角速率输入下圆锥补偿算法的一般形式

杨 胜 房建成

(北京航空航天大学 仪器科学与光电工程学院, 北京 100191)

摘 要: 传统圆锥补偿算法直接应用于由速率陀螺组成的捷联惯导系统时,算法误差明显增大. 为抑制算法误差,提出了一种以角速率为输入信号,任意子样数圆锥补偿算法(包括改进算法)的一般形式,并在典型圆锥运动条件下以算法漂移误差最小为优化准则,推导了相应的圆锥补偿系数方程和算法误差表达式. 利用给出的公式,求解一个线性方程组即可得到圆锥补偿系数,可方便快捷的设计任意子样数的角速率圆锥补偿算法以及改进算法. 仿真结果表明,所设计的改进算法比同子样数常规角速率圆锥补偿算法在精度上有明显提高.

关 键 词: 捷联惯性导航系统; 圆锥误差; 误差补偿; 旋转矢量

中图分类号: V 249.32^{+}2

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2008)08-0920-05

General formulas of coning compensation algorithm with angular rate input

Yang Sheng Fang Jiancheng

(School of Instrument Science and Opto-electronics Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: When the traditional coning compensation algorithm applied in the strapdown inertial navigation system (SINS), which comprises of angular rate gyroscopes, the algorithm error increased dramatically. The general formulas of coning compensation algorithm, taking arbitrary samples of angular rate signal as input, were presented. Together with an improved algorithm, which utilizes angular rate signal and gyro increments from previous and current attitude update periods simultaneously. Then the algorithms were optimized by minimizing algorithm drift error under classical coning motion, and the coning compensation coefficient equations and algorithm error expressions were deduced respectively. The coning compensation algorithms, with arbitrary samples of angular rate signal as input, can be easily obtained from the deduced formulas. And the corresponding coefficients can be computed from the linear equations. Simulation result shows that the improved angular rate coning compensation algorithm was greatly improved in accuracy than regular algorithm with the same number of gyro angular rate samples.

Key words: strapdown inertial navigation system; coning error; error compensation; rotation vector

对于捷联惯导系统,有限转动的不可交换性是其姿态解算的一个主要误差源. 文献[1]提出的等效转动矢量概念以及旋转矢量微分方程,有效地解决了不可交换性误差的问题. 文献[2]的工作为旋转矢量捷联姿态算法的设计奠定了基础,文献[3]还提出了利用前一迭代周期内陀螺输出角增量的改进算法. 然而这些算法的表达式都是基于陀螺的角增量信息,当陀螺输出为角速率信号时(如干涉型光纤陀螺、MEMS陀螺等),直接应用传统圆锥补偿算法精度上存在局限[4]. 为此,文献[4-6]推导了同时利用角速率和角增量信息的角速率圆锥补偿算法. 但其推导思路仍是采用文献[2]提出的泰勒级数展开的方法,当子样数较多时,算法的推导相当繁琐,且容易出错.

本文首先在文献[7-8]的基础上提出了角

收稿日期: 2007-07-30

基金项目: 国家863计划资助项目(2006AA12A108, 2006AA06Z223)

作者简介: 杨 胜(1982-),男,山东聊城人,博士生, buaa_ys@tom.com.

速率输入下,任意子样数圆锥补偿算法 (包括改进算法)的一般形式,结合文献[9]提出的角增量圆锥补偿算法设计的新方法,通过在典型圆锥运动条件下对算法进行优化,得到相应的圆锥补偿系数方程和算法误差表达式. 这对于角速率圆锥补偿算法快捷有效的应用于工程实践具有理论意义和实用价值.

1　算法优化准则

当以旋转矢量描述载体姿态运动时,可用如下旋转矢量微分方程简化式表示[1]

$$\dot{\Phi} = \omega + \frac{1}{2}\Phi \times \omega$$

其中,Φ 为旋转矢量;ω 为载体角速度矢量.

通常,采用典型圆锥运动来研究算法的不可交换性误差,设有绕惯性坐标系 x 轴旋转的圆锥运动:

$$\Phi = [0 \quad \alpha\cos(\Omega t) \quad \alpha\sin(\Omega t)]^{\mathrm{T}}$$

其中,α 为圆锥运动的半锥角;Ω 为圆锥运动的角频率.

速率陀螺输出为

$$\omega(t) = \begin{bmatrix} -2\Omega\sin^2(\alpha/2) \\ -\Omega\sin\alpha\sin(\Omega t) \\ \Omega\sin\alpha\cos(\Omega t) \end{bmatrix} \tag{1}$$

则在一个姿态更新周期 h 内陀螺的角增量为

$$\Delta\theta = \int_t^{t+h}\omega(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \begin{bmatrix} -2(\Omega h)\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \\ -2\sin\alpha\sin\dfrac{\Omega h}{2}\sin\left[\Omega\left(t+\dfrac{h}{2}\right)\right] \\ 2\sin\alpha\sin\dfrac{\Omega h}{2}\cos\left[\Omega\left(t+\dfrac{h}{2}\right)\right] \end{bmatrix} \tag{2}$$

而系统的转动四元数为

$$Q(t) = [\cos\frac{\alpha}{2} \quad 0 \quad \sin\frac{\alpha}{2}\cos(\Omega t) \quad \sin\frac{\alpha}{2}\sin(\Omega t)]^{\mathrm{T}}$$

则在一个姿态更新周期 h 内,刚体的实际运动可用旋转矢量表示为

$$\Delta\Phi = \begin{bmatrix} \Delta\phi_x \\ \Delta\phi_y \\ \Delta\phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sin(\Omega h) \\ -2\sin\alpha\sin\dfrac{\Omega h}{2}\sin\left[\Omega\left(t+\dfrac{h}{2}\right)\right] \\ 2\sin\alpha\sin\dfrac{\Omega h}{2}\cos\left[\Omega\left(t+\dfrac{h}{2}\right)\right] \end{bmatrix} \tag{3}$$

误差判据定义为精确的更新旋转矢量 $\Delta\Phi$ 与估计的更新旋转矢量 $\Delta\hat{\Phi}$ 之间的差值. 而它们的各分量之间只有第 1项是非 0常值,其余两项都呈周期性[5]. 因此,定义算法误差如下:

$$\phi_\varepsilon = |\Delta\phi_x - \Delta\hat{\phi}_x| \tag{4}$$

而该算法误差会在被修正的四元数中产生漂移误差,定义为 $\dot{\phi}_\varepsilon = \phi_\varepsilon / h$

因此,圆锥补偿算法的优化准则就是让 ϕ_ε 的低幂次项为 0,以使 $\dot{\phi}_\varepsilon$ 最小.

2　角速率圆锥补偿算法

假设姿态更新周期为 h,角速率采样周期为 ΔT,姿态更新周期内角速率采样点个数为 N. 其具体关系如图 1所示.

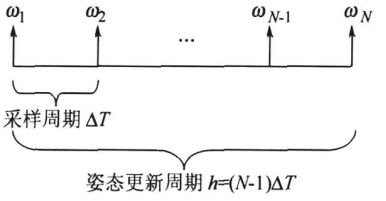


图 1　姿态更新与采样间隔之间的关系

由式 (1)可得采样点 i 处的角速度矢量:

$$\omega(i) = \begin{bmatrix} -2\Omega\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \\ -\Omega\sin\alpha\sin\left[\Omega\left(t+\dfrac{i-1}{N-1}h\right)\right] \\ \Omega\sin\alpha\cos\left[\Omega\left(t+\dfrac{i-1}{N-1}h\right)\right] \end{bmatrix}$$

$$i = 1 \sim N$$

则

$$\omega(i)\times\omega(j) = \begin{bmatrix} \Omega^2\sin^2\alpha\sin\left(\dfrac{j-i}{N-1}\Omega h\right) \\ -2\Omega^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sin^2\alpha\left\{\cos\left[\Omega\left(t+\dfrac{i-1}{N-1}h\right)\right]-\cos\left[\Omega\left(t+\dfrac{j-1}{N-1}h\right)\right]\right\} \\ -2\Omega^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sin^2\alpha\left\{\sin\left[\Omega\left(t+\dfrac{i-1}{N-1}h\right)\right]-\sin\left[\Omega\left(t+\dfrac{j-1}{N-1}h\right)\right]\right\} \end{bmatrix} \tag{5}$$

由式(5)可看出,角速度的叉乘在 y, z轴上的分量呈周期性变化, ϕ_ε 出现在 x轴上,且 x轴上的分量只与相对时间间隔有关. 因此,结合文献[4-6]可得角速率输入下圆锥补偿算法的一般形式:

$$\Delta\Phi^{\wedge} = \Delta\theta^{\wedge} + \sum_{i=1}^{N-1} K_i (\omega_1 \times \omega_{i+1}) h^2 \tag{6}$$

其中 $K = [K_1, K_2, \cdots, K_{N-1}]$为圆锥补偿系数.

将式(2)、式(5)代入式(6)中,并且仅考虑非周期项,可得

$$\Delta\phi_x^{\wedge} = -2(\Omega h)\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2(\Omega h)^2\sin^2\alpha\sum_{i=1}^{N-1} K_i \sin\frac{i}{N-1}\Omega h$$

而式(3)中对应非周期项为

$$\Delta\phi_x = -2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin(\Omega h)$$

将以上两式代入式(4)中,并且考虑 α为小量,可得角速率圆锥补偿算法的算法误差:

$$\phi_\varepsilon = \frac{\alpha^2}{2}\left[\Omega h - \sin(\Omega h) - 2(\Omega h)^2\sum_{i=1}^{N-1} K_i \sin\left(\frac{i}{N-1}\Omega h\right)\right] \tag{7}$$

为求得 K的表达式,令 $\lambda = \Omega h$,将式(7)前两项按泰勒级数展开:

$$\Omega h - \sin(\Omega h) = [\lambda^3 \quad \lambda^5 \quad \lambda^7 \quad \cdots]\cdot\begin{bmatrix} C_1 \\ \cdots \\ C_{N-1} \\ \cdots \end{bmatrix} \tag{8}$$

其中 $C_i = \dfrac{(-1)^{i+1}}{(2i+1)!}$ $\quad i = 1, 2, 3, \cdots$

同理将式(7)后一项按泰勒级数展开:

$$2(\Omega h)^2\sum_{i=1}^{N-1} K_i \sin\left(\frac{i}{N-1}\Omega h\right) = [\lambda^3 \quad \lambda^5 \quad \lambda^7 \quad \cdots]\cdot\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{iN-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} K_1 \\ \cdots \\ K_{N-1} \\ \cdots \end{bmatrix} \tag{9}$$

其中 $A_{ij} = 2(-1)^{i-1}\dfrac{\left(\dfrac{j}{N-1}\right)^{2i-1}}{(2i-1)!}$

$i = 1, 2, 3, \cdots;\ j = 1 \sim N-1$

按照算法优化准则,要使式(7)低幂次项为0,则由式(8)、式(9)应有下式成立:

$$\mathbf{A}_{\infty\times N-1}\cdot\mathbf{K}_{N-1\times 1} = \mathbf{C}_{\infty\times 1} \tag{10}$$

则由式(10),利用 A和 C的前 $N-1$行即可求解 K

此时,角速率圆锥补偿算法的算法误差可表示为

$$\phi_\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha^2\left(C_N - \sum_{j=1}^{N-1} A_{Nj}K\right)\lambda^{2(N-1)+3} \tag{11}$$

3 改进角速率圆锥补偿算法

文献[3]提出了利用当前及上一姿态更新周期角增量信息的改进角增量圆锥补偿算法,以下将其推广至角速率输入的改进圆锥补偿算法. 直接给出改进算法表达式的一般形式:

$$\Delta\Phi^{\wedge} = \Delta\theta^{\wedge} + \sum_{i=1}^{N-1} K_i (\omega_1 \times \omega_{i+1}) h^2 + G(\Delta\theta^{\wedge\prime}\times\Delta\theta^{\wedge}) \tag{12}$$

其中, G为新增补偿项系数; $\Delta\theta^{\wedge\prime}$为上一个姿态更新周期内陀螺的角增量输出,由式(2)可得

$$\Delta\theta^{\wedge\prime} = \int_{t-h}^{t}\omega(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \begin{bmatrix} -2(\Omega h)\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \\ -2\sin\alpha\sin\dfrac{\Omega h}{2}\sin\left[\Omega\left(t-\dfrac{h}{2}\right)\right] \\ 2\sin\alpha\sin\dfrac{\Omega h}{2}\cos\left[\Omega\left(t-\dfrac{h}{2}\right)\right] \end{bmatrix} \tag{13}$$

则由式(2)和式(13),角增量叉乘项中的非周期项可表示为

$$(\Delta\theta^{\wedge\prime}\times\Delta\theta^{\wedge})\mid_x = 4\sin^2\alpha\sin^2\frac{\Omega h}{2}\sin(\Omega h)$$

代入式(12),并且由式(4)可得改进算法的算法误差为

$$\phi_\varepsilon' = \frac{\alpha^2}{2}\{\Omega h - \sin(\Omega h) - 2(\Omega h)^2\cdot\sum_{i=1}^{N-1} K_i \sin\left(\frac{i}{N-1}\Omega h\right) - G[4\sin(\Omega h) - 2\sin(2\Omega h)]\} \tag{14}$$

同理,为求得 K及 G的表达式,将式(14)后两项按泰勒级数展开:

$$2(\Omega h)^2\sum_{i=1}^{N-1} K_i \sin\left(\frac{i}{N-1}\Omega h\right) + G[4\sin(\Omega h) - 2\sin(2\Omega h)] = [\lambda^3 \quad \lambda^5 \quad \lambda^7 \quad \cdots]\cdot\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N-1} & A_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{N-11} & \cdots & A_{N-1N-1} & A_{N-1N} \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN-1} & A_{NN} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} K_1 \\ K_{N-1} \\ G \\ \cdots \end{bmatrix} \tag{15}$$

其中,A_{ij}如式(9)中定义,而 A_{iN}可按下式求得

$$A_{iN} = 4\frac{(-1)^i}{(2i+1)!} - 2\frac{(-1)^i 2^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

按照算法优化准则,要使式(14)低幂次项为0,由式(8)、式(15),应有下式成立:

$$A_{\infty\times N} \cdot K_{N\times 1} = C_{\infty\times 1} \tag{16}$$

则由式(16),利用 A 和 C 的前 N 行即可求解 K 和 G.

此时,改进角速率圆锥补偿算法的算法误差可表示为

$$\phi_\varepsilon' = \frac{1}{2}\alpha^2 \left(C_{N+1} - \sum_{j=1}^{N} A_{N+1,j} K_j \right) \lambda^{2N+3} \tag{17}$$

4　应用示例及仿真分析

4.1　角速率圆锥补偿算法

1) 当 $N=4$时,由式(8)和式(9),

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ -\frac{1}{81} & -\frac{1}{81} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{14\,580} & \frac{32}{14\,580} & \frac{1}{60} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{120} \\ \frac{1}{5\,040} \end{bmatrix}$$

代入式(10),解得

$$K_1 = \frac{291}{2\,240} \qquad K_2 = \frac{3}{56} \qquad K_3 = \frac{29}{6\,720}$$

代入式(6),可得角速率输入下三子样圆锥补偿算法:

$$\Delta\Phi^{\wedge} = \Delta\theta^{\wedge} + \frac{291}{2\,240}h^2(\omega_1 \times \omega_2) + \frac{3}{56}h^2(\omega_1 \times \omega_3) + \frac{29}{6\,720}h^2(\omega_1 \times \omega_4) \tag{18}$$

由式(11),此时圆锥补偿算法的算法误差为

$$\phi_\varepsilon = \frac{1}{8\,907\,055}\alpha^2(\Omega h)^9 \tag{19}$$

2) 当 $N=3$时,同理可得角速率输入下二子样圆锥补偿算法:

$$\Delta\Phi^{\wedge} = \Delta\theta^{\wedge} + \frac{7}{45}h^2(\omega_1 \times \omega_2) + \frac{1}{180}h^2(\omega_1 \times \omega_3) \tag{20}$$

此时,圆锥补偿算法的算法误差为

$$\phi_\varepsilon = \frac{1}{80\,640}\alpha^2(\Omega h)^7 \tag{21}$$

上述结果与文献[4-6]给出的结果一致,从而验证了本文算法设计的正确性.

4.2　改进角速率圆锥补偿算法

当 $N=3$时,由式(8)和式(15),

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ -\frac{1}{81} & -\frac{8}{81} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{14\,580} & \frac{32}{14\,580} & \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{120} \\ \frac{1}{5\,040} \end{bmatrix}$$

代入式(16),解得

$$K_1 = \frac{544}{3\,465} \qquad K_2 = \frac{13}{3\,465} \qquad G = \frac{1}{924}$$

代入式(12),可得改进角速率二子样圆锥补偿算法:

$$\Delta\Phi^{\wedge} = \Delta\theta^{\wedge} + \frac{544}{3\,465}h^2(\omega_1 \times \omega_2) + \frac{13}{3\,465}h^2(\omega_1 \times \omega_3) + \frac{1}{924}(\Delta\theta^{\wedge\prime} \times \Delta\theta^{\wedge}) \tag{22}$$

由式(17),此时改进的圆锥补偿算法的算法误差为

$$\phi_\varepsilon' = \frac{1}{442\,116}\alpha^2(\Omega h)^9 \tag{23}$$

4.3　仿真分析

以 $N=3$时的二子样算法为例,在典型圆锥运动条件下对以上设计的常规角速率圆锥补偿算法和改进角速率圆锥补偿算法进行仿真比较.

取 $\alpha = 1°$, $h = 0.01$ s考察在 x轴上算法漂移误差与圆锥运动频率 f_c ($f_c = \Omega/2\pi$)的关系,仿真结果如图 2所示.

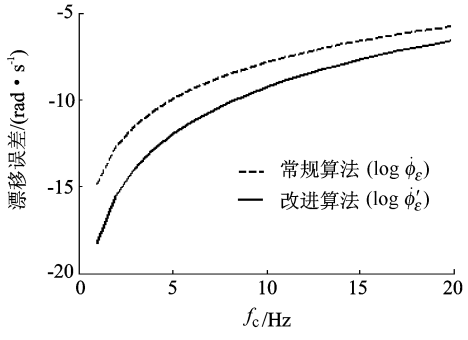


图 2　漂移误差与 f_c之间的关系

取 $\alpha = 1°$, $\Omega = 10\pi$ rad/s 考察在 x轴上算法漂移误差与姿态更新频率 f_a ($f_a = 1/h$)的关系,仿

真结果如图 3所示.

由图 2可以看出,两类算法的漂移误差都随Ω的增大而增大,但在相同的角频率下,改进算法的漂移误差比同子样的常规算法明显降低. 由图 3可以看出,改进的算法与常规算法类似,精度都随 f_a 的增大而降低,但改进算法的漂移误差衰减得更快,并且在相同的 f_a 下,改进算法的精度显然高于常规算法.

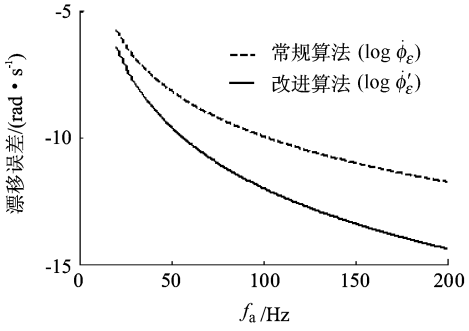


图 3 算法漂移误差与 f_a 之间的关系

因此,同子样数的改进算法精度高于常规算法;同时比较式 (19)和式 (23)可以看出,改进算法与多一次陀螺角速率采样的常规算法精度几乎相当. 而在计算量方面,改进算法较常规算法增加了一次叉乘运算,即 6次乘法和 3次加法;在存储量方面,改进算法需要存储上一姿态更新周期的角增量. 就目前导航计算机的性能而言,改进算法可以应用于实时导航解算.

5 结 论

本文针对由速率陀螺组成的捷联惯导系统,提出了一种以角速率为输入信号,任意子样数圆锥补偿算法 (包括改进算法)的一般形式,给出了相应的圆锥补偿系数方程和算法误差表达式. 在实际应用时可通过编程求解圆锥补偿系数,由计算机完成算法的推导,避免了繁琐的手工推导. 应用示例表明,该方法可以快捷有效地得到任意子样数角速率圆锥补偿算法;本文还对角速率圆锥补偿算法以及改进算法的漂移误差进行了仿真分析. 仿真结果表明,所设计的改进算法比同子样数的常规角速率圆锥补偿算法在精度上有明显提高.

参考文献 (References)

[1] Bortz J E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation[J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1971, 27(1): 61 - 66

[2] Miller R B. A new strapdown attitude algorithm[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1983, 6(4): 287 - 291

[3] Jiang Y F, Lin Y P. Improved strapdown coning algorithms[J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1992, 28(2): 484 - 490

[4] 魏小莹,林玉荣,邓正隆. 光纤陀螺捷联姿态算法的改进研究[J]. 中国惯性技术学报, 2005, 13(2): 70 - 74
Wei Xiaoying, Lin Yurong, Deng Zhenglong. Improved attitude algorithm of strapdown system based on FOG[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2005, 13(2): 70 - 74 (in Chinese)

[5] 黄昊,邓正隆. 旋转矢量航姿算法的一种新的表达式[J]. 宇航学报, 2001, 22(3): 92 - 98
Huang Hao, Deng Zhenglong. A new expression for rotation vector attitude algorithm[J]. Journal of Astronautics, 2001, 22(3): 92 - 98 (in Chinese)

[6] 魏晓虹,张春熹,朱奎宝. 一种高精度角速率圆锥补偿算法[J]. 北京航空航天大学学报, 2005, 31(12): 1312 - 1316
Wei Xiaohong, Zhang Chunxi, Zhu Kuibao. High accuracy coning compensate algorithm by angular velocity[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2005, 31(12): 1312 - 1316 (in Chinese)

[7] 王养柱,崔中兴. 捷联惯导系统圆锥补偿算法优化设计[J]. 中国惯性技术学报, 2000, 8(1): 7 - 10
Wang Yangzhu, Cui Zhongxing. Optimal design for coning algorithms of SINS[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2000, 8(1): 7 - 10 (in Chinese)

[8] 周江华,王峰,孙国基. 多子样旋转矢量捷联姿态算法的一般结果[J]. 航天控制, 2002, 20(2): 18 - 22
Zhou Jianghua, Wang Feng, Sun Guoji. General formulas of rotation vector based attitude algorithm of SDINS[J]. Aerospace Control, 2002, 20(2): 18 - 22 (in Chinese)

[9] Park C G. Formalized approach to obtaining optimal coefficients for coning algorithms[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1999, 22(1): 165 - 168

(责任编辑:赵海容)