压电层合板振动的鲁棒控制

胡举喜 邱志平

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 研究具有不确定系统参数的压电层合板, 同时考虑压电层合板的稳态性能和暂态性能, 在模型降阶的基础上, 应用融合多性能指标的鲁棒控制理论设计控制器, 使压电层合板的振动响应满足给定的期望性能指标集, 并使压电层合板对参数摄动具有鲁棒性, 对扰动输入具有良好的抑制作用. 实现压电层合板的鲁棒控制, 使振动幅度快速、准确地得到控制. 为解决多指标下不确定压电层合板振动的控制问题提供一种代数方法.

关 键 词: 压电层合板; 鲁棒控制; 动力响应; 传递矩阵

中图分类号: O 231.3

文献标识码: A 文章编号: 1001-5965(2008)08-0873-05

Using the robust control method to control the vibration of piezoelectric laminated plates

Hu Juxi Qiu Zhiping

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The piezoelectric laminated plate were researched, which posses the uncertain system parameters, and considering the steady-state behavior and transient performance of the piezoelectric laminated plate. On the foundation of the model deflation, the author used the robust controller to bring the piezoelectric laminated plate have the robustness for the parameter perturbation, and favorable inhibitory action about the disturbance import. The robust control of the piezoelectric lamination plate were realized, and the vibration amplitude were made to be quickly and exactly under control. A kind of algebra method for solve the controlling problem of the piezoelectric laminated plate vibration that with uncertain parameters was supplied.

Key words: piezoelectric laminated plates; robust control; dynamic response; transmission matrix

压电层合板集传感、作动功能于一体, 对其振动进行主动控制, 涉及到电学、力学、控制等多个领域[1]. 文献[2]首先基于经典层合板理论推导了带内自由度的压电等参板单元. 文献[3]通过有限元法得到给定电压下的结构静态响应和应力分布以及压电层面内应力对结构的影响. 文献[4]利用 Rayleigh-Ritz法分析复合材料梁、板、壳的控制问题. 文献[5]提出利用压电贴片控制柔性梁结构变形的数学模型. 文献[6]提出用扰动内电压分布算法优化复合材料板压电作动器上电压的最优分布. 文献[7]研究基于压电传感器、作动器的层合板的振动控制问题. 文献[8]研究压电弯曲执行器在强电场作用下的非线性动力特性. 文献[9]基于 G-L和 L-S广义压电热弹性理论研究了无限大厚压电板在上下表面受到条带状热冲击时的广义压电热弹性. 然而, 在压电结构振动主动控制系统中, 由于剩余模态、系统参数摄动的影响, 压电传感、作动系统误差的存在, 使得结构的精确控制模型很难建立, 鲁棒稳定性也较差. 鲁棒控制 H_∞[10-12]算法因能很好地处理不确定振动控制系统的鲁棒性和稳定性而受到重视.

本文运用结构动力学和鲁棒控制理论, 从动

收稿日期: 2007-07-03

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目 (10425208); 航天科技创新基金资助项目; 航空科学基金资助项目 (2007ZA51003)

作者简介: 胡举喜(1982-), 女, 山东威海人, 博士生, jxhu@ase.buaa.edu.cn.

力学建模、主动控制、鲁棒控制等方面对压电层合板结构的振动情况分析. 建立了多输入、多输出结构振动系统鲁棒 H_∞ 反馈控制模型, 并应用 Matlab 的 LMI工具箱对所建立的模型求解[13].

1 压电层合板的动力学模型

压电层合板结构 (见图 1), 具有力场和电场的耦合特性, 根据连续弹性介质和电介质理论, 基于线弹性、小变形、理想粘结假设, 其应满足本构关系式[14]:

$$\sigma_{ij} = -e^{\varepsilon}_{ik}\boldsymbol{E}_k + c^{E}_{ikl}\varepsilon_{kl} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{D}_i = \in^{\varepsilon}_{ij}\boldsymbol{E}_j + e^{E}_{kl}\varepsilon_{kl} \tag{2}$$

式中, σ, ε, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ 分别为应力、应变、电位移、电场强度; c^{E}_{ikl} 为基体和压电体弹性模量; $\in^{\varepsilon}_{ij}$ 为恒应变下的受压介电常数; e^{ε}_{ikl} 为恒应变情况下的压电电压常数; e^{E}_{kl} 为恒电场情况下的压电应力常数.

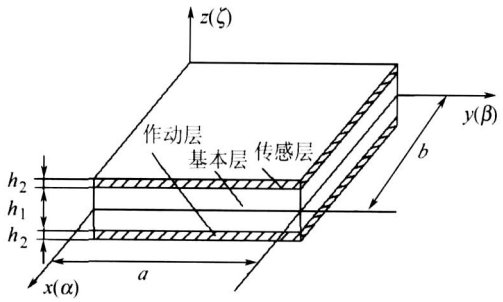


图 1 压电层合板单元

由 Hamilton原理得压电耦合系统的作用能量泛函为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}_p + \boldsymbol{W}_T + \boldsymbol{W}_q)\,dt = 0 \tag{3}$$

式中, 动能 $\boldsymbol{T} = \int_{V_m}\frac{1}{2}\rho_m\dot{\boldsymbol{u}}_i\dot{\boldsymbol{u}}_i dV + \int_{V_p}\frac{1}{2}\rho_p\dot{\boldsymbol{u}}_i\dot{\boldsymbol{u}}_i dV$; 应变能 $\boldsymbol{U} = \int_{V_m}\frac{1}{2}\varepsilon_i\sigma_i dV + \int_{V_p}\frac{1}{2}\varepsilon_i\sigma_i dV$; 外力功 $\boldsymbol{W}_T = \int_{V_m}\boldsymbol{u}\boldsymbol{f}dV + \int_{S_\sigma}\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_i\bar{\boldsymbol{T}}_i dS$; 电势能 $\boldsymbol{U}_p = -\int_{V_p}\frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{D}_i dV$; 外电荷的功 $\boldsymbol{W}_q = \int_{S_q}\varphi\bar{\boldsymbol{q}}dS$.

式中, $\boldsymbol{u}$, φ, $\boldsymbol{f}$ 分别为位移、电势和体力; V_m, V_p 分别为基体层与压电层的体积; S_σ, S_q 分别为给定面力 $\bar{\boldsymbol{T}}_i$, 面电荷 $\bar{\boldsymbol{q}}$ 的边界.

设单元上、下表面的压电传感器和作动器各含有一个电自由度, 即传感电势 φ_s 和作动电势 φ_a, 因为压电层厚度 h_2 比基板厚度 h_1 小二、三个数量级, 其长、宽尺寸都远远大于厚度, 则认为 φ_s 及 φ_a 沿其厚度方向线性变化. 由 $\boldsymbol{E}_i = -\mathrm{grad}\varphi = -\varphi_{,i}$ 可得:

$$\boldsymbol{E}^a = \boldsymbol{N}_{\varphi_a}\varphi_a \quad \boldsymbol{E}^s = \boldsymbol{N}_{\varphi_s}\varphi_s \tag{4}$$

式中, 电学形函数 $\boldsymbol{N}_{\varphi_a} = \left(0 \quad 0 \quad -\frac{1}{h_2}\right)^T$; $\boldsymbol{N}_{\varphi_s} = \left(0 \quad 0 \quad \frac{1}{h_2}\right)^T$. 由式 (1)至式 (4)可得压电单元的动态有限元方程为

$$(\boldsymbol{M}^e_m + \boldsymbol{M}^e_p)\ddot{\delta}^e + (\boldsymbol{K}^e_m + \boldsymbol{K}^e_p)\delta^e - \boldsymbol{K}^e_{ma}\varphi^e_a - \boldsymbol{K}^e_{ms}\varphi^e_s = \boldsymbol{F}^e_1 \tag{5}$$

$$\boldsymbol{K}^e_{am}\delta^e + \boldsymbol{K}^e_{aa}\varphi^e_a = \boldsymbol{F}^e_2 \tag{6}$$

$$\boldsymbol{K}^e_{sm}\delta^e + \boldsymbol{K}^e_{ss}\varphi^e_s = \boldsymbol{0} \tag{7}$$

式中, $\boldsymbol{M}^e_m$, $\boldsymbol{M}^e_p$ 与 $\boldsymbol{K}^e_m$, $\boldsymbol{K}^e_p$ 分别为基体层与压电层的单元质量和刚度矩阵; $\boldsymbol{K}^e_{ma}$, $\boldsymbol{K}^e_{ms}$, $\boldsymbol{K}^e_{am}$, $\boldsymbol{K}^e_{sm}$, $\boldsymbol{K}^e_{aa}$, $\boldsymbol{K}^e_{ss}$ 为压电层与基体层由压电效应产生的单元耦合刚度矩阵; $\boldsymbol{F}^e_1$ 为单元承受的面机械力和体机械力向量, $\boldsymbol{F}^e_2$ 为施加于作动器表面电荷所产生的电场力向量.

整个压电层合板机电耦合系统的动力学方程:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{K}_{ma}\varphi_a + \boldsymbol{K}_{ms}\varphi_s \tag{8}$$

$$\boldsymbol{K}_{am}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{K}_{aa}\varphi_a = \boldsymbol{F}_2 \tag{9}$$

$$\boldsymbol{K}_{sm}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{K}_{ss}\varphi_s = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

式中, $\boldsymbol{X}$ 为全局坐标系下整个系统的广义机械位移, $\boldsymbol{M} = \sum_e(\boldsymbol{M}^e_m + \boldsymbol{M}^e_p)$, $\boldsymbol{K} = \sum_e(\boldsymbol{K}^e_m + \boldsymbol{K}^e_p)$ 分别包含了基体与压电层的质量与刚度.

对实际的压电材料, φ_s 与 φ_a 相比相当小, 不足以由逆压电效应产生有效的机械响应, 且压电材料沿纤维方向阻尼小, 沿剪切方向阻尼大; 而在动力学问题中阻尼起着重要作用, 因此引入瑞利阻尼阵 $\boldsymbol{C}_R$ 表征压电层合板的固有阻尼, 由式 (8)得:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{C}_R\dot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_a \tag{11}$$

式中, $\boldsymbol{C}_R = a\boldsymbol{M} + b\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{F}_a = \boldsymbol{K}_{ma}\varphi_a$; $\boldsymbol{F}_a$ 作为控制量输入, a、b 为瑞利阻尼系数.

2 压电层合板的状态空间模型

若传感层表面无外加电势, 电位移为

$$\boldsymbol{D}_z(x, y, t) = e_{31}\varepsilon_x + e_{32}\varepsilon_y + e_{34}\gamma_{yz} + e_{35}\gamma_{xz} + e_{36}\gamma_{xy} = \boldsymbol{e}_z\varepsilon$$

式中, $\varepsilon = \{\varepsilon_\alpha \quad \varepsilon_\beta \quad \gamma_{\beta\zeta} \quad \gamma_{\alpha\zeta} \quad \gamma_{\alpha\beta}\}^T$; ζ, α, β 为中面坐标 (图 1); $\boldsymbol{e}_z = [e_{31} \quad e_{32} \quad 0 \quad e_{34} \quad e_{35} \quad e_{36}]$.

采用 Mindlin一阶剪切理论, 在压电层合板单元中有 $\varepsilon = \boldsymbol{B}\delta^e$, 压电传感层表面的总电荷为

$$\boldsymbol{Q}(t) = \sum_e\oint_A\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{B}\,dA = \sum_e(\boldsymbol{k}^e_s)^T\delta^e = \boldsymbol{k}^T_s\boldsymbol{X} \tag{12}$$

式中, $\delta^{\mathrm{T}} = (u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \phi_\alpha \quad \phi_\beta)^{\mathrm{T}}$, u_0, v_0 和 w_0 为中面位移; ϕ_α, ϕ_β 为法线在 α, β 方向的转角; $\boldsymbol{B}$ 为中面应变 ε_0 与位移 δ 的系数阵.

假设输出电压 $\boldsymbol{V}_s$ 与压电传感层、电路的电容无关, 选择 R_f 和 C_f, 使时间常数 $\tau = R_f C_f$ 很小, 且输出电压 $\boldsymbol{V}_s$ 正比于传感层的应变率 $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}/\mathrm{d}t$, 由式 (12) 可得:

$$\boldsymbol{V}_s = \boldsymbol{G}_c \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{G}_c \boldsymbol{k}_s^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{X}} \tag{13}$$

式中, $\boldsymbol{G}_c$ 为电流放大器增益阵.

由模态叠加原理可知, 高阶模态对系统响应的贡献很少, 取前 n 阶低阶模态即可. 动力响应 $\boldsymbol{X}$ 为

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \boldsymbol{q}_i = \Phi \boldsymbol{q} \tag{14}$$

则式 (11) 可简化为

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{q}} + \Omega \boldsymbol{q} = \Phi^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}_1 + \Phi^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{ma} \varphi_a \tag{15}$$

式中, Φ 为振形矩阵; $\boldsymbol{q}$ 为模态坐标向量; $\Phi^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \Phi = \Omega = \mathrm{diag}(\omega_i^2)$; ξ_i, ω_i 为第 i 阶模态阻尼比和固有频率; $\Phi^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_R \Phi = \boldsymbol{Z} = \mathrm{diag}(2\xi\omega_i)$.

在模态空间中定义状态变量 $\boldsymbol{x}$, 则由式 (15) 可得系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{16}$$

式中, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ -\Omega & -\boldsymbol{Z} \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \Phi^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_{ma} \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{u} = \varphi_a$; $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \Phi^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$; $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}_1$; 状态变量 $\boldsymbol{x}(t) \in \boldsymbol{R}^{2n}$; 控制向量 $\boldsymbol{u} = \varphi_a \in \boldsymbol{R}^k$; k 为压电作动元件的个数.

由式 (13), 模态空间下的传感观测式为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{17}$$

式中, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}_s$; $\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{G}_c \boldsymbol{k}_s^{\mathrm{T}} \Phi]$.

3　压电层合板振动的鲁棒控制

压电层合板是一个线性随机系统, 其随机扰动可视为零均值高斯白噪声过程[15-16], 强度为 $\boldsymbol{V}$, 即

$$\dot{\boldsymbol{x}}_m(t) = \boldsymbol{A}_m \boldsymbol{x}_m(t) + \boldsymbol{B}_m \boldsymbol{u}_m(t) + \boldsymbol{D}_m \boldsymbol{v}(t) \tag{18}$$

$$\boldsymbol{y}_m(t) = \boldsymbol{C}_m \boldsymbol{x}_m(t) \tag{19}$$

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}(t) = 0 \tag{20}$$

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t) = 0 \tag{21}$$

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t) = \boldsymbol{V}\delta(t-\tau) \tag{22}$$

式中, $\boldsymbol{x}(t) \in \boldsymbol{R}^m$; $\boldsymbol{v}(t) \in \boldsymbol{R}^m$; $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ 为适维定常矩阵. 假定 $(\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{D}_m)$ 可扰, 且 $\boldsymbol{D}_m \boldsymbol{D}_m^{\mathrm{T}} > 0$, $(\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{B}_m)$ 可控, $(\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{C}_m)$ 可观.

设压电层合板期望的振动响应为 $\boldsymbol{y}_d(t)$, 期望的状态为 $\boldsymbol{x}_d(t)$, 期望的作动力为 $\boldsymbol{u}_d(t)$, 则有

$$\dot{\boldsymbol{x}}_d(t) = \boldsymbol{A}_m \boldsymbol{x}_d(t) + \boldsymbol{B}_m \boldsymbol{u}_d(t) + \boldsymbol{D}_m \boldsymbol{v}(t) \tag{23}$$

$$\boldsymbol{y}_d(t) = \boldsymbol{C}_m \boldsymbol{x}_d(t) \tag{24}$$

考虑因忽略非线性项作用而造成的建模误差引起的参数摄动; 系统对应的状态反馈控制器 $\boldsymbol{G}$ 满足 $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(t)$, 则由小增益定理[5, 7, 8]有:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A}_c + \Delta\boldsymbol{A}_m)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}_m \boldsymbol{v}(t) \tag{25}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = (\boldsymbol{C}_m + \Delta\boldsymbol{C}_m)\boldsymbol{x}(t) \tag{26}$$

式中, $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_m(t) - \boldsymbol{x}_d(t)$; $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_m(t) - \boldsymbol{u}_d(t)$; $\boldsymbol{A}_c = \boldsymbol{A}_m + \boldsymbol{B}_m \boldsymbol{G}$.

定义压电层合板的稳态状态误差的协方差矩阵 $\boldsymbol{X} = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}})$, 如果闭环系统矩阵 $\boldsymbol{A}_c$ 稳定, 则存在 $\boldsymbol{X}$ 且满足 Lyapunov 方程:

$$(\boldsymbol{A}_c + \Delta\boldsymbol{A}_m)\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{X}(t)(\boldsymbol{A}_c + \Delta\boldsymbol{A}_m)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{D}_m \boldsymbol{V} \boldsymbol{D}_m^{\mathrm{T}} = 0 \tag{27}$$

定义压电层合板稳态输出误差协方差矩阵:

$$\boldsymbol{Y} = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{E}\{[\boldsymbol{y}(t) - \bar{\boldsymbol{y}}(t)][\boldsymbol{y}(t) - \bar{\boldsymbol{y}}(t)]^{\mathrm{T}}\} = \boldsymbol{C}_m \boldsymbol{X} \boldsymbol{C}_m^{\mathrm{T}} \tag{28}$$

压电层合板从噪声输入到输出的闭环传递函数:

$$\boldsymbol{H}(s) = (\boldsymbol{C}_m + \Delta\boldsymbol{C}_m)[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A}_m + \Delta\boldsymbol{A}_m)]^{-1} \boldsymbol{D}_m \tag{29}$$

假定参数摄动具有结构 $\begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{A}_m \\ \Delta\boldsymbol{C}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_1 \\ \boldsymbol{M}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{F}(\sigma)\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{M}_1 \in \boldsymbol{R}^{n\times i}$, $\boldsymbol{M}_2 \in \boldsymbol{R}^{p\times i}$, $\boldsymbol{N} \in \boldsymbol{R}^{j\times n}$ 为已知常数阵, $\boldsymbol{F}(\sigma) \in \boldsymbol{R}^{j\times j}$ 为所有元素均 Lebesgue 可测的未知矩阵函数, 且有 $\boldsymbol{F}(\sigma) \in \boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{F}(\sigma) \mid \boldsymbol{F}(\sigma)\boldsymbol{F}(\sigma)^{\mathrm{T}} \leqslant \boldsymbol{I}\}$, $\| \Delta\boldsymbol{A}_m \| < \zeta$, $\| \cdot \|$ 为谱范数, ζ 为正常数.

主动控制系统式 (25)、式 (26) 具有指定区域极点配置、稳态输出误差协方差及 H_∞ 范数约束的压电层合板, 其振动的鲁棒控制器为: 给定期望的极点分布域 $\boldsymbol{D}(q, r)$, 稳态输出误差方差约束 σ_i^2 ($i = 1, 2, \cdots, n_x$) 及 H_∞ 范数指标, 确定控制规律 $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(t)$, 使得同时满足:

1) 各输出量稳态方差 $Y_{ii} \leqslant \sigma_i^2$ ($i = 1, 2, \cdots, n_x$), Y_{ii} 为 $\boldsymbol{Y}$ 的第 i 个对角元素, σ_i^2 ($i = 1, 2, \cdots, n_x$) 为压电层合板系统输出方差的最大允许值;

2) 对于参数摄动 $\Delta\boldsymbol{A}_m$, 闭环系统式 (25)、式 (26) 渐进稳定且极点满足: $\sigma(\boldsymbol{A}_m + \Delta\boldsymbol{A}_m + \boldsymbol{B}_m\boldsymbol{G}) \subset \boldsymbol{D}(q, r)$, $\boldsymbol{D}(q, r)$ 为圆心在 $-q + \mathrm{j}0$ ($q > 0$)、半径为 r ($r < q$) 的位于左半复平面上的圆形区域;

3) $\| \boldsymbol{H}(s) \|_\infty = \| (\boldsymbol{C}_m + \Delta\boldsymbol{C}_m)[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A}_m + \Delta\boldsymbol{A}_m)]^{-1} \boldsymbol{D}_m \|_\infty \leqslant \gamma$ 为 $\boldsymbol{H}(s)$ 的 ∞ 范数:

$\| \boldsymbol{H}(s) \|_\infty = \sup \alpha_{max}[\boldsymbol{H}(\mathrm{j}\omega)] \leqslant \gamma$, $\alpha_{max}[\cdot]$ 表示

$[\cdot]$的最大奇异值, γ为小于 1的给定正数.

对于含有参数不确定及观测不确定的线性随机系统式(25)、式(26), 若存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足:

$$q(\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_c^{\mathrm{T}})+\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_c^{\mathrm{T}}+(q^2-r^2)\boldsymbol{P}+q\{r^{-2}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}_m+\Delta\boldsymbol{C}_m)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}_m+\Delta\boldsymbol{C}_m)\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})\}=0 \tag{30}$$

$$P_{ii}\leqslant\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n_x),\ \Phi>0 \tag{31}$$

式中, $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}^2+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}+q^{-1}\boldsymbol{I})\xi^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}$, 则性能指标 a, b, c同时被满足.

对系统式(25)、式(26), 给定性能指标 a, b, c, 则存在控制器 $\boldsymbol{G}$的集合, 使得式(30)有正定解矩阵 $\boldsymbol{P}$:

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_m\boldsymbol{B}_m^{+})[q\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_m^{\mathrm{T}}+q\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{P}+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_m^{\mathrm{T}}+\Omega](\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_m\boldsymbol{B}_m^{+})^{\mathrm{T}}=0 \tag{32}$$

$$\boldsymbol{P}<\boldsymbol{I} \tag{33}$$

$$q^2\boldsymbol{P}\boldsymbol{R}^{-1}-\Omega\geqslant 0 \tag{34}$$

式中, $\Omega=(q^2-r^2)\boldsymbol{P}+r^{-2}[\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}_m+\Delta\boldsymbol{C}_m)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}_m+\Delta\boldsymbol{C}_m)\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S}]$, 则期望的控制器 $\boldsymbol{G}$ 的集合可为

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{B}_m^{+}\left[\theta\boldsymbol{V}_M\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{U}\end{pmatrix}\boldsymbol{V}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{\frac{1}{2}}-q\boldsymbol{P}\boldsymbol{R}^{-1}-\boldsymbol{A}_m\right]+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_m^{+}\boldsymbol{B}_m)\boldsymbol{L}$$

式中, θ, $\boldsymbol{V}_M$, $\boldsymbol{V}_N$ 取自 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ 的奇异值分解.

因此, 若给定压电层合板稳态输出协方差约束 σ_i^2 $(i=1,2,\cdots,n_x)$, 期望的极点分布区域 $\boldsymbol{D}(q,r)$及扰动传递矩阵的 $\|\boldsymbol{H}(s)\|_\infty$范数, 则压电层合板振动的鲁棒控制的控制器可由 $\boldsymbol{G}$ 及式(30), 式(31)得到.

4 数值算例

为与常见的负速度反馈的振动控制器进行比较, 采用经典的压电层合板进行振动的鲁棒控制. 铺层为$[\pm 90/0_2]_s$的复合层板附有压电 S/A 对, 如图 2所示[17].

悬臂板上表面粘贴压电传感层, 下表面粘贴压电作动层.

环氧树脂性质: $E_1=9.8\times10^{10}$ N/m^2; $E_2=7.9\times10^9$ N/m^2; $G_{12}=5.6\times10^9$ N/m^2; $t=1.25\times10^{-4}$ m; $v_{12}=0.28$; $\rho=1\,520$ kg/m^3; $\varphi_1=0.004$; $\varphi_2=0.042$; $\varphi_{12}=0.070$; $E_1=9.8\times10^{10}$ N/m^2.

压电材料性质: $S_{11}=1.64\times10^{-11}$ m^2/N; $S_{12}=-5.7\times10^{-12}$ m^2/N; $S_{33}=1.88\times10^{-11}$ m^2/N; $S_{55}=4.75\times10^{-11}$ m^2/N; $d_{31}=-1.71\times10^{-10}$ C/N; $d_{33}=3.74\times10^{-10}$ C/N; $d_{15}=5.84\times10^{-10}$ C/N; $\epsilon_{11}/\epsilon_0^a=1.730$; $\epsilon_{33}/\epsilon_0=1.730$; $\rho=7\,700$ kg/m^3.

板的自由端受可视为零均值高斯白噪声过程的横向随机扰动力作用, 强度为 $V=1.00$N/m, 采用 H_∞优化控制提高系统鲁棒性和稳定性. 在 Simulink中对控制过程进行仿真, 得到控制前、后压电层合板中心点横向位移的开/闭环响应, 如图 3~图 5所示.

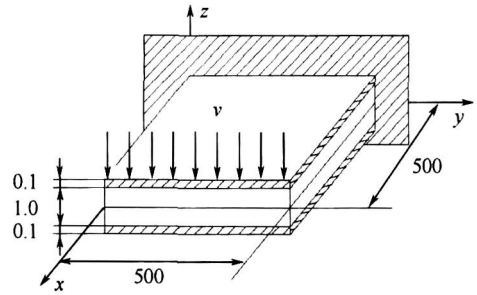


图 2 压电层合板悬臂梁结构

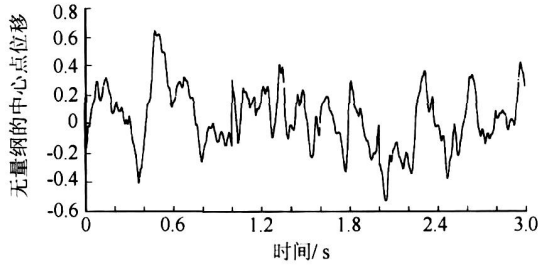


图 3 未加控制时压电层合板中心点的振动

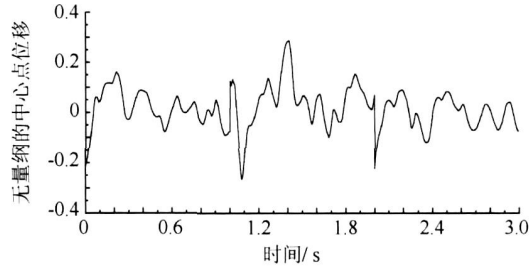


图 4 负速度反馈控制时压电层合板中心点的振动

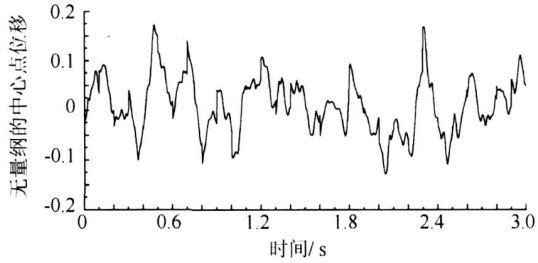


图 5 鲁棒控制时压电层合板中心点的振动

从图中可见, 由于采用了融合多性能指标的鲁棒控制理论设计控制器, 使压电层合板振动响应的输出协方差明显地小于传统的负速度反馈[18]控制器, 振动的幅度得到有效的控制.

5 结 论

本文考虑压电层合板的稳态和暂态性能, 在

模型降阶的基础上,应用鲁棒控制理论设计控制器,使压电层合板的振动响应满足了给定的期望性能指标.给出了连续系统的压电层合板在约束条件下的模型控制方法,使压电层合板的振动幅度快速、准确地得到控制.当压电层合板具有不确定的系统参数时,稳态输出协方差及扰动传输矩阵的 $\|H_\infty\|$ 范数均小于各自允许值,使压电层合板对参数摄动具有鲁棒性,并对扰动输入具有良好的抑制作用.

参考文献 (References)

[1] 秦荣. 智能结构力学[M]. 北京: 科学出版社, 2005
Qin Rong. Intelligent structure mechanics[M]. Beijing: Science Publishing Company Press, 2005 (in Chinese)

[2] Tzou H S, Tseng C I. Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, V138(1): 17-34

[3] Shah D K, Chan W S, Joshi S P. Finite element analysis of plates with piezoelectric layers[C]//Structural Dynamics and Materials Conference. 1993: 3189-3197

[4] Koconis D B, Kollar L P, Springer G S. Shape control of composite plates and shells with embedded actuators I: voltages specified[J]. Journal of Composite Materials, 1994, V28(5): 415-458

[5] Fitzpatrick B G. Shape matching with smart material structures using piezoceramic actuators[J]. Journal of Intelligent Materials System. Structure, 1997, V8(10): 876-882

[6] Chee C, Tong L Y, Steven G P. Static shape control of composite plates using a sloper-displacement based algorithm[J]. Structural Dynamics and Materials Conference, 2000, V2: 67-77

[7] 周星德, 韩晓林, 吴慧新, 等. 基于形状的复合材料层合板振动主动控制研究[J]. 振动、测试与诊断, 2003, V23(2): 134-137
Zhou Xingde, Han Xiaolin, Wu Huixin, et al. Studies on active vibration control of a composite laminated plate based on shape[J]. Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis, 2003, V23(2): 134-137 (in Chinese)

[8] 姚林泉, 丁睿. 非线性压电效应下压电弯曲执行器的动力分析[J]. 力学学报, 2005, V37(2): 183-189
Yao Linquan, Ding Rui. The dynamic analysis of piezoelectric bending actuator considering nonlinear piezoelectric effect[J]. Acta Mechanica Sinica, 2005, V37(2): 183-189 (in Chinese)

[9] 田晓耕, 张婕, 沈亚鹏. 不同理论下广义压电热弹性问题的有限元求解[J]. 力学学报. 2006, V38(4): 553-558
Tian Xiaogeng, Zhang Jie, Shen Yapeng. Solving generalized piezothermoelastic problem by fem with different theories[J]. Acta Mechanica Sinica, 2006, V38(4): 553-558 (in Chinese)

[10] Doyle J C, Glover K. State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problems[J]. IEEE Trans Autom at Contr, 1989, Ac-34: 831-847

[11] Nonami K, Nishimura H. H_∞ control based frequency shaped sliding mode control for flexible structures[J]. JSME International Journal, Series C, 1996, 39: 493-501

[12] 李普, 孙庆鸿, 陈南, 等. 振动系统复合摄动的鲁棒H_∞控制研究[J]. 振动工程学报, 2001, 14(1): 118-121
Li Pu, Sun Qinghong, Chen Nan, et al. The reach of H_∞ robust control method about the vibration system with complex uncertainty[J]. Journal of Vibration Engineering, 2001, 14(1): 118-121 (in Chinese)

[13] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002
Yu Li. Roubust control: about the method of how to dispose the linearity matrix inequation[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002 (in Chinese)

[14] 陈永富. 压电智能结构振动控制研究[D]. 西安: 西安建筑科技大学工程力学系, 2004
Chen Yongfu. The vibration control research of intelligent piezoelectric structure[D]. Xi'an: Engineering Mechanics of Xi'an University of Architecture and Technology, 2004 (in Chinese)

[15] 申铁龙. H_∞控制理论与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996
Shen Tielong. The theory and application of H_∞ control[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996 (in Chinese)

[16] 王德进. H_2和H_∞优化控制理论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001
Wang Dejin. The optimization control theory H_2 and H_∞[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology University Press, 2001 (in Chinese)

[17] Zhou S W, Rogers C A. Power flow and consumption in piezoelectrically actuated structures[J]. AIAA Journal, 1995, 33(7): 1305-1311

[18] Doyle J C, Francis B A, Tannenbaum A R. Feedback control theory[M]. New York: Macmillan, 1992

(责任编辑: 张　嵘)