基于信仰推断的电子设备可靠性增长数据分析

杨 军 赵 宇 于 丹

(北京航空航天大学 工程系统工程系，北京 100191) (中国科学院 数学与系统科学研究院，北京 100080)

摘 要：可靠性增长是可靠性工程的重要方面，但针对工程中普遍存在的各阶段小样本试验数据，基本上还没有有效的分析方法.为此，首先研究推广了参数受限制的 Fiducial 方法，而对于非位置-刻度簇分布，使用规范化的似然方法进行推广，并指出采用 Fiducial 方法得到的评估结果具有很好的频率性质；然后在顺序单调约束的可靠性增长模型下，使用参数受限制的 Fiducial 方法研究了电子产品的可靠性评估方法，具体给出了故障可观测情形和区间数据情形下电子产品失效率的置信上限.

关 键 词：指数分布；单调约束模型；可靠性增长；限制参数空间；Fiducial 分布

中图分类号：O 212.1

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2008)09-0995-04

Data analysis of reliability growth test for electronic equipments based on Fiducial inference

Yang Jun Zhao Yu

(Dept. of System Engineering of Engineering Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Yu Dan

(Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: Reliability growth is an important part of reliability engineering, but for the problem that small samples are often occurred during reliability growth test, there is almost no effective method so far. To solve this problem, fiducial inference with restricted parameter space was studied, for non-location-scale families, it was generalized by standardized likelihood, and it was pointed out that evaluation results obtained by fiducial distribution are equal to the corresponding results obtained by frequency statistics. Under the reliability growth model with monotone constraints, reliability evaluation of electronic equipments for reliability growth test was analyzed by fiducial inference with restricted parameter space, and for cases with complete failure time data or interval-censored failure time data during each stage of the reliability growth test, the upper confidence limit of failure rate for electronic equipments was given in detail.

Key words: exponential distribution; monotone constraints model; reliability growth; restricted parameter space; Fiducial distribution

可靠性增长技术作为可靠性工程的一个重要组成部分，已经成为提高产品可靠性，节约时间和经费的有效办法.但受研制经费、装备时间和设备条件等因素的限制，目前实际部门的可靠性增长试验基本上是根据其实际情况而不是按有关标准进行的，通常称为可靠性自然增长或无序增长.这种可靠性增长过程以阶段数量少、每个阶段所投入的样本量小(许多情况下，样本量仅为1)为主要特点.工程界普遍认为 AMSAA(Army Material System Analysis Activity)模型的有关假定是

收稿日期：2007-08-01

基金项目：总装预研重点基金资助项目(9140A19030106HK0108)

作者简介：杨 军(1976—)，男，山东泰安人，讲师，yongjun@amss.ac.cn.

否符合国内的实际情况值得商榷,这给数据的统计分析和可靠性评估带来很大的困难.

文献[1-2]提出了参数受限制的 Fiducial 推断,并给出了部分频率性质.根据工程实际情况,可以假定电子产品的可靠性增长满足单调约束模型[3],注意到可靠性增长的各个阶段(初始阶段除外)的失效率都是受限制的参数,可以使用参数受限制的 Fiducial 方法对各阶段产品的可靠性进行评估.为此,本文首先研究推广参数受限制的 Fiducial 推断,然后使用该方法在单调约束模型下研究电子设备可靠性增长数据分析,并在故障可观测数据与区间数据两种情形下具体给出了电子产品失效率的评估方法.

1 可靠性增长的单调约束模型

假设产品在零时刻开始进行试验,其失效率为 λ_0,在 t_1 时刻发生故障,采取改进措施后继续进行试验,记其失效率为 λ_1,这样依次下去,在 t_n 时刻发生第 n 次故障,采取改进措施后继续进行试验,记相应的失效率为 λ_n,直到试验结束时刻 t_{n+1} 发生故障.单调约束模型[3]假定

$$\infty > \lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0 \tag{1}$$

显然,参数 $\lambda_i(i=1,\cdots,n)$ 限制在空间 $(0,\lambda_{i-1})$ 上,因此可使用参数受限制的 Fiducial 方法进行数据分析.

2 参数受限制的 Fiducial 推断

本节首先介绍文献[1-2]基于函数模型[4]所推导的参数受限制的 Fiducial 推断,并讨论其频率性质;然后在广义信仰推断基础上,进一步对其进行推广.

设随机变量 X 的概率分布为 $P_\eta(\cdot)$,样本空间为 χ,参数空间为 Ω.记 $x\in\chi$ 为 X 的观测值.假定 $\theta=g(\eta)\in\Theta=\{g(\eta):\eta\in\Omega\}$ 为所关心的实值参数函数,$\delta=\delta(\eta)$ 为讨厌参数,并且 $\eta\leftrightarrow(\theta,\delta)$ 为一一对应.

定义 1[4] 设存在空间 ε 上的随机变量 E,其分布 Q 已知,且存在 $Q\times\varepsilon$ 上的函数 $h(\eta,e)$,使得当参数为 η 时

$$X\overset{d}{=}h(\eta,E)\quad E\sim Q \tag{2}$$

对所有 $\eta\in\Omega$ 成立("$\overset{d}{=}$"指同分布),则称式(2)为函数模型.进一步,若对任意 $x\in\chi$ 和 $e\in E$,方程 $x=h(\eta,e)$ 在 Ω 上有惟一解,记为 $\eta_x(e)$,则称 $\eta_x(E)$ 的分布为 η 的 Fiducial 分布,而 $g(\eta_x(E))$ 的分布为 $\theta=g(\eta)$ 的边际 Fiducial 分布.

定义 2[1-2] 设定义 1 的条件满足,$d(\cdot,\cdot)$ 和 $d'(\cdot,\cdot)$ 分别是 Ω 和 Θ 上的距离,Ω^* 为 Ω 的子集,并且记 $\overline{\Omega}^*$ 为 Ω^* 的闭包.

① 如果 $\eta_x^*(e)=\arg\min d(\eta,\eta_x(e))$,则称 $\eta_x^*(e)$ 的分布为 η 在 Ω^* 上的 Fiducial 分布,此时 Ω^* 称为 η 的限制参数空间.

② 如果 $g(\eta_x^*(e))=\underset{\eta\in\overline{\Omega}^*}{\arg\min}\, d(g(\eta),g(\eta_x(e)))$,则称 $\theta=g(\eta_x^*(e))$ 的分布为 $\theta=g(\eta)$ 在 Θ^* 上的 Fiducial 分布,其中 $\Theta^*=\{\theta=g(\eta):\eta\in\Omega^*\}$,此时 Θ^* 称为 θ 的限制参数空间.

进一步假定 θ 的限制参数空间 $\Theta^*=[a,b]$,记 $F_x(\theta)$ 和 $F_x^*(\theta)$ 分别为 θ 在 Θ 和 Θ^* 上的 Fiducial 分布,则对任意 $\theta\in[a,b)$,有 $F_x^*(\theta)=F_x(\theta)$.有了参数 θ 的 Fiducial 分布,可以进行区间估计.任给的 $0<\alpha_1,\alpha_2<1/2$,令

$$\theta_L(x;\alpha_1)=\sup\{\theta:F_x^*(\theta)<\alpha_1\}=\begin{cases}a & F_x(a)\geqslant\alpha_1\\ \sup\{\theta:F_x(\theta)<\alpha_1\} & F_x(a)\leqslant\alpha_1\leqslant F_x(b)\\ b & F_x(b)<\alpha_1\end{cases} \tag{3}$$

$$\theta_U(x;\alpha_2)=\inf\{\theta:F_x^*(\theta)<1-\alpha_2\}=\begin{cases}a & F_x(a)>1-\alpha_2\\ \inf\{\theta:F_x(\theta)>1-\alpha_2\} & F_x(\alpha)\leqslant1-\alpha_2\leqslant F_x(b)\\ b & F_x(b)\leqslant1-\alpha_2\end{cases} \tag{4}$$

定义 3[1-2] 给定 α_1 和 $\alpha_2(0<\alpha_1,\alpha_2<1/2)$,设 $\theta_L(x;\alpha_1)$ 和 $\theta_U(x;\alpha_2)$ 分别由式(3)和式(4)给出,且 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$,则称 $\theta_L(x;\alpha_1)$ 为 θ 的 $(1-\alpha_1)$ Fiducial 下限,$\theta_U(x;\alpha_2)$ 为 θ 的 $(1-\alpha_2)$ Fiducial 上限,$[\theta_L(x;\alpha_1),\theta_U(x;\alpha_2)]$ 为 θ 的 $(1-\alpha)$ Fiducial 区间.

一般说来,Fiducial 区间不一定为频率意义下的置信区间.对位置(刻度)族参数的 Fiducial 区间,文献[2]得到了如下定理,指出该情形下的 Fiducial 区间具有频率意义.

定理 1[2] ① 假定随机变量 X 服从位置分布族 $\{F(x-\theta)\}$,$F(\cdot)$ 为连续函数,又限制参数空间 $\Theta^*=[a,b]$,则 θ 的 $(1-\alpha)$ Fiducial 上、下限为置信上、下限.

② 假定 X 服从刻度分布族 $\{F(x/\theta)\}$,$F(\cdot)$ 为连续函数,又限制参数空间 $\Theta^*=[a,b]$,则 θ 的 $(1-\alpha)$ Fiducial 上、下限为置信上、下限.

为适应更广泛情形,文献[5]利用广义枢轴模型推广了定义 1,并讨论了其频率性质及应用,但仍不能满足实际需要,因此本文采用规范化似然

作为置信分布来推广前述定义.

定义 4　假设参数 θ 的似然函数为 $L(\theta)$,而 θ 限制在参数子空间 Θ^* 上,定义参数 θ 的受限制 Fiducial 分布密度如下:

$$f(\theta)=\frac{1}{C}L(\theta)\qquad \theta\in\Theta^* \tag{5}$$

其中 $C=\int_{\theta\in\Theta^*}L(\theta)\mathrm{d}\theta$ 为规范化常数. 根据定义 4 可方便地定义参数 θ 受限制时的 Fiducial 上、下限和 Fiducial 区间.

3　故障可观测下的数据分析方法

以两次故障情形为例进行讨论. 假设可靠性增长试验过程中发生过两次故障,故障时刻分别为 t_1,t_2,每次故障后都采取了有效的改进措施,试验到时刻 t_3 停止. 下面分别给出在式(1)下,λ_0,λ_1,λ_2 的 Fiducial 分布,然后可由此进行 Fiducial 推断.

由定义 1,易知 $2t_1\lambda_0\sim\chi^2_2$,那么 λ_0 的 Fiducial 分布密度为 $f_0(\lambda)=t_1\mathrm{e}^{-t_1\lambda}$. 对于 λ_1,由定义 3,$2(t_2-t_1)\lambda_1\sim\chi^2_2$,并且受约束 $\lambda_1\leqslant\lambda_0$,易得在给定 λ_0 的条件下,λ_1 的条件 Fiducial 分布密度为 $f_1(\lambda|\lambda_0)=\dfrac{(t_2-t_1)\mathrm{e}^{-(t_2-t_1)\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-(t_2-t_1)\lambda_0}}$ $(\lambda\leqslant\lambda_0)$,这样得到 λ_1 的受限制的 Fiducial 分布密度为

$$f_1(\lambda_1)=\int_{\lambda_1}^{+\infty}f_1(\lambda_1\mid\lambda_0)f_0(\lambda_0)\mathrm{d}\lambda_0 \tag{6}$$

由定理 1 知,λ_0 和 λ_1 的 Fiducial 分布具有频率意义. 对于 λ_2,似然函数为 $L(\lambda_2)=\mathrm{e}^{-\lambda_2(t_3-t_2)}$ 在给定 λ_1 的条件下,由定义 4 得到 λ_2 的条件 Fiducial 分布密度为

$$f_2(\lambda_2\mid\lambda_1)=\frac{1}{C_{2,\lambda_1}}\mathrm{e}^{-\lambda_2(t_3-t_2)} \tag{7}$$

其中 $C_{2,\lambda_1}=\int_0^{\lambda_1}\mathrm{e}^{-\lambda_2(t_3-t_2)}\mathrm{d}\lambda_2$,因此 λ_2 的受限制的 Fiducial 分布密度为

$$f_2(\lambda)=\int_\lambda^\infty\int_{\lambda_1}^\infty f_2(\lambda\mid\lambda_1)f_1(\lambda_1\mid\lambda_0)\cdot f_0(\lambda_0)\mathrm{d}\lambda_0\mathrm{d}\lambda_1 \tag{8}$$

如果对 λ_0 和 λ_1 也采用定义 4 来定义 Fiducial 分布,则可得到参数 λ_0,λ_1,λ_2 的联合 Fiducial 分布密度

$$f(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)=C\lambda_0\lambda_1\mathrm{e}^{-t_1\lambda_0-(t_2-t_1)\lambda_1-(t_3-t_2)\lambda_2}\times I_{\{\lambda_0\geqslant\lambda_1\geqslant\lambda_2\}} \tag{9}$$

其中 $C=\left(\dfrac{2}{t_3^2}+\dfrac{2}{t_3t_2}+\dfrac{1}{t_3t_1}+\dfrac{2}{t_2^2}+\dfrac{1}{t_2t_1}\right)^{-1}$ 为规范化常数,由此得到 λ_2 的边际 Fiducial 分布

$$F_2(\lambda)=C\left\{-\lambda^2\mathrm{e}^{-t_3\lambda}-\lambda\mathrm{e}^{-t_3\lambda}\left(\frac{2}{t_3}+\frac{2}{t_2}+\frac{1}{t_1}\right)\right\}+(1-\mathrm{e}^{-t_3\lambda}) \tag{10}$$

然后由 $F_2(\lambda)=\gamma$,可得到 λ_2 的 γ Fiducial 上限 λ_{U}.

与上述方法类似,由定义 1~4 处理包含 n 个阶段的可靠性增长试验数据,其中前 $n-1$ 个阶段的评估结果具有频率意义;如果最后一个阶段也得到失效数据,则最后阶段的评估结果也具有频率意义.

例 1　某电子设备进行可靠性增长试验,在试验到 78.9 h 时发生一次故障,采取纠正措施后,试验继续进行了 567.3 h 时设备失效. 这里 $t_1=78.9$,$t_2-t_1=567.3$,设两个阶段设备的失效率依次为 λ_0,λ_1,则 λ_0 的 Fiducial 分布密度 $f_0(\lambda)=78.9\mathrm{e}^{-78.9\lambda}$,而给定 λ_0 时,λ_1 的条件 Fiducial 分布密度为

$$f_1(\lambda\mid\lambda_0)=\frac{567.3\mathrm{e}^{-567.3\lambda}}{1-\mathrm{e}^{567.3\lambda_0}}\quad(\lambda\leqslant\lambda_0)$$

所以 λ_1 的 Fiducial 分布

$$F_1(\lambda)=\int_0^\lambda\int_x^\infty 78.9\mathrm{e}^{-78.9y}\,\frac{567.3\mathrm{e}^{-567.3x}}{1-\mathrm{e}^{-567.3y}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

然后由 $F_1(\lambda)=0.8$,可解得 λ_1 的 0.8Fiducial 上限 0.002 361,而在试验结束时设备可靠度的0.8 Fiducial 下限为 0.262,此外,由定理 1 知此处的 Fiducial 限具有频率意义.

4　区间数据情形下的数据分析方法

在工程实际中所进行的增长试验有时不能准确测定失效时间,仅知道失效时刻落在某个时间区间内. 下面以一次失效的可靠性增长试验为例,在式(1)下讨论相应的 Fiducial 推断,其他情形可类似推出.

假设整个可靠性增长试验过程中发生一次故障,这次故障时刻分别落在区间 $[t_1-d,t_1]$,故障后采取了有效的改进措施,试验到时刻 t_2 停止. 易知 λ_0 的似然为 $L(\lambda_0)=\mathrm{e}^{-\lambda_0(t_1-d)}-\mathrm{e}^{-\lambda_0t_1}$,由定义 4 知,$\lambda_0$ 的 Fiducial 分布密度为

$$f_0(\lambda_0)=\frac{1}{c_0}[\mathrm{e}^{-\lambda_0(t_1-d)}-\mathrm{e}^{-\lambda_0t_1}] \tag{11}$$

其中 c_0 为规范化常数. 在给定 λ_0 的条件下,λ_1 的条件 Fiducial 分布密度为

$$f_1(\lambda_1\mid\lambda_0)=\frac{1}{c_1}\mathrm{e}^{-\lambda_1(t_2-t_1)}\qquad\lambda_0\geqslant\lambda_1>0 \tag{12}$$

其中 c_1 为规范化常数. 因此,λ_0,λ_1 的联合 Fiducial分布密度为

$$f(\lambda_0,\lambda_1)=C[\mathrm{e}^{-\lambda_0(t_1-d)}-\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_1}]\mathrm{e}^{-\lambda_1(t_2-t_1)}$$
$$\lambda_0\geqslant\lambda_1>0 \tag{13}$$

于是积分可得 λ_1 的边际 Fiducial 分布

$$F_1(\lambda)=C\left\{\frac{1}{(t_1-d)(t_2-d)}[1-\mathrm{e}^{-(t_2-d)\lambda}]-\frac{1}{t_1t_2}[1-\mathrm{e}^{-t_2\lambda}]\right\} \tag{14}$$

其中 $C=\left[\dfrac{1}{(t_1-d)(t_2-d)}-\dfrac{1}{t_1t_2}\right]^{-1}$.

例 2 某电子设备的可靠性增长试验数据如表 1 所示,试给出试验结束时设备的失效率上限或可靠度置信下限.

表 1 某电子设备的试验数据

序号	累积工作时间小时/h	发生阶段	故障类别	改进措施
1	[250,270]	增长	关联	纠正
2	389.7+	增长		

记设备在阶段 1 和 2 的失效率分别为 λ_0,λ_1,由式(15)得到 λ_1 的边际 Fiducial 分布

$$F_1(\lambda)=9.79[1-\mathrm{e}^{-639.7\lambda}]-8.79[1-\mathrm{e}^{-659.7\lambda}]$$

于是由 $F_1(\lambda)=0.9$ 得到 λ_1 的 0.9Fiducial 上限 $\lambda_U=0.004\,477$,而试验结束时可靠度的0.9Fiducial 下限 $R_L=0.174\,7$.

5 结束语

本文研究了参数受限制的 Fiducial 方法,并用规范化似然对其进行推广,然后把该方法用于可靠性增长的单调约束模型,很好地解决了电子产品可靠性增长的评估问题,该方法避免了由于某些阶段试验不充分所导致的后一阶段平均寿命评估值低于前一阶段的异常现象.

该方法为可靠性增长数据分析提供了一种新的可行的途径,但是其理论基础及其向威布尔分布等其他分布的推广还急待解决,这有待于今后的进一步研究.

参考文献(References)

[1] 李新民,李国英,徐兴忠. 参数受限制时的 Fiducial 区间及其应用[J]. 中国科学(A 辑),2005,35(1):106－120
Li Xinmin, Li Guoying, Xu Xingzhong. Fiducial interval with restricted parameter space and its application[J]. Science in China(A), 2005, 35(1): 106－120(in Chinese)

[2] 李新民,李国英,徐兴忠. 限制参数空间上的 Fiducial 推断[J]. 系统科学与数学,2005,25(6):729－737
Li Xinmin, Li Guoying, Xu Xingzhong. On Fiducial inference with restricted parameter space[J]. Journal of Systems Science and Mathematics Sciences, 2005, 25(6): 729－737 (in Chinese)

[3] 周源泉,翁朝曦. 可靠性增长[M]. 北京:科学出版社,1992
Zhou Yuquan, Wong Zhaoxi. Reliability growth[M]. Beijing: Science Press, 1992(in Chinese)

[4] David A P, Stone M. The functional model basis of fiducial inference[J]. Ann Statist, 1982, 10(4): 1054－1067

[5] 徐兴忠,李国英. 枢轴分布族中的 Fiducial 推断[J]. 中国科学(A 辑),2006,36(3):340－360
Xu Xingzhong, Li Guoying. Fiducial inference for pivotal families[J]. Science in China(A), 2006, 36(3): 340－360(in Chinese)

(责任编辑:娄 嘉)