圆锥运动及其影响的3种描述方法

余 杨 张洪钺

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘 要: 从旋转矢量方法、欧拉角方法及刚体有限转动方法出发对圆锥运动及其影响进行了阐述,得到了各方法下的等效陀螺漂移公式以及三者之间的关系;并对圆锥补偿算法在每种方法下的补偿效果进行了研究. 结果表明: 刚体有限转动方法与旋转矢量方法是完全等价的,欧拉角方法仅在小角度振动情况下与它们等价;圆锥补偿算法在旋转矢量方法和欧拉角方法下均有效,并在振动角较小时补偿效果一致. 旋转矢量方法和刚体有限转动方法重点在于圆锥补偿算法的开发,而欧拉角方法重点则在于指导圆锥运动转台实验设计以验证圆锥补偿算法.

关 键 词: 圆锥运动; 等效陀螺漂移; 旋转矢量; 欧拉角; 有限转动

中图分类号: U 666.1

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2008)08-0956-05

Three descriptions of coning motion and its influence

Yu Yang Zhang Hongyue

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Basing on rotation vector method, Euler angles method and finite rotations method, the coning motion and its influence were discussed. Then the expressions of equivalent gyro drift in each method and their relationship were obtained. At last compensate precision of two-intervals coning compensate algorithm was researched in each method. The results show that finite rotations method and rotation vector method are equivalent absolutely. Euler angles method and rotation vector method are equivalent only when oscillation angles are small. Coning compensate algorithms are effectual both in rotation vector method and Euler angles method, and besides, compensate precisions are equivalent when oscillation angles are small. Rotation vector method and finite rotations method can be used to design coning compensation algorithms and Euler angles method can be used to design the test of the coning motion.

Key words: coning motion; equivalent gyro drift; rotation vector; Euler angles; finite rotations

圆锥运动是载体两正交轴方向存在频率相同而相位不同的角振动时,第3正交轴在空间所作的锥面或者近似锥面的运动.

当捷联惯性导航系统处于圆锥运动环境时,陀螺会感受到外界的运动而产生常值输出,一般将其称为等效陀螺漂移. 可从Bortz旋转矢量方法[1], Dieter欧拉角方法[2]以及Goodman-Robinson(G-R)刚体有限转动方法[3]这3个方面出发推导等效陀螺漂移的表达式. 很多文献都应用了这3种方法进行圆锥运动的仿真[4-8],但却没有文献对它们进行总结,并对它们之间的不同点,相互间的关系以及应用重点进行分析.

本文基于一般的圆锥运动,分别利用上述3种方法详细地推导了等效陀螺漂移表达式,对推导出的结果进行了对比研究和数字仿真,总结了3种方法的不同之处,指出了它们相互之间有益的关系,从而为更好地应用这3种方法提供了理论依据.

收稿日期: 2007-07-17

基金项目: 国家安全重大基础研究资助项目(61334)

作者简介: 余 杨(1982-),女,江西南昌人,博士生, yuyang@asee.buaa.edu.cn.

1　圆锥运动的 3种描述方法

1.1　旋转矢量方法

导航系 n(表示为 $OXYZ$)到机体系 b(表示为 $Oxyz$)的方向余弦阵 $\boldsymbol{C}_n^b$ 利用旋转矢量 $\boldsymbol{\Phi}=[\Phi_x\ \Phi_y\ \Phi_z]^{\mathrm{T}}$表示为

$$\boldsymbol{C}_n^b=\frac{\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}}{\Phi^2}(1-\cos\Phi)+\boldsymbol{I}\cos\Phi+\frac{\sin\Phi}{\Phi}[\boldsymbol{\Phi}\times] \tag{1}$$

其中,Φ 为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的模值;$\boldsymbol{I}$为 3×3的单位阵;$[\boldsymbol{\Phi}\times]$为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的反对称阵,即

$$[\boldsymbol{\Phi}\times]=\begin{bmatrix}0&-\Phi_z&\Phi_y\\ \Phi_z&0&-\Phi_x\\ -\Phi_y&\Phi_x&0\end{bmatrix}$$

已知惯导系统中 $\boldsymbol{C}_n^b$ 的微分方程一般表示为

$$\dot{\boldsymbol{C}}_n^b=\boldsymbol{C}_n^b[\boldsymbol{\omega}\times] \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{\omega}=[\omega_x\ \omega_y\ \omega_z]^{\mathrm{T}}$为测量角速度;$[\boldsymbol{\omega}\times]$为 $\boldsymbol{\omega}$ 的反对称阵.

利用式(1)和式(2),得 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{\Phi}$ 及其变化率 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}$ 间的关系[1]:

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\Phi}}-\frac{1-\cos\Phi}{\Phi^2}\boldsymbol{\Phi}\times\dot{\boldsymbol{\Phi}}+\frac{\Phi-\sin\Phi}{\Phi^3}\boldsymbol{\Phi}\times(\boldsymbol{\Phi}\times\dot{\boldsymbol{\Phi}}) \tag{3}$$

一般圆锥运动可用 $\boldsymbol{\Phi}$ 表示为

$$\boldsymbol{\Phi}=[0\ \ \alpha\sin\Omega t\ \ \beta\sin(\Omega t+c)]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

其中,α,β分别为 y, z两轴的振幅;Ω为振动角速度;c为两轴振动的相位差.

将式(4)代入式(3),得

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\alpha\beta\Omega\dfrac{1-\cos\Phi}{\Phi^2}\sin c\\ \alpha\Omega\cos\Omega t-\dfrac{\Phi-\sin\Phi}{\Phi^3}\alpha\beta^2\sin(\Omega t+c)\sin c\\ \beta\Omega\cos(\Omega t+c)+\dfrac{\Phi-\sin\Phi}{\Phi^3}\alpha^2\beta\sin\Omega t\sin c\end{bmatrix} \tag{5}$$

由式(4)和式(5)可知,虽然 $\boldsymbol{\Phi}$ 在 x轴没有分量,但当 y, z轴有同频不同相位的角振动输入时,b系 x轴陀螺会产生常值输出.

1.2　欧拉角方法

设 b系为右前上系,n系可按图 1所示步骤转到 b系:绕 $OXYZ$系的 Z轴转 ψ到 $X_1Y_1Z_1$系,绕 X_1转 ϕ到 $OX_2Y_2Z_2$系,绕 Y_2转 γ到 $Oxyz$系.

通过 $\boldsymbol{C}_n^b$ 转化可得 $\boldsymbol{\omega}$ 与 ψ,ϕ,γ及其变化率

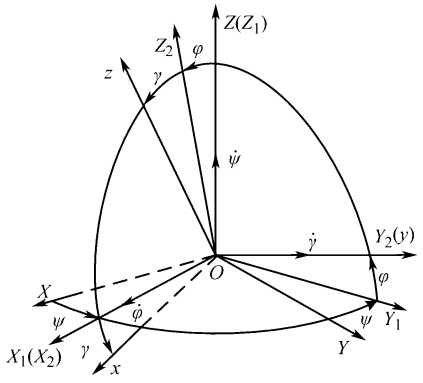


图 1　旋转示意图

$\dot{\psi},\dot{\phi},\dot{\gamma}$之间的关系:

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\dot{\phi}\cos\gamma-\dot{\psi}\sin\gamma\cos\phi\\ \dot{\gamma}+\dot{\psi}\sin\phi\\ \dot{\phi}\sin\gamma+\dot{\psi}\cos\gamma\cos\phi\end{bmatrix} \tag{6}$$

一般圆锥运动可利用欧拉角表示为

$$[\phi\ \ \gamma\ \ \psi]^{\mathrm{T}}=[0\ \ \alpha\sin\Omega t\ \ \beta\sin(\Omega t+c)]^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

将式(7)代入式(6),得

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}-\Omega\beta\cos(\Omega t+c)\sin(\alpha\sin\Omega t)\\ \Omega\alpha\cos\Omega t\\ \Omega\beta\cos(\Omega t+c)\cos(\alpha\sin\Omega t)\end{bmatrix} \tag{8}$$

1.3　刚体有限转动方法

G-R定理:具有确定 3个正交轴的刚体作任意运动,其 $\boldsymbol{\Phi}$ 在 i轴的分量 Φ_i与 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量 ω_i之间有如下关系[3]:

$$\Phi_i=\int_{t_0}^{t_f}\omega_i\,\mathrm{d}t+A_i \tag{9}$$

其中,A_i为刚体 i轴在单位球上由点 $A(t_0)$、$A(t_m)$、$A(t_f)$连接的运动轨迹和连接该运动轨迹两端点 $A(t_0)$、$A(t_f)$最短圆弧所组成曲面的面积,t_0为初始时刻,t_m为中间时刻,t_f为结束时刻.如图 2中 x轴的运动轨迹所示.

假设载体发生式(4)所示的运动,则等效陀螺漂移发生在 x轴上,因此仅对 A_x的表达式进行

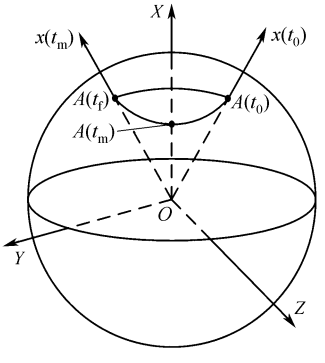


图 2　G-R有限旋转示意图

推导. 根据圆锥运动定义及 G-R 定理,可知载体完成一次圆锥运动, x 轴的运动轨迹将形成封闭的曲线. 此曲线所包围的单位球面表面积即为一圆锥运动周期内的 $|A_x|$. 利用二重积分可得 $|A_x|$ 的表达式:

$$|A_x| = \iint_{D_{YZ}} \frac{1}{\sqrt{1 - Y^2 - Z^2}} \mathrm{d}Y\mathrm{d}Z \tag{10}$$

其中, D_{YZ} 为 x 轴运动轨迹在 YZ 面的投影.

A_x 符号由 x 轴运动轨迹在 YZ 面投影的运动方向来决定. 如图 3所示,若 YZ 面的投影为逆时针运动,按照右手螺旋定则 A_x 将指向 X 的正方向,即 $A_x = |A_x|$;否则 $A_x = -|A_x|$.

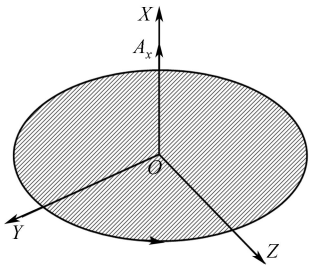


图 3 运动轨迹在 YZ平面投影

式 (4)的运动可用四元数 Λ 表示为

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3 = \cos\frac{\Phi}{2} + \left(\frac{\alpha\sin\Omega t}{\Phi} i_2 + \frac{\beta\sin(\Omega t + c)}{\Phi} i_3\right)\sin\frac{\Phi}{2} \tag{11}$$

其中, λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 为四元数; i_1, i_2, i_3 为单位矢量.

设向量 $u = [u_1\ u_2\ u_3]$ 的运动轨迹为 $T = [T_1\ T_2\ T_3]$ 表示. 其中, T_1, T_2, T_3 为其运动轨迹在 X, Y, Z 轴上的投影,它与 Λ 间关系为

$$T_1 = \frac{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\|\Lambda\|} u_1 + \frac{2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3)}{\|\Lambda\|} u_2 + \frac{2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2)}{\|\Lambda\|} u_3 \tag{12a}$$

$$T_2 = \frac{2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)}{\|\Lambda\|} u_1 + \frac{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\|\Lambda\|} u_2 + \frac{2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1)}{\|\Lambda\|} u_3 \tag{12b}$$

$$T_3 = \frac{2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)}{\|\Lambda\|} u_1 + \frac{2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1)}{\|\Lambda\|} u_2 + \frac{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{\|\Lambda\|} u_3 \tag{12c}$$

载体 x 轴在单位球上运动轨迹可利用向量 $[1\ 0\ 0]$ 的运动轨迹来表示. 将 $[1\ 0\ 0]$ 代入式 (12),得 x 轴在 YZ 面运动轨迹投影:

$$\left.\begin{aligned} Y &= \sin\Phi\cos\theta \\ Z &= -\sin\Phi\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中

$$\theta = \operatorname{arccot}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\sin\Omega t}{\sin(\Omega t + c)}$$

将式 (13)代入式 (10),利用极坐标变换可得

$$|A_x| = \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \oint_{\alpha\beta} \frac{1 - \cos\Phi}{\Phi^2}\sin c\,\mathrm{d}t \tag{14}$$

考察式 (13),可知 x 轴投影到 YZ 面运动轨迹为顺时针运动方向,因此

$$A_x = -|A_x| = -\int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \oint_{\alpha\beta} \frac{1 - \cos\Phi}{\Phi^2}\sin c\,\mathrm{d}t \tag{15}$$

将式 (4)中的 Φ_x 代入式 (9),考虑圆锥运动的周期性,可知

$$\int_0^{t_f} \omega_x\,\mathrm{d}t = -A_x = \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \oint_{\alpha\beta} \frac{1 - \cos\Phi}{\Phi^2}\sin c\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

其中, $t_f - t_0 = 2\pi/\Omega$ 为圆锥运动周期. 因此

$$\omega_x = \Omega\alpha\beta\frac{1 - \cos\Phi}{\Phi^2}\sin c \tag{17}$$

2 3种方法的相似性

以经典圆锥运动 (即 $\alpha = \beta$, $c = 90°$)为例,对 3种方法推导出的等效陀螺漂移表达式进行分析.

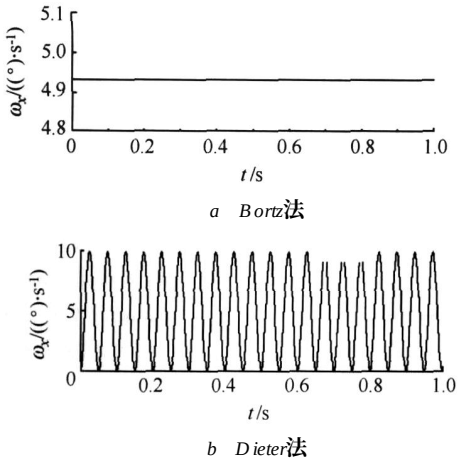
对比式 (5),式 (8),式 (17)中的 ω_x,可知式 (5)和式 (17)中的 ω_x 等价;式 (5)和式 (8)中的 ω_x 不同. 定义 $\Delta\omega_x$ 为式 (5)和式 (8)中 ω_x 的差值:

$$\Delta\omega_x = 2\Omega\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2}\Omega\alpha^2 + \frac{1}{2}\Omega\alpha^2\cos 2\Omega t - \Omega\alpha\sin\Omega t\left(\frac{\alpha^3\sin^3\Omega t}{3!} - \cdots\right) \tag{18}$$

当 α 为小量时, $2\Omega\sin^2(\alpha/2) \approx 2\Omega(\alpha/2)^2$,忽略高阶小量,式 (18)简化为

$$\Delta\omega_x = \frac{1}{2}\Omega\alpha^2\cos 2\Omega t \tag{19}$$

式 (19)是均值为 0,振幅与 ω_x 近似的余弦振动. 说明当 α 为小量时, Dieter欧拉角方法 (简称 Dieter法)得出的 ω_x 均值近似于 Bortz旋转矢量方法 (简称 Bortz法)得出的结果,但 Dieter法却相对 Bortz法多一个振动过程. 具体数字仿真结果如图 4及表 1所示.



a　*Bortz*法

b　*Dieter*法

图 4　$\alpha = 3°, \Omega = 20\pi$ *(rad/s)*, c = 90 时两种方法的 ω_x

表 1　ω_x均值　　(°)/s

方法	α/(°)		
	0.05	1	3
Bortz法	1.371×10^{-3}	5.483×10^{-1}	4.934
Dieter法	1.369×10^{-3}	5.477×10^{-1}	4.928

由图 4及表 1可知,Dieter法的结果比 Bortz法多一个振荡过程;并且 α越小,两种方法得到的 *x*轴陀螺输出均值越近似.因为振荡过程在导航计算中的影响能够相互抵消,所以可认为在小角度圆锥运动情况下,Dieter法与 Bortz法仍是等价的.

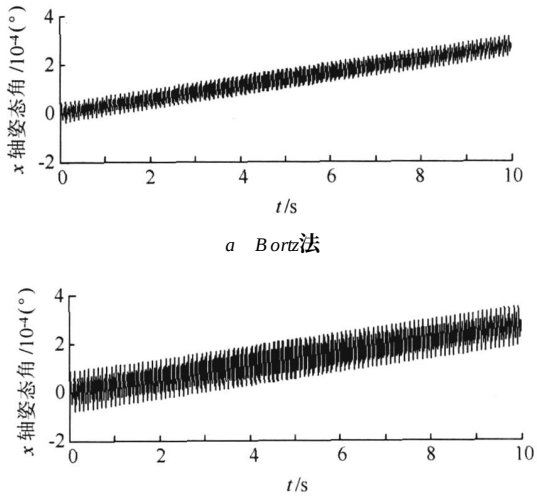
3　圆锥补偿算法的仿真

圆锥补偿算法可利用 Bortz法或 G-R法得到,本节对圆锥补偿算法在 Dieter法下的补偿效果进行了仿真.设仿真条件为:①$\alpha = \beta = 0.1°, c = 90°, \Omega = 20\pi$ (rad/s);②$\alpha = \beta = 1°, c = 90°, \Omega = 20\pi$ (rad/s);③$\alpha = \beta = 3°, c = 90°, \Omega = 20\pi$ (rad/s),陀螺采样周期为 0.01 s.将上述 3个仿真条件分别代入式 (5)和式 (8),形成这两种方法下的圆锥运动.然后采用二子样圆锥补偿算法进行姿态更新,补偿后 *x*轴姿态角变化如图 5~图 7所示,*x*轴姿态角漂移率如表 2所示.

表 2　补偿后 *x*轴姿态角漂移率　　(°)/s

方法	仿真条件①	仿真条件②	仿真条件③
Bortz法	2.719×10^{-5}	2.718×10^{-3}	1.087×10^{-2}
Dieter法	2.719×10^{-5}	2.678×10^{-3}	1.021×10^{-2}

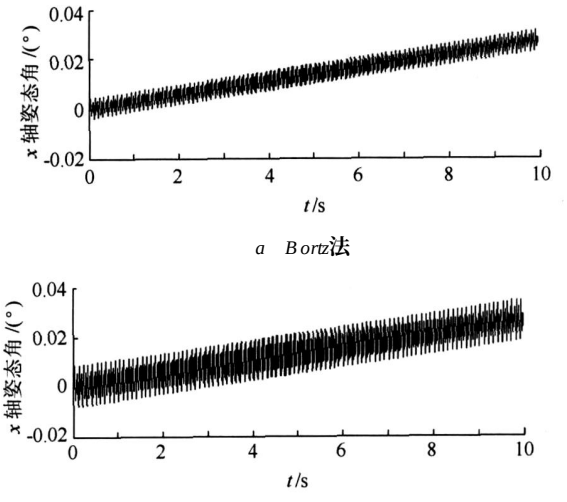
由图 5~图 7及表 1可知,同样仿真条件下,Bortz法、Dieter法的仿真曲线走势是一致的,只是 Dieter法的图形相对 Bortz法振动幅值大一些;Dieter法的漂移率较小,并且圆锥运动幅值越大,两种方法的漂移率差值越大.所以可认为 Bortz法、G-R法推导的圆锥补偿算法仍适用于 Dieter法,且当圆锥运动振动角较小时,算法的补偿效果是一致的.



a　*Bortz*法

b　*Dieter*法

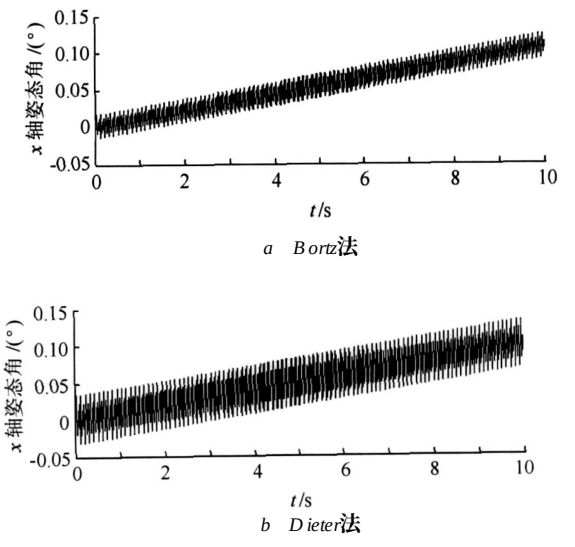
图 5　仿真条件 ①下两种方法的补偿精度



a　*Bortz*法

b　*Dieter*法

图 6　仿真条件 ②下两种方法的补偿精度



a　*Bortz*法

b　*Dieter*法

图 7　仿真条件 ③下两种方法的补偿精度

4 结 论

本文从3个不同的角度对圆锥运动下产生的等效陀螺漂移公式进行了研究,得到以下结论:①G-R法与Bortz法是等价的,但G-R法的推导较为简单;②Dieter法的推导过程简单明了,但由于欧拉角旋转轴的非正交性,没有严格遵守圆锥运动的定义,因此只在小角度圆锥运动时,与Bortz法、G-R法等价;③鉴于Bortz法和G-R法的严格性及适用性,研究人员可利用它们指导圆锥补偿算法的设计;④3轴转台的运动特性与Dieter法对应,可用Dieter法指导圆锥运动的转台实验以检验Bortz法和G-R法推导得出的圆锥补偿算法的补偿效果.

参考文献 (References)

[1] Bortz J E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1971, AES-7(1): 61 - 66

[2] Joos D K. Real time gyro error compensation in strapdown systems[C]//Sorg H. Symposium Gyro Technology Conference Proceedings. Stuttgart, Germany: Universität Stuttgart, 1983: 18.1 - 18.22

[3] Mckern R, Musoff H. Strapdown attitude algorithms from a geometric viewpoint[R]. AIAA81-4311, 1981

[4] 王养柱,崔中兴. 捷联惯导系统圆锥补偿算法研究[J]. 北京航空航天大学学报, 2001, 27(3): 264 - 267
Wang Yangzhu, Cui Zhongxi. Research on coning compensation algorithms for SINS[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2001, 27(3): 264 - 267 (in Chinese)

[5] 刘危,解旭辉,李圣怡. 捷联惯导系统的圆锥误差补偿算法研究[J]. 南京航空航天大学学报, 2004, 36(3): 348 - 352
Liu Wei, Xie Xuhui, Li Shengyi. Coning algorithm for strapdown inertial navigation system[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautic, 2004, 36(3): 348 - 352 (in Chinese)

[6] Blankinship K. A new kinematic theorem for rotation motion[J]. IEEE, 2004: 285 - 295

[7] 刘道静,李立新,纪志农,等. 李萨如图在捷联惯导系统圆锥误差估计中的应用[J]. 中国惯性技术学报, 2005, 13(3): 61 - 63
Liu Daojing, Li Lixin, Ji Zhinong, et al. Application of lissajous figures in SINS's coning error estimation[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2005, 13(3): 61 - 63 (in Chinese)

[8] 魏晓虹,张春熹,朱奎宝. 一种高精度角速率圆锥补偿算法[J]. 北京航空航天大学学报, 2005, 31(12): 1312 - 1316
Wei Xiaohong, Zhang Chunxi, Zhu Kuibao. High accuracy coning compensate algorithm by angular velocity[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2005, 31(12): 1312 - 1316 (in Chinese)

(责任编辑:刘登敏)

(上接第951页)

[9] 贺仁杰. 成像侦察卫星调度问题研究[D]. 长沙:国防科学技术大学信息系统与管理学院, 2004
He Renjie. Research on imaging reconnaissance satellite scheduling problem[D]. Changsha: School of Information and Management, National University of Defense Technology, 2004 (in Chinese)

[10] 刘洋. 成像侦察卫星动态重调度模型、算法及应用研究[D]. 长沙:国防科技大学信息系统与管理学院, 2004
Li Yang. Research on dynamic rescheduling model, algorithm and its applications of imaging reconnaissance satellite scheduling problem[D]. Changsha: School of Information and Management, National University of Defense Technology, 2004 (in Chinese)

[11] 王远振,赵坚,聂成. 多卫星-地面站系统的Petri网模型研究[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2003, 4(2): 7 - 11
Wang Yuanzhen, Zhao Jian, Nie Cheng. Study on petri net model for multi-satellites-ground stations system[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2003, 4(2): 7 - 11 (in Chinese)

[12] 金光,武小悦,高卫斌. 卫星地面站资源调度优化模型及启发式算法[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(12): 1839 - 1841 (in Chinese)
Jin Guang, Wu Xiaoyue, Gao Weibin. Ground station resource schedul ing optimization model and its heuristic algorithm[J]. Systems Engineering and Electronics, 2004, 26(12): 1839 - 1841 (in Chinese)

[13] 阎志伟,牛轶峰,李汉铃. 基于并行禁忌遗传算法(PTGA)的预警卫星传感器调度研究[J]. 宇航学报, 2003, 24(6): 598 - 603
Yan Zhiwei, Niu Yifeng, Li Hanling. Study of sensor scheduling for early warning satellite based on parallel tabu genetic algorithm (PTGA)[J]. Journal of Astronautics, 2003, 24(6): 598 - 603 (in Chinese)

(责任编辑:娄 嘉)