得到下面的等式.

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{J}_{u_1} & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{I} & 0 & -\boldsymbol{J}_{u_2} & 0 & 0\\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 & -\boldsymbol{J}_{u_3} & 0\\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{J}_{u_4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{p}}^{\bar{\boldsymbol{B}}}\\ \boldsymbol{q}_{u_1}\\ \boldsymbol{q}_{u_2}\\ \boldsymbol{q}_{u_3}\\ \boldsymbol{q}_{u_4}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{a_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{J}_{a_2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{J}_{a_3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{J}_{a_4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_{a_1}\\ \boldsymbol{q}_{a_2}\\ \boldsymbol{q}_{a_3}\\ \boldsymbol{q}_{a_4}\end{bmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{A}_0\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{p}}^{\bar{\boldsymbol{B}}}\\ \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{u}}^{\bar{\boldsymbol{B}}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}_0\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{a}}^{\bar{\boldsymbol{B}}} \tag{5}$$

由于矩阵非方阵，应用广义逆矩阵给出线性最小二乘方问题的通解.

采用加权最小二乘法求解方程(5)，令 $\boldsymbol{W}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{W}_1,\cdots,\boldsymbol{W}_4\}$ 为加权对角阵，其中 $\boldsymbol{W}_i=k_i\boldsymbol{I}_0$，$k_i$ 为加权因子，用来决定各车轮对整车运动的贡献大小，$\boldsymbol{I}_0$ 为 6×6 的单位阵. 则方程(5)的加权最小二乘解为

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{p}}^{\bar{\boldsymbol{B}}}\\ \hat{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{u}}^{\bar{\boldsymbol{B}}}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}_0)^{-1}\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_0\hat{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{a}}^{\bar{\boldsymbol{B}}} \tag{6}$$

进一步推导式(6)的具体形式，由 $\boldsymbol{W}$ 的定义可得：

$$\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{W}_i & \boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{F}\end{bmatrix} \tag{7}$$

其中

$$\boldsymbol{G}=[-\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{J}_{u_1}\quad -\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{J}_{u_2}\quad -\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{J}_{u_3}\quad -\boldsymbol{W}_4\boldsymbol{J}_{u_4}]$$

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{u_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{J}_{u_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{J}_{u_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{J}_{u_2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{J}_{u_3}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{J}_{u_3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{J}_{u_4}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_4\boldsymbol{J}_{u_4}\end{bmatrix}$$

令

$$k_i=c_0\exp(-c_1\hat{\boldsymbol{q}}_{u_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{q}}_{u_i}) \tag{8}$$

式(8)中,c_0,c_1为选定的常数,$\boldsymbol{R}$ 为设定的比例阵,在各项滑移量相差不大的情况下可取为单位阵.设

$$(\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}_0)^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{Y}_{12}\\ \boldsymbol{Y}_{21} & \boldsymbol{Y}_{22}\end{bmatrix} \tag{9}$$

则

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{Y}_{12}\\ \boldsymbol{Y}_{21} & \boldsymbol{Y}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{W}_i & \boldsymbol{G}\\ \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{F}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{bmatrix} \tag{10}$$

结合式(6),得

$$\dot{\boldsymbol{p}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}=[\boldsymbol{Y}_{11}\quad \boldsymbol{Y}_{12}]\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}_0\dot{\boldsymbol{q}}_a^{\overline{\boldsymbol{B}}} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{Y}_{11}=\left\{\sum_{i=1}^{4}k_i\Delta(\boldsymbol{J}_{u_i})\right\}^{-1}$$

$$\boldsymbol{Y}_{12}=\boldsymbol{Y}_{11}[\boldsymbol{J}_{u_1}(\boldsymbol{J}_{u_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{u_1})^{-1}\cdots\boldsymbol{J}_{u_4}(\boldsymbol{J}_{u_4}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{u_4})^{-1}]$$

定义矩阵函数 $\boldsymbol{\Delta}(\cdot)$:

$$\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{X}=\mathrm{Null}\\ \boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{X}\neq\mathrm{Null}\end{cases}$$

把 $\boldsymbol{Y}_{11}$,$\boldsymbol{Y}_{12}$,$\boldsymbol{G}$,$\boldsymbol{F}$ 表达式带入可得探测车辆位姿速度向量 $\dot{\boldsymbol{p}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}$ 的计算式:

$$\dot{\boldsymbol{p}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}=\left\{\sum_{i=1}^{4}k_i\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{J}_{u_i})\right\}^{-1}\times[k_1\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{J}_{u_1})\boldsymbol{J}_{a_1}\cdot$$

$$k_2\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{J}_{u_2})\boldsymbol{J}_{a_2}\quad k_3\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{J}_{u_3})\boldsymbol{J}_{a_3}\quad k_4\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{J}_{u_4})\boldsymbol{J}_{a_4}]\dot{\boldsymbol{q}}_a^{\overline{\boldsymbol{B}}}$$

式中,$\dot{\boldsymbol{p}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}$是在车体参考点瞬时重合坐标系$\overline{\boldsymbol{B}}$中表示的.将 $\dot{\boldsymbol{p}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}$左乘相应的变换阵 $\boldsymbol{M}^*$ 得到位姿速度向量在地面坐标系 $\boldsymbol{G}$ 中的表示 $\dot{\boldsymbol{p}}$,再对时间进行积分即可得到探测车辆在月球地面坐标系中的位姿估算值 $\boldsymbol{p}$.设探测车在月球地面坐标系中的位姿向量为 $\boldsymbol{p}=[x\quad y\quad z\quad \varphi\quad \beta\quad \phi]^{\mathrm{T}}$.

故地面坐标系 $\boldsymbol{G}$ 中参考点 $\boldsymbol{B}$ 的第 n 个采样时刻位姿估计值为

$$[x\quad y\quad z\quad \varphi\quad \beta\quad \phi]^{\mathrm{T}}=$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}(nT-T)+\frac{T}{2}\boldsymbol{M}^*(nT-T)\cdot$$

$$[\dot{\boldsymbol{p}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}(nT-T)+\dot{\boldsymbol{p}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}(nT)]$$

已知广义速度初值 $\dot{\boldsymbol{p}}(0)$和位姿向量初值 $\boldsymbol{p}(0)$,就可以求得第 n 个采样时刻得位姿估计值 $\boldsymbol{p}(nT)$.

由式(2)可知,正运动学解 $\dot{\boldsymbol{p}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}$存在的条件是:$\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}_0)=12$.由于变量 ω_i,θ_i,δ_i 间不存在耦合,即 $\det(\boldsymbol{J}_{a_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{a_i})\neq 0$,因此 $\dot{\boldsymbol{p}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}$总是有解的.另外探测车辆共有 12 个执行量(4 个驱动,4 个转向,4 个调节轮子直径),而测量共有 14 个:($\omega_1,\cdots,\omega_4$,$r_1,\cdots,r_4$,$\theta_1,\cdots,\theta_4$,δ_1,δ_2),2 个被动测量量(δ_1,δ_2)不仅为探测车车体位姿估计提供了充分条件,而且为车轮滑移的估侧提供了可能,体现了差动悬架适应型底盘的优越性.

4　逆运动学

为了使车体在惯性参考坐标系中的位姿与其变化率满足给定的要求,计算相应的各个执行机构的变量.这一过程称为轮式机器人的逆运动学.即求出各驱动轮的驱动角速度和角度,各个轮子转向角速度和角度以及各个车轮的等效半径.

根据轮式月球车运动学方程:

$$\boldsymbol{A}_0\dot{\boldsymbol{p}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}=\boldsymbol{B}_0\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_a\\ \boldsymbol{q}_u\end{bmatrix}$$

利用广义逆矩阵运算得:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_a\\ \boldsymbol{q}_u\end{bmatrix}=(\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_0)^{-1}\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_0\dot{\boldsymbol{p}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}$$

取上式中关于可测变量 $\boldsymbol{q}_a$ 的部分,得到:

提取 $\boldsymbol{q}_a$ 中关于 $\dot{\omega}$,$1/\dot{r}_i$ 和 $\dot{\theta}_i$ 的行,即得车轮 i 的执行方程.但该方程为运动学逆解的理论分析结果,求解过程中涉及广义逆计算,计算量较大,因此该方程并不用于实时计算,而主要用于理论分析.实际应用中,采用以下的实用解法,特点是计算量较小、简单明了.

$$\boldsymbol{q}_a=\begin{bmatrix}[\boldsymbol{J}_{a_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{J}_{u_1})\boldsymbol{J}_{a_1}]^{-1} & \boldsymbol{J}_{a_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{J}_{u_1})\\ [\boldsymbol{J}_{a_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{J}_{u_2})\boldsymbol{J}_{a_2}]^{-1} & \boldsymbol{J}_{a_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{J}_{u_2})\\ [\boldsymbol{J}_{a_3}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{J}_{u_3})\boldsymbol{J}_{a_3}]^{-1} & \boldsymbol{J}_{a_3}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{J}_{u_3})\\ [\boldsymbol{J}_{a_4}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{J}_{u_4})\boldsymbol{J}_{a_4}]^{-1} & \boldsymbol{J}_{a_4}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{J}_{u_4})\end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{p}}^{\overline{\boldsymbol{B}}}$$

即已知车体质心的纵向速度$\bar{v}_x$,航向角 $\dot{\phi}$ 和俯仰角 $\dot{\beta}$,求解各个车轮的执行量,包括转速$\dot{\omega}_i$,车轮等效半径 r_i 和转向角速率$\dot{\theta}_i$.联立式(3),式(7)及式(8),忽略滑移项,得:

$$\dot{\omega}_i=\frac{C_{23}\dot{\beta}-C_{13}\dot{\phi}}{A_{13}C_{23}-A_{23}C_{13}}=$$

$$\frac{C_{23}\dot{\beta}-C_{13}\dot{\phi}}{\sin\alpha_i\sin\theta_i(\cos\alpha_i-\sin\alpha_i)}$$

$$r_i=\frac{\bar{v}_x-A_{14}\dot{\omega}_i-C_{14}\dot{\theta}_i}{n_{xi}\dot{\omega}_i}=$$

$$\frac{\bar{v}_x-\dfrac{(A_{14}C_{23}+C_{14}A_{23})\dot{\beta}-(A_{14}C_{13}+A_{13}C_{14})\dot{\phi}}{\sin\alpha_i\sin\theta_i(\cos\alpha_i-\sin\alpha_i)}}{(\cos\delta_j\cos\theta_i+\sin\delta_j\cos\alpha_i\sin\theta_i)\dot{\omega}_i}$$

逆运动学的解存在的条件为

$$\delta_j\neq-\arctan\left(\frac{\cos\theta_i}{\cos\alpha_i\sin\theta_i}\right)\text{且}\theta_i\neq0$$

特别的，对于 $\alpha_i=0$ 的构型，逆解存在的条件为：①$\delta_j\neq\pm\pi/2$；②$\theta_i\neq\pm\pi/2$.

条件①表明，当摇臂与路面垂直时，系统处于奇异状态，车体将失去稳定性. 条件②表明，探测车的任意转向车轮的轴线与车体前进方向平行时，系统处于奇异状态，此时探测车若强行驱动，则滑移不可避免. 此外，通过调整车轮等效半径 r_i 的大小，可以改变的轮子俯仰角 $\dot{\beta}$ 的大小，改善车身的平稳性.

5 结束语

可变直径轮月球探测车是集摇臂被动适应和可变直径轮主动适应相结合的轮式移动机器人. 其独特的可变直径轮，保证了探测车辆具有良好的通过性和安全性能. 但其运动分析和控制较为复杂. 针对四轮可变直径轮月球车的结构特点进行分析，研究了探测车的正、逆运动学建模及运动学特性，提出了运动学逆解的理论解法和实用解法. 提出了用车轮等效半径调整探测车辆俯仰角度的方法. 在运动学建模过程中，将车轮不可测的广义速度向量单独提取出来考虑，并给出了滑移估算量的方法. 本文为四轮月球探测车的结构分析和运动控制提供了有力的基础.

参考文献（References）

[1] 高峰，崔莹. 智能可变直径半步行轮：中国，ZL200510077266.7[P]. 2007－10－17
Gao Feng, Cui Ying. Intelliget variable diameter walking wheel:China,ZL200510077266.7[P]. 2007－10－17(in Chinese)

[2] Rajagopalan R. A generic kinematic formulation for wheeled mobile robots[J]. Journal of Robotic Syst, 1997, 14(2):77－91

[3] Muir P F, Neuman C P. Kinematic modeling of wheeled mobile robots[J]. Journal of Robotics Systems, 1987, 4(2): 281－340

[4] Tarokh M, McDermott G, Hayati S, et al. Kinematic modeling of a high mobility mars rover[C]//The 1999 IEEE International Conference on Robotics&Automation. Detroit: [s.n.], 1999: 992－998

[5] 王佐伟，梁斌，吴宏鑫. 六轮月球探测车运动学建模与分析[J]. 宇航学报，2003，24(5)：457－461
Wang Zuowei, Liang Bin, Wu Hongxin. Kinematical modeling and analysis of six-wheel lunar rover[J]. Journal of Astronautics, 2003,24(5):457－461(in Chinese)

[6] 徐贺. 可重构多机动模式移动机器人及其关键技术研究[D]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学机电工程学院，2006
Xu He. A reconfigurable mobile robot with multi-modal maneuverability and study on its key technology[D]. Harbin: School of Technology Mechanics Engineering, Harbin Institute of Technology, 2006(in Chinese)