基于四面体的三维流线构造

杨 光 成诗明

(北京航空航天大学 机械工程及自动化学院, 北京 100191)

摘 要: 流线是计算流体力学(CFD, Computational Fluid Dynamics)矢量可视化研究的重要技术. 基于四面体单元, 首先将点云数据场六面体单元分割成四面体单元, 存储四面体之间的邻接关系; 然后据此逐步将点定位到数据场中四面体单元内; 再根据流线上速度矢量方向的变化量和四面体单元网格的内切球半径, 自适应确定积分步长, 以解决积分步长太小影响流线追踪速度或步长太大影响流线精度问题; 最后利用龙格库塔数值积分法求得流线上点, 并根据点定位和调整积分步长构造出三维流线. 由于该算法避免了传统流线追踪算法中 Jacobian矩阵逆变换, 因而减小了矩阵转换过程带来的误差, 提高了流线追踪的精度和效率.

关 键 词: 流线; 流场; 四面体; 点定位; 计算流体力学

中图分类号: TP 391

文献标识码: A 文 章 编 号: 1001-5965(2008)09-1061-04

Tetrahedron-based constructing 3D_stream lines in visualization

Yang Guang Cheng Shiming

(School of Mechanical Engineering and Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract Stream line is an important technique in computational fluid dynamics for vector visualization. This algorithm is based on tetrahedron cells. Firstly, hexahedron cells in data field of point cloud were divided into tetrahedron cells. Tetrahedron relations between the adjacent tetrahedron were stored, and then the point of stream line in data filed was located into the tetrahedron cell gradually by looking up the tabulation of adjacent tetrahedron relations. Then according to the deflexion angle of the velocity vector on stream line and the radius of inscribed sphere in the tetrahedron cell, integration step was adaptively determined to improve the precision and efficiency of stream line-tracking. Finally, the points of stream line were obtained by Runge-Kutta numerical integration method, and three-dimension stream line was constructed with the point location and integration step. As a result of avoiding Jacobian matrix inverse transform that is used in the traditional stream line-tracking algorithm, this method reduces the error of matrix conversion and improves efficiency and precision of stream line construction.

Key words stream line; flow field; tetrahedrons; cell-traversal; computational fluid dynamics

流线是计算流体力学矢量可视化研究的重要技术内容之一. 矢量场可视化中以场线显示为代表的线表示方式能够很好地揭示流场的走向, 并可以其为基础实现粒子动画以及流带、流面等的显示[1].

1 流线定义

流线是流速场的矢量线, 是某瞬时对应的流场中的一条曲线, 该瞬时位于曲线上的流体质点之速度矢量都和该曲线相切.

设有一个三维定常流场 (图 1), 其空间坐标为 (x, y, z), 相应的速度分量为 (u_x, u_y, u_z). 流线上取微元矢量

$$\boldsymbol{d}_l = d_x \times \boldsymbol{i} + d_y \times \boldsymbol{j} + d_z \times \boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{d}_l$ 与速度矢量方向 $\boldsymbol{u}$ 一致:

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{d}_l = 0$$

收稿日期: 2007-09-03

作者简介: 杨 光(1963-), 女, 北京人, 副教授, csm_wyj@163.com.

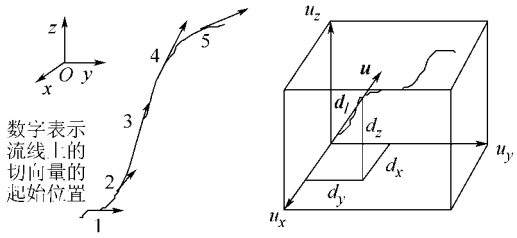


图 1 流线上的微元矢量

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix} = (u_y \times d_z - u_z \times d_y) \times \boldsymbol{i} + (u_z \times d_x - u_x \times d_z) \times \boldsymbol{j} + (u_x \times d_y - u_y \times d_x) \times \boldsymbol{k}$$

从而有

$$(u_y \times d_z - u_z \times d_y) \times \boldsymbol{i} + (u_z \times d_x - u_x \times d_z) \times \boldsymbol{j} + (u_x \times d_y - u_y \times d_x) \times \boldsymbol{k} = 0$$

$$u_y \times d_z - u_z \times d_y = 0$$

$$u_z \times d_x - u_x \times d_z = 0$$

$$u_x \times d_y - u_y \times d_x = 0$$

因此流线的方程组为

$$\frac{d_x}{u_x} = \frac{d_y}{u_y} = \frac{d_z}{u_z}$$

2 数学模型的选取

由于四面体网格单元具有良好的几何结构与拓扑结构的一致性, 有利于克服构造求等值面、等值线时可能遇到的二义性问题, 因此在本流线生成算法中选择了以四面体作为单元几何模型. 为此首先就要将原始六面体数据分割成四面体, 如图 2[1-2]所示.

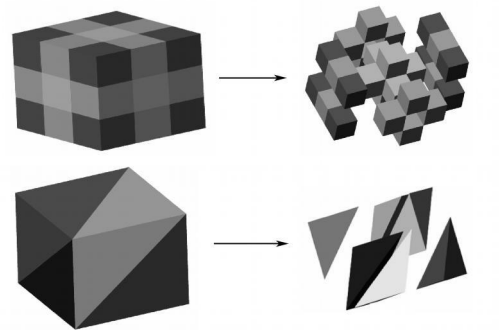
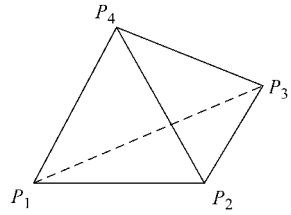
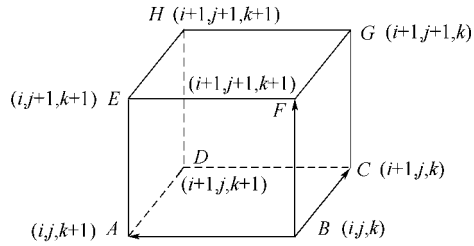


图 2 场数据分割成四面体

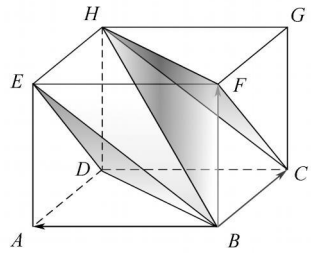
如图 3所示, 设六面体 *ABCDEFGH* 节点号为 *(i, j, k)*, 沿 *BC* 方向为 *i*递增的方向, 沿 *BF* 方向为 *j*递增的方向, 沿 *BA* 方向为 *k* 递增的方向. 根据拓扑关系查表可得相邻四面体, 四面体 *ABDE* 的索引为 0, 与面 *ABD* 相邻的四面体为节点号为 *(i, j - 1, k)*的六面体的 *FHEB* 单元 (索引为 2)[1-2]. 同一六面体中四面体相邻索引表见表 1.



a 四面体单元



b 六面体单元节点号 *(i, j, k)*



c 六面体分割

图 3 四面体单元的拓扑关系

表 **1** 同一六面体中四面体相邻索引表

索引	四面体	面 1	面 2	面 3	面 4
0	*ABDE*	*ABD*	*BDE*	*ABE*	*ADE*
1	*EHDB*	*EHD*	*HDB*	*EHB*	*EDB*
2	*FHEB*	*FHE*	*HEB*	*FHB*	*FEB*
3	*HDBC*	*HDB*	*DBC*	*HDC*	*HBC*
4	*FHBC*	*FHB*	*HBC*	*FHC*	*FBC*
5	*GHFC*	*GHF*	*HFC*	*GHC*	*GFC*

3 点定位到四面体中

判断空间中的点处于数据场中哪一四面体中就是点定位问题. 这是数值积分法中的一个关键问题[3].

已知起始点在四面体单元 *ABCD* (图 4)内部, 且已知起点的位置坐标及速度, 使用龙格库塔算法求得下一点终点的位置坐标. 连接起点和终点成线段, 则线段和四面体的 4个三角面最多有 1个交点 (排除交点为线段端点的情况). 若存在交点, 则交点所在的面即为流线流出的面; 若不存在交点则终点仍然在起点所在的四面体中.

1) 不存在交点的情况. 说明终点仍在起点所在的四面体中, 则定位成功.

2) 存在交点的情况. 确定交点所在的面 *ABD*, 根据邻接关系, 找到与当前四面体共此面的邻接四面体 *ABDE*, 并以邻接四面体为出发点继续搜索. 即新线段以交点 1为起点与邻接四面体相交于交点 2(不能为交点 1). 以此循环, 直到找到终点所在的四面体为止.

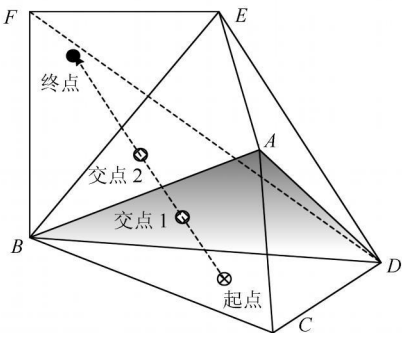


图 4　点定位

4　数值积分步长的选取

由于积分步长直接影响到计算的速度和流线追踪的精度, 为了得到合适的步长, 将速度矢量方向的变化量和四面体单元网格的内切球半径结合起来考虑确定积分步长[4].

1) 根据速度矢量方向的变化量控制积分步长.

若流线上前后两点的速度矢量之间的夹角过大, 表明此处流线的偏折较剧烈, 就需要对积分步长进行控制 (图 5). 速度矢量夹角的计算公式为

$$\theta = \arccos[(\Delta x_k \cdot \Delta x_{k-1} + \Delta y_k \cdot \Delta y_{k-1} + \Delta z_k \cdot \Delta z_{k-1}) / \sqrt{(\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2) \cdot (\Delta x_{k-1}^2 + \Delta y_{k-1}^2 + \Delta z_{k-1}^2)}]$$

其中, $(\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k)$为 P_k 点与 P_{k+1}点位置矢量的差; $(\Delta x_{k-1}, \Delta y_{k-1}, \Delta z_{k-1})$为 P_{k-1}点与 P_k 点位置矢量的差. 则积分步长为

$$\Delta h_{k+1} = \begin{cases} 2\Delta h_k & \theta < \theta_{min} \\ \frac{1}{2}\Delta h_k & \theta > \theta_{max} \end{cases}$$

式中 θ_{max}和 θ_{min}分别表示流线上相邻两点的切矢量偏转最大角和最小角. 角度 θ越小, 流线偏折越小, 步长相应变大; 角度 θ越大, 流线偏折越剧烈, 步长相应变小.

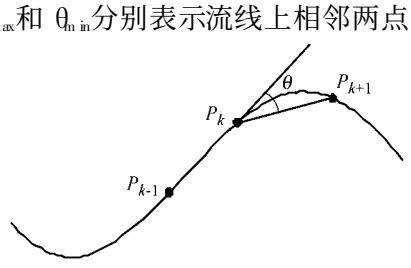


图 5　流线偏转角度

2) 根据单元网格的内切球半径 *R* 确定步长.

如果积分步长太小, 积分次数过多, 可能在同一个四面体内不停地积分, 使得效率大幅度降低, 在这种情况下取该四面体的内切球半径为积分步长, 从而跳出该四面体单元 (图 6).

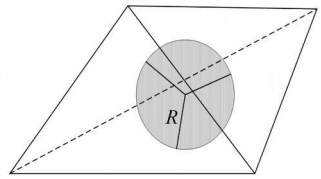


图 6　四面体内切球半径

根据四面体单元内切球半径 *R* 求得时间步长 t: $t_x = R/u_x$, $t_y = R/u_y$, $t_z = R/u_z$, 则 $t = \min(t_x, t_y, t_z)$. 其中, u_x, u_y, u_z 分别为点在 *x*, *y*, *z* 方向上的速度; t为积分步长.

5　流线生成步骤

1) 将每个六面体分割成 6个四面体, 并存储相邻四面体拓扑关系;

2) 获得数据场中任一四面体 (或者指定四面体索引号 (i, j, k)), 取该四面体中心为流线起点 P_0, 并使用体积加强法插值出 P_0的速度, 将 P_0加入到流线链表中;

3) 确定积分步长, P_0点的速度为初始条件, 采用龙格库塔算法求得下一点的坐标 P_1;

4) 将 P_1定位到数据场中四面体内;

5) 找到 P_1所在的四面体后, 体积加权法插值出 P_1点的速度, 将 P_1加入到流线链表中, 以 P_1为初始条件返回到步骤 3);

6) 当得到流线上的点超出流场边界, 点的速度为零, 积分步数超过了指定步数则程序结束.

流线生成流程图见图 7.

亚音速层流的正球体附近流场是流体力学中的一个经典例子. 为了验证流线生成算法, 现以马赫数为 0.6的正球体流场的实验照片 (图 8)与本文算法实现的显示结果 (图 9)作一对比.

由图 8可以看出: ①流动的分离 (即原来沿球体表面流动的流体离开球的表面)发生在接近半球处; ②在接近球后部的分离区内有上下对称的涡流发生. 图 9是对该流场的计算流体力学 (CFD, ComputationalFluidDynamics) 模拟计算

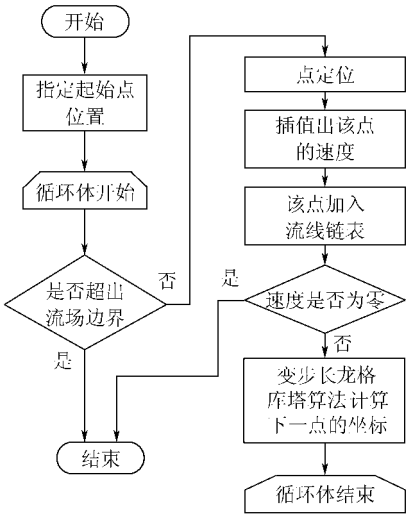


图 7 流线生成流程图

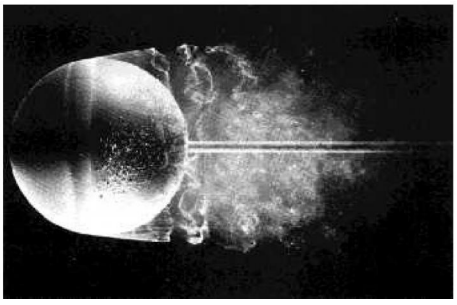


图 8 球体流场试验照片

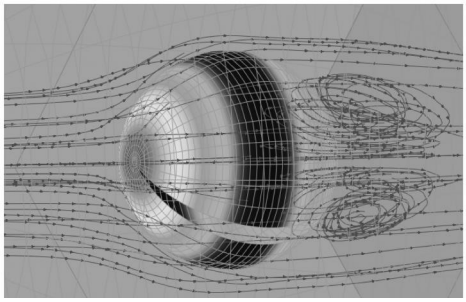


图 9 球体流场可视化效果

(50×25×30结构化网格)进行流线可视化的结果. 经过比较不难看出, 对于上述两点, 实验结果和数值模拟结果是吻合的.

6 结束语

本文通过将点云数据场六面体网格分割成四面体单元, 存储四面体之间的邻接关系. 并根据速度矢量方向的变化量和四面体单元网格的内切球半径确定积分步长. 由于该算法避免了传统流线追踪算法中 Jacobian 矩阵逆变换, 因而减小了矩阵转换过程带来的误差. 经过实际应用测试, 该算法效果良好, 可以满足工程实际的要求.

参考文献 (References)

[1] 李海生, 杨钦, 陈其明. 三维计算流体流体力学流场的流线构造[J]. 北京航空航天大学学报, 2003, 29(5): 434-437
LiHaisheng, YangQin, ChenQiming. Constructing streamlines in 3D CFD flow field[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2003, 29(5): 434-437(in Chinese)

[2] 李志刚. 广义域三维散乱数据场的通用可视化技术研究[D]. 北京: 北京航空航天大学机械工程及自动化学院, 1997
LiZhigang. Study on general visualization technique for 3D scattered data field in broad sense domain[D]. Beijing: School of Mechanical Engineering and Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1997(in Chinese)

[3] 胡星, 杨光. 基于六面体单元的流线可视化点定位研究[J]. 工程图学学报, 2002: 44-50
HuXing, YangGuang. Hexahedron based cell-traversal in streamline visualization[J]. Journal of Engineering Graphics, 2002: 44-50(in Chinese)

[4] Sadarjoen A, Boer A, Post F H. Particle tracing in transformed grids using tetrahedral decomposition[C]//Proceedings of the Eurographics Workshop in Blaubeuren, Germany: Springer, 1998: 71-80

(责任编辑: 文丽芳)