双框架控制力矩陀螺奇异性分析

卢松涛 王 磊 赵育善

(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100191)

摘 要: 针对双框架控制力矩陀螺群的奇异性问题,定义了框架坐标系;提出了显隐奇点的ε-δ定义,并对奇点进行了3种分类;将陀螺群的角动量在奇点进行了泰勒展开,并定义了空转的判定条件;分析了陀螺群陷入奇异与各角动量相互平行的关系;针对定常转速且角动量大小相等的不限定框架构型的陀螺群的奇点问题,给出了内奇点必是隐奇点的严格证明.通过三正交构型20°纬度圈的最小显奇点的实例验证了内奇点必是隐奇点的论点.

关 键 词: 控制力矩陀螺; 奇异性; 双框架

中图分类号: V 448.22$^+$2

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2008)09-1096-05

Double gimbal control moment gyroscopes singularity analysis

Lu Songtao Wang Lei Zhao Yushan

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Aimed at analyzing the singularity of double gimbal control moment gyroscopes(DGCMGs), a gimbal reference frame, an ε-δ definition of apparent and concealed singular points, three sorts of singular points, system momentum taylor series expanded formula at singular point and a determination of null motions were proposed. The relation between singularity of the system and parallelism of each gyroscope angular momentum was discussed. It was strictly proved that the DGCMGs with constant velocity and equal angular momentum and without limit of configuration, has the property that inside singular points must be concealed singular ones. The views above were examined through the numerical simulation of minimal apparent singular points of three orthogonal configuration's 20° latitude circle.

Key words: control moment gyroscopes; singularity; double gimbal

美国从60年代中期开始致力于研究双框架控制力矩陀螺DGCMGs(Double Gimbal Control Moment Gyroscopes)的原理和应用.从1973的天空实验室Skylab到1981年的国际空间站ISS(International Space Station),DGCMGs在应用中的优势主要体现在冗余度多;构型效益大;操纵率计算量小;在有陀螺出现故障时,操纵率兼容性好;各陀螺工作载荷较接近,使用寿命较长;以及同样的输出力矩,较单框架陀螺群而言,系统质量较轻等方面.中国近些年也开始DGCMGs的研究,并将其作为航天器姿态控制的执行机构,目前理论和实验都处于起步阶段.

奇点分析是研究和应用DGCMGs的理论基础.在奇点附近,理论框架角速度过大,超出执行机构的能力,无法输出指令力矩.避免奇异是操纵率设计的一个重要指标.1997国内的朱敏等人针对单框架陀螺群,给出了显隐奇点的定义,但定义并不准确;给出了空转的判定条件,进行了构型分析[1].汤亮在2005年对单框架变速控制力矩陀螺群的奇异性进行了可视化分析[2].Meffe在1988年给出单双框的包括奇异性分析的各种性能指标的对比性分析[3];Bong Wie等长期从事控制力矩陀螺的各种研究,在2002年已经着手于奇点的可视化分析[4].本文创新性的对双框架陀螺群在奇

收稿日期: 2007-09-17

基金项目: 863资金资助项目(2006AA704335)

作者简介: 卢松涛(1981—),男,北京人,博士生,fox6857@hotmail.com.

点泰勒展开的空转判定条件,对应指令力矩的奇点形式和内奇点必是隐奇点等理论进行了论述.

1　坐 标 系

单个陀螺的框架坐标系定义[5]如下:$\boldsymbol{Z}_i$为外框架轴,$\boldsymbol{X}_i$的正方向是α_i和β_i都为 0 的角动量矢量方向,α_i为外框角,β_i为内框角.$\boldsymbol{Y}_i=\boldsymbol{Z}_i\times\boldsymbol{X}_i$. i 为陀螺的编号.单位角动量陀螺在其框架坐标系的分量为

$$\boldsymbol{H}_i=\begin{bmatrix}\cos\alpha_i\cos\beta_1\\ \sin\alpha_i\cos\beta_i\\ \sin\beta_i\end{bmatrix}$$

考虑三正交构型的陀螺群角动量分量在本体坐标系中的分量为[5]

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\cos\alpha_1\cos\beta_1+\sin\beta_2+\sin\alpha_3\cos\beta_3\\ \sin\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2+\sin\beta_3\\ \sin\beta_1+\sin\alpha_2\cos\beta_2+\cos\alpha_3\cos\beta_3\end{bmatrix}$$

2　奇点分类

如果角动量点$\boldsymbol{H}_s$(下标 s 表示对应的框架角点为奇点)在框架角$\boldsymbol{X}$空间仅对应一个孤立的奇点$\boldsymbol{x}_s$,则该奇点称为显奇点.如果对于足够小的任意$\varepsilon>0$,都存在框架角增量$\boldsymbol{\Delta}$满足$0<\|\boldsymbol{x}_s+\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{x}_s\|<\varepsilon$($\|\cdot\|$是二范数),且新框架角点$\boldsymbol{x}_s+\boldsymbol{\Delta}$所对应的角动量点也为$\boldsymbol{H}_s$,则该奇点称为隐奇点.隐奇点的定义中,并不需要$\varepsilon$的去心临域内的所有点都对应同样的角动量点$\boldsymbol{H}_s$;如果有另一个不同于该奇点$\boldsymbol{x}_s$的新点也对应同一个$\boldsymbol{H}_s$,但其不在$\boldsymbol{x}_s$的去心邻域内,那么此新点不能保证$\boldsymbol{x}_s$是隐奇点,也就是说新点应是从原奇点$\boldsymbol{x}_s$连续变化而来的.隐奇点的这种再构型而不改变输出角动量的能力,称为“空转”.能够通过空转脱离奇异的点(存在空转后的点为非奇点),称为“可越奇点”,不能通过空转脱离奇异的点,称为“不可越奇点”.显奇点一定是不可越奇点.隐奇点可能是可越奇点,也可能是不可越奇点.按奇点对应的角动量点在动量包络面的内外,分为外奇点和内奇点.

3　空转判定条件

α_i^*是奇点外框角,β_i^*是奇点内框角,奇点$\boldsymbol{x}^*=[\alpha_1^*,\beta_1^*,\alpha_2^*,\beta_2^*,\cdots,\alpha_n^*,\beta_n^*]^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{H}$是陀螺群角动量在本体坐标系的分量,$\boldsymbol{H}_i$是各陀螺角动量在本体坐标系的分量.$\boldsymbol{C}$是$3\times2n$力矩矩阵,$\boldsymbol{C}_i=[\boldsymbol{C}_{i1},\boldsymbol{C}_{i2}]=[\partial\boldsymbol{H}/\partial x_{2i-1}{}^*,\partial\boldsymbol{H}/\partial x_{2i}{}^*]$,$i=1,2,\cdots,n$.在指令力矩$\boldsymbol{u}$上的奇点$\boldsymbol{x}^*$附近进行 Taylor 级数展开,可得:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*+\Delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial\alpha_i^*}\Delta\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial\beta_i^*}\Delta\beta_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial\alpha_i^{*2}}(\Delta\alpha_i)^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial\alpha_i^*\partial\beta_i^*}\Delta\alpha_i\Delta\beta_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial\beta_i^{*2}}(\Delta\beta_i)^2+o([\Delta\alpha^2,\Delta\beta^2])\tag{1}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*+\Delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*)+\boldsymbol{C}\Delta x+\frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}(\Delta\boldsymbol{x})+o([\Delta\alpha^2\Delta\beta^2])\tag{2}$$

式中,$\boldsymbol{C}\Delta\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{C}_{i1}\Delta x_{2i-1}+\boldsymbol{C}_{i2}\Delta x_{2i})$,是$3\times1$的矩阵.

$$\boldsymbol{M}_i=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial\alpha_i^{*2}} & \dfrac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial\alpha_i^*\partial\beta_i^*}\\ \dfrac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial\beta_i^*\partial\alpha_i^*} & \dfrac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial\beta_i^{*2}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1 & & & \\ & \boldsymbol{M}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{M}_n\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}(\Delta\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\Delta x_{2i-1},\Delta x_{2i}]\boldsymbol{M}_i[\Delta x_{2i-1},\Delta x_{2i}]^{\mathrm{T}}$$

可得空转的第一必要条件[6]:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}^*)\Delta\boldsymbol{x}=0\tag{3}$$

将式(2)两边乘以$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$,考虑$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$,有:

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}^*))=\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}[\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}]\Delta\boldsymbol{x}\tag{4}$$

定义

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1 & & & \\ & \boldsymbol{P}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{P}_n\end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{P}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial\alpha_i^{*2}} & \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial\alpha_i^*\partial\beta_i^*}\\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial\beta_i^*\partial\alpha_i^*} & \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial\beta_i^{*2}}\end{bmatrix}$$

可推导空转的第二必要条件[6]:

$$\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{x}=0\tag{5}$$

对这两个必要条件综合考虑,可得

$$\Delta\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{2n-r}\lambda_i n_i=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\lambda}\tag{6}$$

式中,r为$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}^*)$的秩;$\lambda_i$为标量系数;$\boldsymbol{n}_i$为$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}^*)$的正交补空间的基向量;$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\cdots,\boldsymbol{n}_{2n-r}]$.

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\lambda}=0 \tag{7}$$

式中，$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{N}$. 当 $\boldsymbol{Q}$ 为确定阵时，$\boldsymbol{\lambda}$ 无解，无法空转，奇点为显奇点. 当 $\boldsymbol{Q}$ 为不确定阵时，$\boldsymbol{\lambda}$ 有解，可以空转，奇点为隐奇点.

4 奇点性质

定理 1 当 $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{C}_i)=2, i=1,2,\cdots,n$（即各陀螺不退化成单框架陀螺性质）时，“陀螺群陷入奇异”是陀螺群“各角动量矢量互相平行”的充要条件.

引理 1 陀螺群的动量包络面是球体，半径为 nh（h 为单个陀螺角动量）.

引理 2 $\cos\beta_i=0$ 是 $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{C}_i)=1$ 的充要条件.

引理 3 对于单个双框架陀螺，在框架坐标系下，指令力矩为 $\boldsymbol{u}=[u_1,u_2,u_3]^{\mathrm{T}}$，通过 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ 求得，无论内外框角都以 2π 为周期，对于 $\alpha\in(-\pi,\pi]$，$\beta\in(-\pi,\pi]$，奇异框架角解的形式为

1) $u_1=0$ 且 $u_2=0$ 时，$\beta=\pm\pi/2$，α 取任意值.

2) $u_1\neq0$ 或 $u_2\neq0$ 时，共 8 组解.

$\mathrm{Rank}(C_i)=1$ 性质的(α,β)有 4 组解：$(\arctan 2(-u_1,u_2),\pi/2)$，$(\arctan 2(u_1,-u_2),\pi/2)$，$(\arctan 2(-u_1,u_2),-\pi/2)$，$(\arctan 2\cdot(u_1,-u_2),-\pi/2)$. $\mathrm{Rank}(C_i)=2$ 性质的(α,β)有 4 组解：$(\arctan 2(u_2,u_1),\arctan 2(u_3,\sqrt{u_1^2+u_2^2}))$，$(\arctan 2(u_2,u_1),\arctan 2(-u_3,-\sqrt{u_1^2+u_2^2}))$，$(\arctan 2(-u_2,-u_1),\arctan 2\cdot(-u_3,\sqrt{u_1^2+u_2^2}))$，$(\arctan 2(-u_2,-u_1),\arctan 2(u_3,-\sqrt{u_1^2+u_2^2}))$. 其中，$\arctan 2(y,x)$，表示向量在 xOy 平面的广义反正切，即向量和 x 轴正向的夹角，范围是$[-\pi,+\pi]$. y 表示向量在 Oy 轴的分量，x 表示向量在 Ox 轴的分量.

综上所述，对于给定的 $\boldsymbol{u}$，奇异框架角在 α 和 β 构成的平面中，或者是两条线，或者是 8 个点.

引理 4 如果某个陀螺的奇点满足：

$\mathrm{Rank}(\boldsymbol{C}_i)=2$，那么其角动量与指令力矩平行.

引理 5 当 $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{C}_i)=2, i=1,2,\cdots,n$ 时，“陀螺群的奇点是外奇点”的充要条件是“各陀螺角动量都与指令力矩方向相同，或都相反”.

引理 6 当单个陀螺框架坐标系与飞行器本体坐标系重合时，$u_1=0$ 且 $u_2=0$ 是其框架角的解有无穷组解 $\beta=\pm\pi/2$，α 取任意值的充要条件.

引理 7 对于单个陀螺，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ 的解等价于 $(\boldsymbol{A}_{\mathrm{sb}}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{sb}}\boldsymbol{C})=\boldsymbol{0}$ 的解，其中 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{sb}}$ 是从本体坐标系到框架坐标系的转换矩阵. 即问题可以从飞行器本体坐标系转到框架坐标系下讨论.

引理 8 “指令力矩 $\boldsymbol{u}$ 与某个陀螺外框架轴在一条直线上”是“此陀螺奇异框架角的解为无穷组解，即 $\beta=\pm\pi/2$，α 取任意值”的充要条件.

定理 2 双框架控制力矩陀螺的内奇点必是隐奇点（与框架构型无关）. 其中每个陀螺都是定常转速，且转子角动量的大小相等.

证明 在第 3 节中 $\boldsymbol{Q}$ 的正定性是通过两个必要条件推出的，所以严格的证明应使用隐奇点的定义进行推导.

1) 指令力矩的方向不和任一个陀螺的外框架轴在一条直线上时.

由引理 8、引理 7、引理 3，此时各陀螺奇点的解只能是 8 组，在 $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{C}_i)=1$ 的解集和 $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{C}_i)=2$ 的解集中都可能有元素.

① 陀螺群中有一个陀螺的奇异框架角（包括外框角和内框角）是 $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{C}_i)=1$ 的解集中的元素.

不失一般性，设此陀螺为陀螺 1，则奇异框架角为(α_1,β_1). 则此时，由引理 2，$\cos\beta_1=0$. 在 $2n$ 维框架角空间中（n 是双框架陀螺的个数），对于任意一个给定的小正数 $\varepsilon>0$，取 $\Delta\alpha_1=\varepsilon/2$，此时陀螺群的新的框架角为$(\alpha_1+\Delta\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_n,\beta_n)$，此新点与奇点的距离小于 ε，且新点与奇点的陀螺群的角动量的大小和方向一致. 所以，此奇点可以空转. 此种情况的奇点都是隐奇点，那么内奇点也必是隐奇点.

② 陀螺群中任何一个陀螺的奇异框架角都是 $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{C}_i)=2, i=1,2,\cdots,n$ 的解集中的元素.

此时指令力矩对应的奇点，既有外奇点，也有内奇点. 由定理 1，每个陀螺的角动量都相互平行. 如果所有陀螺的角动量方向都在同一个射线方向上，那么此奇点是外奇点（在包络面上），不在讨论的范围内. 所以此种情况下的内奇点，必存在两个陀螺的角动量相互平行，但在不同的射线方向上. 不失一般性，记为陀螺 1 和陀螺 2，由引理 2，有：

$$\left.\begin{aligned}\cos\beta_1\neq0\\ \cos\beta_2\neq0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

陀螺 1 和陀螺 2 在本体坐标系中的分量为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{bs1}}\begin{bmatrix}\cos\alpha_1\cos\beta_1\\ \sin\alpha_1\cos\beta_1\\ \sin\beta_1\end{bmatrix}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{bs2}}\begin{bmatrix}\cos\alpha_2\cos\beta_2\\ \sin\alpha_2\cos\beta_2\\ \sin\beta_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

记 $$\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 \cos\beta_2 \\ \sin\alpha_2 \cos\beta_2 \\ \sin\beta_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

设 α_1，β_1 增量为 $\Delta\alpha_1$、$\Delta\beta_1$，代入式(9)：

$$\begin{bmatrix} h_x + \Delta h_x \\ h_y + \Delta h_y \\ h_z + \Delta h_z \end{bmatrix} = -(\boldsymbol{A}_{bs2})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_{bs1} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 + \Delta\alpha_1)\cos(\beta_1 + \Delta\beta_1) \\ \sin(\alpha_1 + \Delta\alpha_1)\cos(\beta_1 + \Delta\beta_1) \\ \sin(\beta_1 + \Delta\beta_1) \end{bmatrix} \tag{10}$$

定义：

$$\begin{bmatrix} h_x + \delta h_x \\ h_y + \delta h_y \\ h_z + \delta h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha'_2 \cos\beta'_2 \\ \sin\alpha'_2 \cos\beta'_2 \\ \sin\beta'_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

则根据式(9)，h_x，h_y，h_z 都是 α_1，β_1 的连续函数，那么由式(10)，当 $\Delta\alpha_1 \to 0$ 且 $\Delta\beta_1 \to 0$ 时，必有 $\Delta h_x \to 0$ 且 $\Delta h_y \to 0$ 且 $\Delta h_z \to 0$. 考虑式(8)，可得式(9)在 $\alpha \in (-\pi, \pi]$，$\beta \in (-\pi, \pi]$ 范围内的解为

当 $1 > h_z \geqslant 0$ 时

$\beta_2 = \arcsin(h_z)$，$\alpha_2 = \arctan 2(h_y, h_x)$ 或 $\beta_2 = \pi - \arcsin(h_z)$，$\alpha_2 = \arctan 2(-h_y, -h_x)$. 不失一般性，选第一组讨论，$\beta_2 = \arcsin h_z$，$\alpha_2 = \arctan 2(h_y, h_x)$.

$1 > h_z > 0$

可以取到小量 $\Delta\alpha_1$ 和 $\Delta\beta_1$，使得 Δh_z 满足 $1 > h_z + \delta h_z > 0$. 存在 $\beta'_2 = \arcsin(h_z + \Delta h_z)$，$\alpha'_2 = \arctan 2(h_y + \Delta h_y, h_x + \Delta h_x)$ 的形式，满足式(11). 那么

$\Delta\alpha_2 = \arctan 2(h_y + \Delta h_y, h_x + \Delta h_x) - \arctan 2(h_y, h_x)$，$\Delta\beta_2 = \arcsin(h_z + \Delta h_z) - \arcsin h_z$.

$\alpha_2 = \arctan 2(h_y, h_z)$ 和 $\beta_2 = \arcsin h_z$ 都是连续函数，$\Delta h_y \to 0$ 且 $\Delta h_x \to 0$ 时，有 $\Delta\alpha_2 \to 0$；$\Delta h_z \to 0$ 时，有 $\Delta\beta_2 \to 0$.

$h_z = 0$，证明类似 $1 > h_z > 0$.

当 $0 > h_z > -1$ 时，证明类似“当 $1 > h_z \geqslant 0$ 时”.

根据上述，当 $\Delta\alpha_1 \to 0$ 且 $\Delta\beta_1 \to 0$ 时，必有 $\Delta\alpha_2 \to 0$ 且 $\Delta\beta_2 \to 0$ 成立.

在 $2n$ 维空间中，对于任意一个给定的小正数 $\varepsilon > 0$，存在合适的 $\Delta\alpha_1, \Delta\beta_1 \in (0, \varepsilon/3)$（根据②，“$\Delta\alpha_1 \to 0$ 且 $\Delta\beta_1 \to 0$ 时，必有 $\Delta\alpha_2 \to 0$ 且 $\Delta\beta_2 \to 0$ 成立”），使得 $\Delta\alpha_2$ 和 $\Delta\beta_2$ 满足 $\varepsilon/3 > \Delta\alpha_2 > 0$ 和 $\varepsilon/3 > \Delta\beta_2 > 0$（可通过高等数学证明）. 此时陀螺群的新的框架角为：$(\alpha_1 + \Delta\alpha_1, \beta_1 + \Delta\beta_1, \alpha_2 + \Delta\alpha_2, \beta_2 + \Delta\beta_2, \alpha_3, \beta_3, \cdots, \alpha_n, \beta_n)$. 此在新点与奇点的距离小于 ε，且新点与奇点的陀螺群的角动量的大小和方向一致. 所以，此奇点可以空转. 此种情况内奇点必是隐奇点.

2) 指令力矩的方向和某一个陀螺的外框架轴在一条直线上时.

不失一般性，记为陀螺 1. 指令力矩对应的奇点，既可能有内奇点，也可能有外奇点. 由引理 8，陀螺 1 的奇异框架角组合的解为无穷组解，即 $\beta_1 = \pm\pi/2$，α_1 取任意值. 可以仿照①证明. 此种情况下所有奇点都可以空转，那么内奇点也必可以空转. 所以此种情况下，内奇点必是隐奇点.

综上所述，由 1)和 2)，原命题得证. **证毕**

推论 1　在定理 2 中的情况①下，如果存在另一个陀螺在其奇点处的力矩矩阵的秩为 2，则此陀螺群的奇点必是内奇点.

推论 2　在定理 2 中的情况②下，内奇点不仅是隐奇点，而且是可越奇点.

推论 3　在定理 2 中的情况 2)下，按定理 2 中取 $\Delta\alpha_1$ 的方法得到的新点，还是奇点.

5　仿真算例

依据第 3 节，利用 Matlab 绘制三正交双框架陀螺群（各陀螺为单位角动量）的 20°纬度圈上的最小显奇点角动量分布图为例. 由图 1，最小显奇点都在动量包络面上，显奇点又不可能在动量包络面外，那么也就是所有的显奇点都在动量包络面上. 所以内奇点必然不是显奇点，只能是隐奇点. 绘制其它固定纬度圈（经度）的分布图可以得到同样的结果. 从而验证了定理 2.

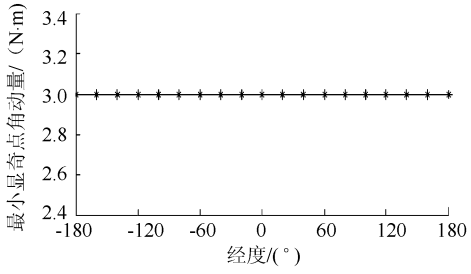


图 1　三正交构型 20°纬度圈的最小显奇点角动量图

6　结 束 语

本文详细论述了双框架陀螺群奇异性分析的基础理论，特别是提出了空转判定条件，以及定常转速且角动量大小相等的不限定框架构型的陀螺群的内奇点必是隐奇点的严格证明，并通过三正交框架构型陀螺群的仿真实例对有限点进行了验证. 本文中提出的各种奇点的性质，将作为以后操

纵率设计的依据.

参考文献（References）

[1] 朱敏.空间站的力矩陀螺控制[D].北京:北京航空航天大学宇航学院,1997
Zhu Min. CMG control for orbital space stations[D]. Beijing: School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1997(in Chinese)

[2] 汤亮.使用控制力矩陀螺的航天器姿态动力学与控制问题研究[D].北京:北京航空航天大学宇航学院,2005
Tang Liang. A research on attitude dynamics and control of spacecraft with control moment gyros[D]. Beijing: School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2005(in Chinese)

[3] Meffe M. Control moment gyroscope configurations for the space station[R]. AAS-88-040, 1988

[4] Wie B. Computation and visualization of control moment gyroscope singularities[R]. AIAA-2002-4570, 2002

[5] Yoshikawa T. A steering law for three double-gimbal control moment gyro systems[R]. NASA TM-X-64926, 1975

[6] Wie B. Singularity analysis and visualization of single-gimbal control moment gyro systems[R]. AIAA-2003-5678, 2003

（责任编辑:张 嵘）

（上接第1075页）

4 结束语

本文给出了适用于第一人称射击游戏角色运动特征的可预测错误的自适应位置外推算法.根据此类游戏角色运动方向多变、轨迹呈连续折线的特点,选取一阶外推方程和直线收敛算法用于位置预测与收敛,通过检测可能导致推算错误的角色运动行为,及时发送状态更新,并在收敛过程中根据角色运动状态的改变对收敛进行分级调整.根据推算角色与观察者的距离改变推算策略,以减少需要发送的状态更新数量和推算轨迹的平均偏差.与DIS标准中DR算法的对比测试表明,EPADR算法在第一人称射击游戏中可以减小游戏的网络通信量并提高位置预测精度.

参考文献（References）

[1] Berglund E J,Cheriton D R. Amaze: A multiplayer computer game[J]. IEEE Software, 1985, 2(3): 30－39

[2] IEEE 1278-1996, Standard for distributed interactive simulation application protocols[S]

[3] Singhal S K, Cheriton D R. Using a position history-based protocol for distributed object visualization[R]. CS-TR-94-1505, 1994

[4] Cai Wentong, Lee Francis B S, Chen L. Auto-adaptive dead reckoning algorithm for distributed interactive simulation [C]//Proceedings of the Workshop on Parallel and Distributed Simulation. Los Alamitos, CA:IEEE,1999:82－89

[5] Duncan T P,Gracanin D. Pre-reckoning algorithm for distributed virtual environments[C]// Winter Simulation Conference Proceedings. Los Alamitos,CA:IEEE,2003,2:1086－1093

[6] Aggarwal S, Banavar H, Khandelwal A, et al. Accuracy in dead-reckoning based distributed multi-player games [C]// Proceedings of the ACM SIGCOMM 2004 Workshops. New York: Association for Computing Machinery, 2004: 161－165

[7] Katz A,Kenneth G. Dead reckoning for airplanes in coordinated flight[C]//Proc of the Tenth Workshop on Standards for Interoperability of Defense Simulations. Orlando, Florida: SISO,1994:5－13

[8] Capin T, Esmerado J, Thalmann D. Dead-reckoning technique for streaming virtual human animation [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 1999, 9(3): 411－414

[9] Pantel L, Wolf L C. On the suitability of dead reckoning schemes for games[C]//Proc of 1st Workshop on Network and System Support for Games. New York: Association for Computing Machinery,2002:79－84

[10] Marshall D, Delaney D, McLoone S, et al. Exploring the spatial density of strategy models in a realistic distributed interactive application[C]//Proc of the 8th IEEE International Symposium on Distributed Simulation and Real-Time Applications. Los Alamitos:IEEE,2004:210－213

[11] Lin KuoChi, Wang Morgan, Wang Jie,et al. Smoothing of dead reckoning image in distributed interactive simulation [J]. Journal of Aircraft,1996,33(2): 450－452

[12] Singhal S K. Effective remote modeling in large-scale distributed simulation and visualization environments [D]. Stanford, CA: Stanford University, 1996

（责任编辑:文丽芳）