模拟弹塑性碰撞的修正 SPH 方法

龙丽平 张建宇 丁 桦

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院，北京 100083) (中国科学院 力学研究所，北京 100080)

费斌军

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院，北京 100083)

摘 要：从基本的无网格光滑粒子法 SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)近似出发，修正了模拟固体力学中大变形弹塑性碰撞的 SPH 方法.在边界处采用修正的边界条件，弹塑性分析过程中采用增量理论计算应力，迭代过程中用守恒光滑法进行滤波修正消除拉力不稳定.对 SPH 方法进行了程序实现，给出了杆弹塑性碰撞的算例.计算分析表明，SPH 方法节点的影响域较大、精度较相同节点间距有限元法的结果有一定差距，但是通过增加粒子数量可以提高 SPH 的精度，保持了其简单性和计算大变形的特性.

关 键 词：弹性波；边界条件；光滑粒子法；弹塑性碰撞；守恒光滑法

中图分类号：O 347；O 302

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2007)06-0658-05

Simulation of elastic-plastic impact with modified smoothed particle hydrodynamics method

Long Liping Zhang Jianyu

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Ding Hua

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Fei Binjun

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Based on the approximation of smoothed particle hydrodynamics (SPH), the formulations of SPH method, which can numerically simulate the elastic-plastic impact process in solid mechanics, was established. Modified boundary functions were used to simulating the boundary condition. Owing to the tensile instability of traditional SPH, the code cannot get the proper result. The conservative smoothing approach was used in the procedure to filter the result and eliminate the tensile instability. The example of elastic-plastic impact of a pole and the comparison of the result calculated by SPH and finite element method (FEM) were given. The numerical example and analysis that indicated the influencing region of traditional SPH particle is lager than FEM, and the precision of SPH method is lower than FEM at the same scale of particles. The precision of SPH method can be improved by increasing the number of particles.

Key words: elastic waves; boundary conditions; smoothed particle hydrodynamics; elastic-plastic impact; conservative smoothing approach

收稿日期：2006-06-14

基金项目：国家 973 资助项目(2002CB412706)

作者简介：龙丽平(1977－)，女，重庆江津人，博士生，yanxilong0919@sohu.com.

无网格光滑粒子法(Smoothed Particle Hydrodynamics Method,SPH)在 1977 年首次被提出来解决天体物理和宇宙问题[1]. 1991 年文献[2]用来处理固体的动态响应问题,SPH 方法得到了进一步发展. 近十几年来随着研究者的增多和研究的深入,SPH 法得到了人们的广泛承认. 目前,SPH 法已运用到模拟流体运动、固体大变形、裂纹扩展等很多方面. 随着深入研究的开展,SPH 法的很多优点得到了验证,但同时也暴露了诸多不足,如拉力不稳定、边界误差、插值缺乏连续性和完备性等等. 对于传统 SPH 法的各种缺陷,研究人员通过提出各种方法予以解决,出现了对 SPH 的各种改进和修正. 本文推导了弹塑性碰撞的 SPH 的计算公式,采用守恒光滑法进行滤波修正,解决了传统 SPH 法的拉力不稳定导致计算程序易发散的问题,运用自行开发的 SPH 程序模拟了杆的弹塑性碰撞并与有限元计算的结果进行了比较.

1　SPH 方法及修正

1.1　SPH 的基本近似

SPH 方法中对于求解区域 Ω 中 x 处的场函数近似值 $f^h(x)$表达式:

$$f^h(x)=\int_\Omega w(x-y,h)\cdot f(y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

其中,$w(x-y,h)$为核函数或权函数,h 为影响域半径. 根据文献[1]的工作,$w(x-y,h)$必须满足以下条件:

$$w(x-y,h)>0 \qquad \text{当 } y \text{ 在 } x \text{ 对应的子域内} \tag{2a}$$

$$w(x-y,h)=0 \qquad \text{当 } y \text{ 在 } x \text{ 对应的子域外} \tag{2b}$$

$$\int_\Omega w(x-y,h)\mathrm{d}y=1 \tag{2c}$$

当 $h\to 0$ 时,

$$w(v,h)\to\delta(v) \qquad v=\|x-y\| \tag{2d}$$

如果 $w(x-y,h)$为偶函数,还要满以下条件:

$$\int_\Omega \frac{\partial w(x-y,h)}{\partial x}\mathrm{d}y=0 \tag{2e}$$

常用的 Spline 核函数如下:

$$w(v,h)=\frac{C}{h^d}\begin{cases}\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{3}-v^2+\dfrac{1}{2}v^3\right) & 0<v<1\\ \dfrac{1}{4}(2-v)^3 & 1\leqslant v\leqslant 2\\ 0 & v>2\end{cases} \tag{3}$$

其中,$v=\dfrac{r}{h}=\dfrac{|x-y|}{h}$;$d$ 为空间维数;C 为归一化常数,在一维,二维和三维情形分别为 2/3,10/7π 和 1/π. $w(x-y,h)$及其导数的曲线如图 1 所示.

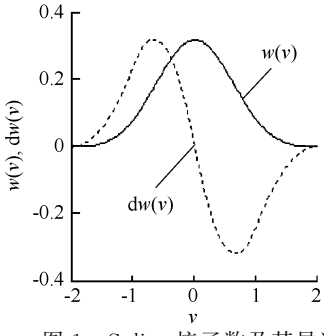

图 1　Spline 核函数及其导数

对式(1)进行数值离散可得粒子 x_i 处场函数的 SPH 近似值 $f^h(x_i)$:

$$f^h(x_i)=\sum_{j\in M_i} f(x_j)w(x_i-x_j,h)\frac{m_j}{\rho_j} \tag{4}$$

其中,$j\in M_i$ 表示 j 是粒子 i 影响域内的粒子;m,ρ 为粒子的质量和密度.

对于 x 处场函数导数的 SPH 近似值有

$$\frac{\partial f^h(x)}{\partial x^\alpha}=\int_\Omega \frac{\partial w(x-y,h)}{\partial x^\alpha}\cdot f(y)\mathrm{d}y \tag{5}$$

可得其离散形式:

$$\frac{\partial f^h(x_i)}{\partial x_i^\alpha}=\sum_{j\in M_i} f(x_j)\frac{\partial w(x_i-x_j,h)}{\partial x_i^\alpha}\frac{m_j}{\rho_j} \tag{6}$$

其中,x_i^α 表示 x_i 在 α 方向上的分量. 式(4)和式(6)是数值计算基本的 SPH 公式.

1.2　弹塑性碰撞的 SPH 守恒公式

对于连续介质力学的质量守恒、动量守恒、能量守恒方程如下:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-\rho\frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho}\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \tag{9}$$

其中,ρ,v,e 分别为密度,速度和比内能;α,β 为方向指标. 由于热传导的时间尺度远远大于撞击过程,因此可忽略能量守恒方程.

对于质量守恒方程按照式(6)进行离散可得

$$\frac{\mathrm{d}\rho_i}{\mathrm{d}t}=-\rho_i\sum_{j\in M_i} v_j^\beta\frac{\partial w}{\partial x_i^\beta}\frac{m_j}{\rho_j} \tag{10}$$

对于求解域内的粒子,上式没有问题,但是对于在边界上以及边界附近的粒子 i 来说,由于影响域的不完整,核函数导数的积分不满足式(2e),以及核函数的积分不满足式(2c),即

$$\sum_{j\in M_i}\frac{\partial w(x_i-x_j)}{\partial x_i^\beta}\frac{m_j}{\rho_j}\neq 0$$

和 $$\sum_{j\in M_i}w(x_i-x_j)\frac{m_j}{\rho_j}\neq 1$$

如图2所示.

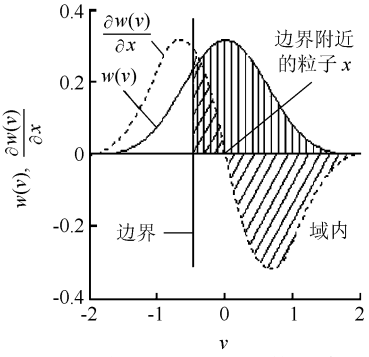

图2 边界附近粒子的核函数及其导数的积分

如果采用式(10)会导致边界上的梯度近似产生较大误差,对式(10)进行适当修改:

$$\frac{\mathrm{d}\rho_i}{\mathrm{d}t}=-\rho_i\sum_{j\in M_i}(v_j^\beta-v_i^\beta)\frac{\partial w}{\partial x_i^\beta}\frac{m_j}{\rho_j}\tag{11}$$

对于域内粒子,$\sum_{j\in M_i}-v_i^\beta\frac{\partial w}{\partial x_i^\beta}\frac{m_j}{\rho_j}=0$,而对于边界附近的粒子,这一项的物理意义是用 v_i^β 来近似影响域内残缺的边界外的粒子的物理量 v_j^β,从而使得可以在完整的影响域内求积分.

对于动量守恒方程式(8),按照式(6)进行离散,可以得到:

$$\frac{\mathrm{d}v_i^\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\rho_i}\sum_{j\in M_i}\sigma_j^{\alpha\beta}\frac{\partial w}{\partial x_i^\beta}\frac{m_j}{\rho_j}\tag{12}$$

考虑边界误差,并考虑到全局动量守恒的条件,式(12)修正为

$$\frac{\mathrm{d}v_i^\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\rho_i}\sum_{j\in M_i}(\sigma_j^{\alpha\beta}+\sigma_i^{\alpha\beta})\frac{\partial w}{\partial x_i^\beta}\frac{m_j}{\rho_j}\tag{13}$$

现在出现的各种SPH的修改方法,如果不满足全局动量守恒,计算程序将很容易发散[3].因此这里还采用式(14)检查全局动量守恒:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\sigma_j^{\alpha\beta}+\sigma_i^{\alpha\beta})\frac{\partial w}{\partial x_i^\beta}\frac{m_jm_i}{\rho_j\rho_i}=0\tag{14}$$

1.3 弹塑性材料应力的计算

对于计算弹塑性大变形碰撞,采用增量理论进行分析,材料本构采用速率型本构,用Jaumann应力率 $\dot{\sigma}_J^{\alpha\beta}$ 求应力:

$$\sigma^{\alpha\beta}(t+\mathrm{d}t)=\sigma^{\alpha\beta}(t)+\dot{\sigma}^{\alpha\beta}\cdot\mathrm{d}t\tag{15}$$

$$\dot{\sigma}_J^{\alpha\beta}=\dot{\sigma}^{\alpha\beta}-\sigma^{\alpha\gamma}\omega^{\gamma\beta}-\sigma^{\beta\gamma}\omega^{\gamma\alpha}\tag{16}$$

其中

$$\dot{\sigma}_J^{\alpha\beta}=C^{\alpha\beta\gamma\kappa}\cdot\dot{\varepsilon}^{\gamma\kappa}\tag{17}$$

$$\dot{\varepsilon}^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta}+\frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha}\right)$$

$$\omega^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\tag{18}$$

其SPH离散形式为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_i^{\alpha\beta}&=\frac{1}{2}\left[\sum_{j\in M_i}(v_j^\alpha-v_i^\alpha)\frac{\partial w(x_i-x_j,h)}{\partial x_i^\beta}\frac{m_j}{\rho_j}+\sum_{j\in M_i}(v_j^\beta-v_i^\beta)\frac{\partial w(x_i-x_j,h)}{\partial x_i^\alpha}\frac{m_j}{\rho_j}\right]\\ \omega_i^{\alpha\beta}&=\frac{1}{2}\left[\sum_{j\in M_i}(v_j^\beta-v_i^\beta)\frac{\partial w(x_i-x_j,h)}{\partial x_i^\alpha}\frac{m_j}{\rho_j}-\sum_{j\in Mi}(v_j^\alpha-v_i^\alpha)\frac{\partial w(x_i-x_j,h)}{\partial x_i^\beta}\frac{m_j}{\rho_j}\right]\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

采用应力修正的方法来计算混和硬化的弹塑性材料在 t_{n+1} 时刻的应力 σ^{n+1}:

1) 先运用式(15)~式(19)按弹性变形的本构关系求得 t_{n+1} 时刻的应力试探值 σ^*.

2) 检查屈服条件:

$$\phi=\frac{3}{2}(S_{\alpha\beta}^*-a_{\alpha\beta}^n)(S_{\alpha\beta}^*-a_{\alpha\beta}^n)-(\sigma_y^n)^2=0\tag{20}$$

其中,$S_{\alpha\beta}^*=\sigma_{\alpha\beta}^*-\frac{1}{3}\sigma_{\kappa\kappa}^*$;$\sigma_y^n=\sigma_0+\beta E_p\varepsilon_{\mathrm{eff}}^{pn}$ 为 t_n 时刻的屈服极限,$\varepsilon_{\mathrm{eff}}^{pn}$ 为 t_n 时刻的有效塑性应变,如果 $\phi\leqslant 0$,则表示仍处在弹性变形区,此时 $S_{\alpha\beta}^{n+1}=S_{\alpha\beta}^*$ 即应力试探值正确,转4)求 $\sigma_{\alpha\beta}^{n+1}$.

3) 如果 $\phi>0$,则表示材料处于塑性加载,此时应修正有效塑性应变:

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}}^{pn+1}=\varepsilon_{\mathrm{eff}}^{pn}+\Delta\varepsilon_{\mathrm{eff}}^{p}=\varepsilon_{\mathrm{eff}}^{pn}+\frac{\sqrt{\frac{3}{2}(S_{\alpha\beta}^*-a_{\alpha\beta}^n)(S_{\alpha\beta}^*-a_{\alpha\beta}^n)}-\sigma_y^n}{3\mu+E_p}\tag{21}$$

其中,E_p 为塑性硬化模量;μ 为剪切模量.缩小偏应力,使之按比例回到新的屈服面上:

$$S_{\alpha\beta}^{n+1}=S_{\alpha\beta}^*-\frac{3\mu\Delta\varepsilon_{\mathrm{eff}}^{p}(S_{\alpha\beta}^*-a_{\alpha\beta}^n)}{\sqrt{\frac{3}{2}(S_{\alpha\beta}^*-a_{\alpha\beta}^n)(S_{\alpha\beta}^*-a_{\alpha\beta}^n)}}\tag{22}$$

并修正屈服面的中心位置:

$$a_{\alpha\beta}^{n+1}=a_{\alpha\beta}^*+\frac{(1-\beta)E_p\Delta\varepsilon_{\mathrm{eff}}^{p}(S_{\alpha\beta}^*-a_{\alpha\beta}^n)}{\sqrt{\frac{3}{2}(S_{\alpha\beta}^*-a_{\alpha\beta}^n)(S_{\alpha\beta}^*-a_{\alpha\beta}^n)}}$$

4) 计算 t_{n+1} 时刻的应力 $\sigma_{\alpha\beta}^{n+1}$:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{n+1}=S_{\alpha\beta}^{n+1}-p^{n+1}\delta_{\alpha\beta}\tag{23}$$

其中,$\delta_{\alpha\beta}$ 为 δ 函数;$p^{n+1}=-k\frac{V^{n+1}-V_0}{V^{n+1}}$,$k$ 为体积模量,V^{n+1} 和 V_0 分别为 t_{n+1} 时刻和初始时刻的粒子体积.

1.4 搜索半径的计算

根据文献[1]以及文献[3]的工作,核函数中

的 h 由下式决定:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\dot{h}}{h}&=\frac{1}{d}\nabla\cdot v=-\frac{1}{\mathrm{d}\rho}\dot{\rho}\\ \dot{h}_i&=\frac{h_i}{d}\sum_{j\in M_i}(v_j^\beta-v_i^\beta)\frac{\partial w}{\partial x_i^\beta}\frac{m_j}{\rho_j}\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

用 $w(x_i-x_j,h_{ij})$代替 $w(x_i-x_j,h)$,其中 $h_{ij}=\frac{1}{2}(h_i+h_j)$.

1.5　时间的迭代

采用蛙跳法进行时间的迭代.

1) 对于 t_n 时刻,计算迭代时间间隔 δt^n. 根据 Courant-Friedrichs-Lewy 条件:

$$\delta t^n=\min\left[0.3h_i\Big/\left(\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_i}}+s_i\right)\right]$$

其中,λ,μ 为拉梅常数和剪切模量;s_i 为粒子 i 的速度.

2) 由当前的粒子坐标 x_i,速度 v_i,密度 ρ_i(每个粒子的质量在整个计算过程中不变),h_i 以及屈服极限 σ_y 等物理量按照 1.3 节中的公式求出这一时刻的应力 σ_i.

3) 由式(11)、式(13)、式(24)算出这一时刻的 $\dot{\rho}_i,\dot{v}_i,\dot{h}_i$.

4) 计算 t_{n+1}时刻的物理量:

$$\rho_i^{n+1}=\rho_i^n+\dot{\rho}_i\delta t^n\tag{25}$$

$$v_i^{n+1/2}=v_i^{n-1/2}+\frac{1}{2}(\delta t^n+\delta t^{n-1})\dot{v}_i\tag{26}$$

$$h_i^{n+1}=h_i^n+\dot{h}_i\delta t^n\tag{27}$$

$$x_i^{n+1}=x_i^n+v_i^{n+1/2}\delta t^n\tag{28}$$

1.6　守恒光滑法的滤波修正

传统的 SPH 法凭借其本身的无网格特性,在解决计算力学中的大变形问题上较有限元有一定的优势,但是它是一种新的数值方法,尤其是运用到能承受偏应力和拉应力的固体介质中还存在诸多问题,例如拉力不稳定性. 文献[4]最先发现了 SPH 的拉力不稳定性,对此还进行了 Von Neumann 的稳定性分析,建立了通过应力和核函数二阶导数的乘积来判断稳定性的判据. 后来文献[5]提出了多维的守恒光滑公式:

$$\overline{U}_i=U_i+\alpha_{\mathrm{cs}}\left[\left(\sum_{j\neq i}m_jU_jw_{ij}\Big/\rho_j\right)\Big/\left(\sum_{j\neq i}m_jw_{ij}\Big/\rho_j\right)-U_i\right]\qquad 0<\alpha_{\mathrm{cs}}\leqslant 0.5\tag{29}$$

其中,U_i 可以为粒子 i 点的速度、位移、密度等;α_{cs}为守恒光滑系数. 运用式(29)进行 v_i 的修正,即在式(26)后运用此式. 这种方法能较好地消除拉力不稳定性.

2　算　例

本文计算了截面正方形边长为 6.4×10^{-3} m,高 32×10^{-3} m 的弹塑性杆,以速度 227 m/s与刚性面碰撞,杆的材料参数:杨氏模量 $E=117\times10^9$ N/m^2,泊松比 $\nu=0.35$,初始屈服极限 $\sigma_y^0=400\times10^6$ N/m^2,剪切硬化模量 $E_{\mathrm{T}}=100\times10^6$ N/m^2,$\rho=8\,930$ kg/m^3. 粒子均匀分布,初始影响域半径为粒子初始间距,终止时间为 8×10^{-5} s,滤波修正系数为 0.13～0.15. 图 3～图 5 为本文开发的 SPH 程序和有限元 ANSYS LS-DYNA计算的在 8×10^{-5} s时的结果.

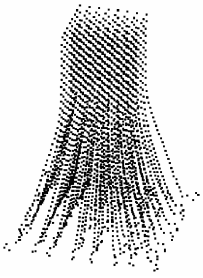

图 3　SPH 计算结果,粒子间距为 0.8×10^{-3} m

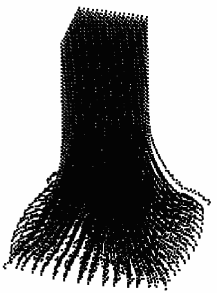

图 4　SPH 计算结果,粒子间距 0.4×10^{-3} m

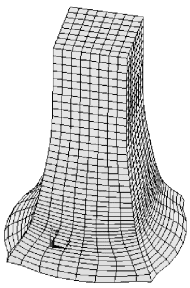

图 5　ANSYS LS-DYNA,网格大小 0.8×10^{-3} m

从以上结果可以看出,对于同样的节点间距,在完备阶数相同的情况下,SPH 的结果较有限元结果精度差,这是因为 SPH 方法中节点(粒子)的影响域要大于有限元方法中节点的影响域(一般是有限元方法的 2 倍). 近年来,国外专家提出了

各种SPH的修正方法，通过提高它的完备阶数来提高SPH的近似精度，如Krongauz-Belytschko修正[6-7]，Randles-Libersky修正[8]，运用最小二乘法插值的MLS-approximation[9-10]以及运用Taylor序列展开的RKPM[11-12]和CSPH[13-14]，前2种方法可以达到一阶完备，后3种可以达到任意阶，但是这些方法均出现矩阵求逆或者解方程组，不但同样增加了计算量，而且对于大变形计算很容易矩阵奇异导致计算终止，有的甚至不能满足全局动量方程的离散守恒导致程序发散. 本文发现通过加密粒子，SPH同样可以得到较高精度的解，既简单，又能发挥SPH计算大变形的优势.

3 结 论

本文从基本的SPH近似出发，修正了模拟固体力学中的大变形弹塑性碰撞的SPH方法，在边界处采用修正的边界条件，弹塑性分析过程中采用增量理论计算应力，由于传统SPH的拉力不稳定导致计算程序易发散，本文采用守恒光滑法进行了滤波修正. 最后给出了杆的弹塑性碰撞的算例，并与有限元计算的结果进行了比较. 由于传统的SPH节点的影响域大，而且在粒子不均匀分布下只完备到零阶，精度差，相同粒子间距的SPH与有限元的结果有一定差距，但是研究发现，通过增加粒子，同样可以提高SPH的精度，而且还保持了其简单性和计算大变形的特性.

参考文献（References）

[1] Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1977, 181: 375-389

[2] Libersky L D, Petschek A G. Smoothed particle hydrodynamics with strength of materials[C]//Trease H, Fritts J, Crowley W. Proceedings, The Next Free Lagrange Conf. NY: Springer-Verlag, 1991, 395: 248-257

[3] 张锁春. 光滑质点流体动力学(SPH)方法(综述)[J]. 计算物理, 1996, 13(4): 385-397
Zhang Suochun. Smoothed particle hydrodynamics (SPH) method (a review)[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 1996, 13(4): 385-397 (in Chinese)

[4] Swegle J W, Hicks D L, Attaway S W. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis[J]. J Comput Phys, 1995, 116: 123-134

[5] Randles P W, Liberskey L D. Smoothed particle hydrodynamics: some recently improvements and applications[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1996, 139: 375-408

[6] Johnson G R, Beissel S R. Normalized smoothing functions for SPH impact computations[J]. Int J Numer Methods Engrg, 1996, 39: S. 2725-S. 2741

[7] Krongauz Y, Belytschko T. Consistent pseudo derivatives in meshless methods[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1997, 146: 371-386

[8] Randles P W, Libersky L D. Recent improvements in SPH modeling of hypervelocity impact[J]. Int J Impact Engrg, 1997, 20: 525-532

[9] GaryA Dilts. Moving-least-squares-particle hydrodynamics - I: consistency and stability[J]. Int J Numer Methods Engrg, 1999, 44: 1115-1155

[10] Gary A Dilts. Moving least-squares particle hydrodynamics II: conservation and boundaries[J]. Int J Numer Methods Engrg, 2000, 48: 1503-1524

[11] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods[J]. Int J Numer Methods Engrg, 1995, 20: 1081-1106

[12] Chen J S, Pan C, Wu C T, et al. Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1996, 139: 195-227

[13] Chen J K, Beraun J E, Jih C J. Completeness of corrective smoothed particle method for linear elastodynamics[J]. Computational Mechanics, 1999, 24: 273-285

[14] Chen J K, Beraun J E. A generalized smoothed particle hydrodynamics method for nonlinear dynamic problems[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2000, 19: 225-239

[15] 刘鹏，刘更，刘天祥，等. 光滑粒子动力学方法及其应用[J]. 机械科学与技术, 2005, 24(9): 1126-1130
Liu Peng, Liu Geng, Liu Tianxiang, et al. On smoothed particle hydrodynamics method and its application[J]. Mechanical Science and Technology, 2005, 24(9): 1126-1130 (in Chinese)

（责任编辑：刘登敏）