层流平板摩擦阻力的数值计算

周 丹 禹建军 阎 超

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100083)

摘 要: 为提高层流摩擦阻力数值计算的精度,采用数值求解 N-S 方程的方法,对层流平板摩擦阻力进行了计算.计算中采用 4 种先进上风格式,同时配合以 14 种不同的壁面法向网格分布和 5 种常用限制器,并将计算结果与布拉修斯解进行对比.结果表明,van Leer 的 FVS(Flux Vector Splitting)格式数值耗散大,对网格分布和限制器敏感,不适合用于摩擦阻力计算.限制器和计算格式的粘性分辨率越高,摩擦阻力的计算精度越高.在计算量允许的情况下,可以减小壁面法向第 1 层网格高度,以提高计算精度,但应同时兼顾网格长宽比.对于摩擦阻力计算,边界层内应至少布置 4 个网格点.

关 键 词: 布拉修斯解; 层流; 平板; 边界层; 摩擦阻力

中图分类号: V 211.3

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2007)06-0663-05

Numerical calculation of laminar flat plate skin friction

Zhou Dan Yu Jianjun Yan Chao

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: In order to calculate laminar skin friction more accurately, the laminar flat-plate skin friction was calculated by solving the N-S equations. For solving the N-S equations, 4 advanced upwind schemes, 14 different grid distributions and 5 limiters were employed. All the results were compared with Blasius solution. The results show that the van Lee′s FVS(flux vector splitting)scheme has considerable numerical dissipation, it is also sensitive to grid quality and limiter, so it is unsuitable for friction calculation. The solution is more accurate with a higher limiter and scheme viscous resolution. The calculation precision strongly depends on the height of the first level mesh. Considering both of the calculation ability and the grid aspect ratio, the height of the first level grid can be reduced to improve precision. For skin friction calculation, there must be no less than 4 grid points in the boundary layer.

Key words: Blasius solution; laminar flow; flat-plate; boundary layers; skin friction

随着 CFD(Computational Fluid Dynamics)技术在航空航天领域的广泛使用,阻力计算的精度越来越为人们所重视.但由于种种原因,其结果一直难以令人满意.航空航天飞行器的阻力一般分为压差阻力和摩擦阻力两类.经过近 30 年的发展,CFD 对于压差阻力的计算已经很精确,但对于摩擦阻力,数值计算还存在一些尚待解决的问题,其中一个很重要的问题就是边界层的模拟.由于决定摩擦阻力的切应力正比于(假定粘性系数不变)壁面处的速度梯度,因此边界层模拟成功与否直接影响着摩擦阻力的计算精度.本文就是研究在层流条件下,不同计算格式和不同网格分布对摩擦阻力计算精度的影响.由于目前国际上广泛使用的先进上风格式几乎都是使用限制器来提高计算精度,因此不同的限制器对摩擦阻力计算精度的影响也是本文的研究内容之一.

本文的计算模型采用层流平板,主要是考虑到平板的几何形状简单,生成网格质量好;理论上

收稿日期: 2006-08-17

作者简介: 周 丹(1982—),女,辽宁铁岭人,硕士生,merengue_dan@163.com.

有布拉修斯解(Blasius solution)用于对比;该模型计算量小,适于进行大量数值实验,可以对网格分布、计算格式和限制器的不同配合进行分析比较.在本文中,计算格式采用 AUSM(Advection Upstream Splitting Method)族中的 AUSM+格式和 AUSMDV 格式、van Leer 的 FVS 格式(本文简称为 van Leer 格式)和 Roe 的 FDS(Flux Difference Splitting)格式(本文简称为 Roe 格式).限制器主要考虑不采用限制器、Minmod 限制器、van Albada 限制器、van Leer 平均限制器、Superbee 限制器以及混和限制器.计算网格的影响主要是考虑近壁面法向网格的疏密程度.

1 控制方程

控制方程为二维可压缩 N-S 方程,不考虑体积力和外部热源,笛卡尔坐标系下的二维非定常可压缩 N-S 方程为[1]

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial y}=0$$

其中,$\boldsymbol{Q}$ 为守恒变矢量;$\boldsymbol{f}$,$\boldsymbol{g}$ 分别为 x,y 坐标方向的通量.时间离散采用 LU-SGS(Lower Upper Symmetric Gauss-Seidal)方法.在物面上采用无滑移,绝热边界条件.远场边界由基于 Riemann 不变量的一维特征线无反射边界条件给出.

2 计算结果及分析

计算模型如图 1,网格数为 106(流向)×50(法向).为保证网格质量,对前后缘网格进行了加密处理,远场取 4 倍平板长,平板前后沿流向分别布置 25 个网格点.取平板前缘为坐标原点.考虑到布拉修斯解为不可压缩层流解,自由来流条件为

$$Ma_\infty=0.3$$
$$T_\infty=288.15\ \mathrm{K}$$
$$Re_L=1.0\times10^5$$
$$\alpha=0^\circ$$

其中,Ma_∞ 为来流马赫数;T_∞ 为来流温度;Re_L 为以平板长度为特征长度的来流雷诺数;α 为攻角.

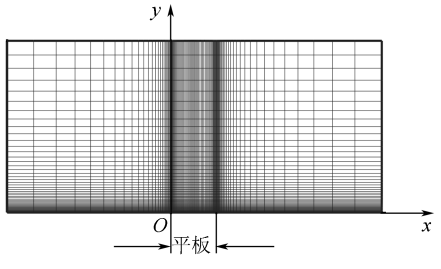


图 1 二维平板计算网格

在计算中令网格拓扑结构、网格总数、流向网格分布均保持不变,通过改变壁面法向第 1 层网格高度来改变壁面法向网格的分布情况.设板长为 $L=1$ m,取平板前缘为坐标原点,壁面法向第 1 层网格高度为 $\bar{y}$,不同计算状态下的 $\bar{y}/L$ 见表 1.

表 1 法向第 1 层网格高度

状态	1	2	3	4	5
$\bar{y}/L$	10^{-5}	5×10^{-5}	10^{-4}	5×10^{-4}	10^{-3}
状态	6	7	8	9	10
$\bar{y}/L$	2×10^{-3}	3×10^{-3}	4×10^{-3}	5×10^{-3}	6×10^{-3}
状态	11	12	13	14	
$\bar{y}/L$	7×10^{-3}	8×10^{-3}	9×10^{-3}	10^{-2}	

由布拉修斯解得到层流平板平均摩擦阻力系数为

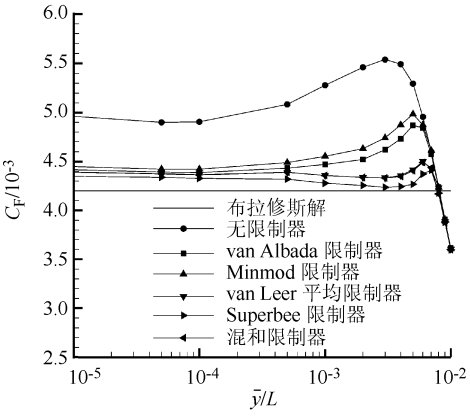
$$C_F=\frac{1.328}{\sqrt{Re_L}}=4.2\times10^{-3}$$

针对不同的法向网格分布,采用 AUSMDV,AUSM+,Roe 和 van Leer 4 种格式,对每种格式分别采用 van Albada 限制器,Minmod 限制器,van Leer 平均限制器,Superbe 限制器,混合限制器以及不采用限制器进行计算.C_F 计算结果如图 2.$\bar{y}=10^{-3}L$ 时,平板各站位的速度型如图 3~图 5,图中横轴为 $\eta=y\sqrt{Re_x}/x$,纵轴为 u/u_0.x,y 分别为平板某站位上一点的 x,y 坐标,u 为这点的 x 向速度,u_0 为来流速度,$Re_x=\sqrt{u_0x/\nu}$,ν 为来流运动粘性系数.

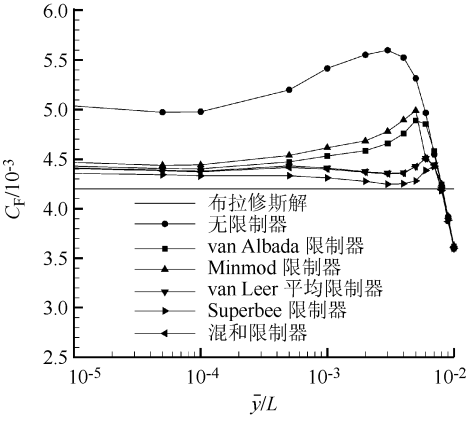
2.1 格式对计算精度的影响

如图 2,AUSMDV 格式、AUSM+格式和 Roe 格式在各限制器下的 C_F 计算值在 4×10^{-3}~5×10^{-3} 之间.van Leer 格式在各限制器下的 C_F 值在 3×10^{-3}~12×10^{-3} 之间.可见 van Leer 格式的计算结果受限制器的影响很大.当 $\bar{y}\leqslant5\times10^{-4}L$ 时,AUSMDV 格式、AUSM+格式和 Roe 格式的摩擦阻力计算值随 $\bar{y}$ 的增加缓慢变化,而 van Leer 格式的摩擦阻力计算值随 $\bar{y}$ 显著变化,说明即使在 $\bar{y}$ 很小时,van Leer 格式对网格仍然很敏感.结合图 3~图 5,采用限制器后,AUSMDV 格式、AUSM+格式和 Roe 格式速度型拟合情况均比不采用限制器有所改善,但采用不同限制器对三者的计算精度影响不大.而对于 van Leer 格式,在不采用限制器时,速度型几乎是一条水平线,采用限制器后,情况才有所改善.采用 vanAlbada 限制器时,由于其压缩性不强,速度型仍与布拉修斯解偏差很大,直至采用压缩性很强的 Superbee 限制器,van Leer 格式的速度型才同

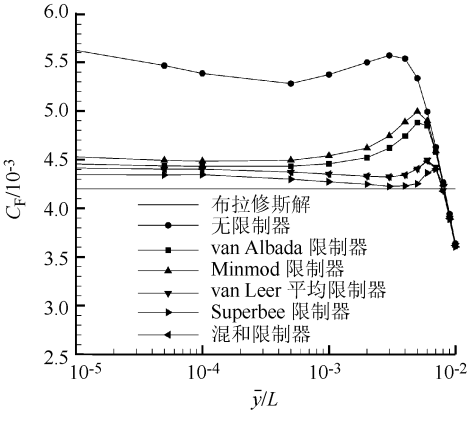
布拉修斯解拟合的很好.这与图 2d 同样证明了 van Leer 格式的计算精度受限制器的影响很大.由以上的分析可知,



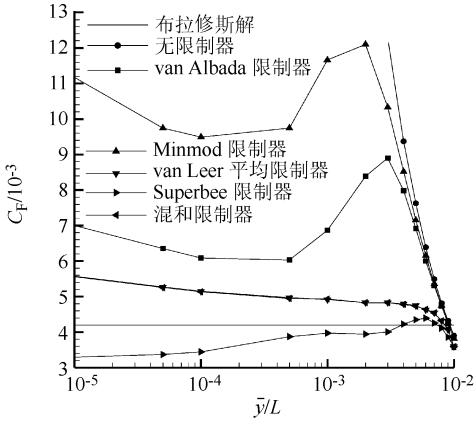
a　AUSMDV 格式



b　AUSM＋格式



c　Roe 格式



d　van Leer 格式

图 2　C_F 计算结果

van Leer格式本身的数值耗散大，对网格分布和限制器敏感，不适于模拟边界层流动.故下文的分析中将不再考虑van Leer格式.

在$\bar{y}=3\times10^{-3}L$左右，摩擦阻力计算有最佳值.其中Roe格式的计算精度最高，数值解与布拉修斯解的误差仅为0.59%，其次是AUSMDV格式(0.89%)和AUSM+格式(1.12%).可见Roe格式的粘性分辨率最高，其次是AUSMDV格式和AUSM+格式.这是因为Roe格式属于Godunov类求解器，是典型的线性化Riemann解，对线性波(如接触间断)有天然的高分辨率.因粘性作用区剪切层类似于接触间断，因而使用Roe格式能得到最精确的结果.AUSM格式兼有Roe格式的间断高分辨率和van Leer格式的计算效率，而且克服了二者的缺点，它的数值耗散小，具有激波与接触间断的高分辨率，无需熵修正.其中AUSMDV格式是对AUSM+格式的进一步改进，具有更好的捕捉静态接触间断和静态激波的能力.由以上对计算结果和格式性能的分析，可知格式的粘性分辨率越高，摩擦阻力的计算结果越精确.

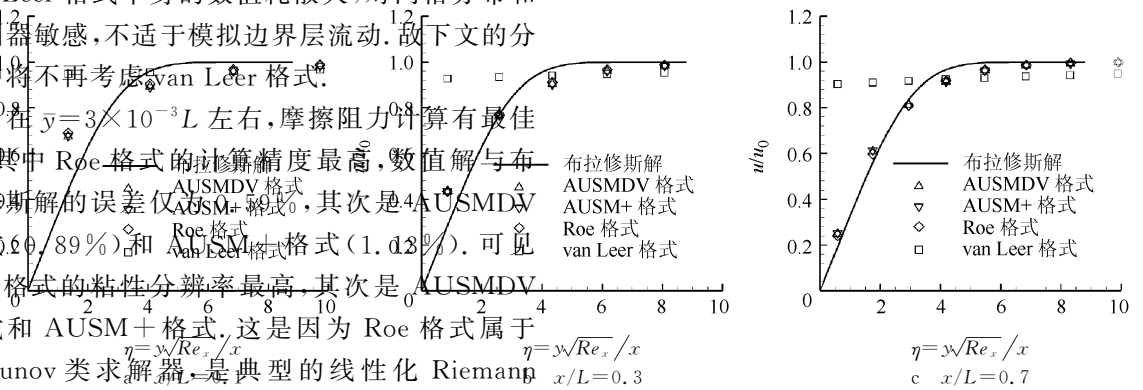


图3 采用Roe限制器时各站位速度型

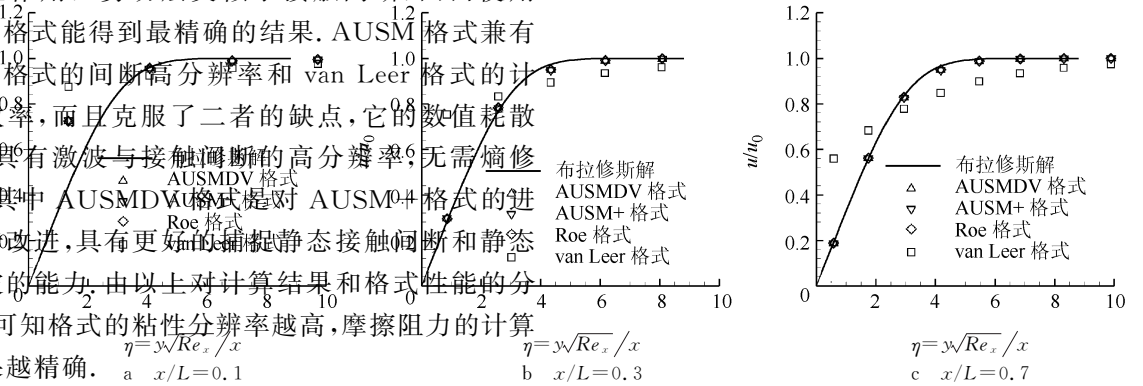


图4 采用van Albada限制器时各站位速度型

2.2 限制器对计算精度的影响

由图2可以看出，无论在哪种$\bar{y}$下，采用何种计算格式，不采用限制器的摩擦阻力计算精度明显低于采用限制器的摩擦阻力计算精度，而且各限制器对计算结果的影响是相似的.本文摩擦阻力计算精度由高到低的排序依次是Superbee限制器、混和限制器、AUSM+格式平均限制器、van Albada限制器、Minmod限制器、不采用限制器.Superbee限制器属于压缩型限制器，耗散最小，分辨率最高，但稳定性和收敛性最差.本文的算例流动机理简单，但包含大梯度剪切流动，故采用Superbee限制器精度最高.混和限制器是对密度使用Surperbee限制器，其余变量使用van Leer平均限制器.图2中混和限制器和van Leer平均限制器的曲线几乎完全重合在一起，但混和限制器的精度稍高于van Leer平均限器.van Albada限制器的分辨率和稳定性均居中.Minmod限制器是耗散型限制器，稳定性和收敛性最好，但它的耗散性大，不适合本文的算例.不采用限制器的耗散性最大，计算结果与理论值偏离很大，不能用来模拟边界层流动.可见在模拟边界层类的剪切流动时，限制器的分辨率越高，耗散性越小，计算结果越精确.

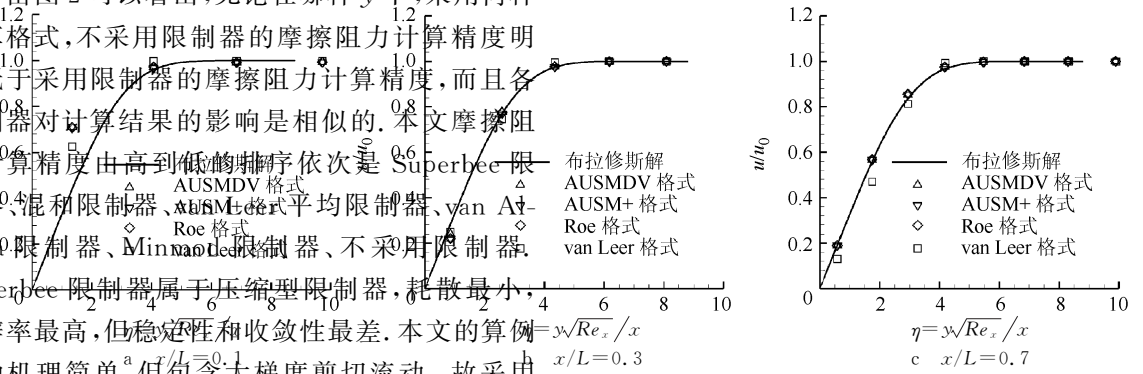


图5 采用Superbee限制器时各站位速度型

2.3 网格对计算精度的影响

由于一阶精度不适于摩擦阻力计算，故下面的分析中仅考虑考虑二阶精度.由图2可知：对于AUSM+格式、AUSMDV格式和Roe格式，摩擦阻力的计算值随$\bar{y}$的变化趋势是一致的.当$\bar{y}\leqslant5\times10^{-4}L$时，这3种上风格式的摩擦阻力计算结果随$\bar{y}$的增加缓慢变化，摩擦阻力虽然不够精确但却很稳定，而且不同格式、不同限制器的计算结果也相差无几，说明计算格式和限制器在此范围内对计算结果的影响不大.这是因为此时$\bar{y}$已经足够小，由计算格式和限制器产生的耗散误差很小.当$\bar{y}>5\times10^{-4}L$时，格式和限制器在计算中的影响作用逐渐凸显出来.但对同一种格式，采用不同的限制器，摩擦阻力的变化趋势也有所不同.在此之后，随着$\bar{y}$的增加，各曲线又呈现出同一

趋势:摩擦阻力的计算结果达到峰值后迅速下降,直至完全偏离理论值,这时边界层内分布的网格点数过少,或根本就没有网格点,引起严重的数值耗散,掩盖了真实的物理现象,以致不能正确描述边界层内的粘性流动.

本文中,摩擦阻力的最佳值不是在 $\bar{y}$ 最小时得到的,而是在 $\bar{y}=3\times10^{-3}L$ 左右得到.表面看来这似乎与文献[2]的观点(文献[2]认为,边界层内法向网格点数目越多,计算的 C_F 越精确)相悖.其实则不然,由于本文的算例中,不改变流向网格分布,仅考虑法向网格分布的影响.当 $\bar{y}=10^{-5}L$时,平板上第 1 层网格长细比最大达到了 2 500.由于壁面第 1 层网格长细比过大所产生的数值刚性影响了解的精度.如上所述,在计算摩擦阻力时,不能一味的减小 $\bar{y}$ 值,还应兼顾网格的长细比,再配合以合适的计算格式和限制器,才能得到最佳解.

图 3～图 5 为 $\bar{y}=3\times10^{-3}L$ 时平板各站位的速度型.图中平板前缘($x/L=0.1$)处 3 种格式计算的速度型均比布拉修斯解"饱满".平板后缘处($x/L=0.7$)3 种格式计算的速度型与布拉修斯解拟和的情况均比前缘处好.原因是前缘处的边界层较薄,边界层内网格点数少,使数值耗散增大,对速度型有一个抹平的作用.可以认为,摩擦阻力的计算误差主要来自平板前缘.若 $u/u_0=99\%$处为边界层外缘,则 $x/L=0.1$,$x/L=0.3$,$x/L=0.7$ 各站位边界层内的网格点数依次为 3,4,5,可知若想准确模拟边界层内的剪切流动,则边界层内应至少布置 4 个网格点.

3　结　论

壁面边界层的模拟精度是摩擦阻力计算精确与否的重要因素之一.本文通过改变壁面法向网格分布、选取不同的计算格式和限制器对层流平板摩擦阻力进行计算、对比和分析,得出了一些有意义的结论:

1) 摩擦阻力的计算精度与格式的粘性分辨率有关,计算格式的粘性分辨率越高,摩擦阻力的计算精度越高.在低马赫数时,Roe 格式的计算精度最高,其次是 AUSMDV 格式和 AUSM＋格式,然后是 van Leer 格式,其中 AUSMDV 格式和 AUSM＋格式的计算精度相当.van Leer 的 FVS 格式对网格分布和限制器敏感,格式本身的耗散性使其粘性分辨率不高,从而不易得到正确的边界层速度型,不适合用于模拟边界层流动.

2) 摩擦阻力的计算精度与限制器的耗散性有关,限制器的耗散性越小,摩擦阻力的计算精度越高.本文中,平板边界层的流动机理简单,包含大梯度剪切流动,所以采用稳定性和收敛性较差,但分辨率高的压缩型限制器——Superbee 限制器得到的计算结果最好.但在实际的工程应用中,应该综合考虑限制器的稳定性和收敛性问题,在稳定性和收敛性允许的前提条件下,尽量选用分辨高、耗散性小的限制器.

3) 摩擦阻力的计算精度跟壁面网格分布情况有关.从应用的角度出发,壁面法向第 1 层网格高度应适宜.网格太稀则边界层内网格点数不够,无法准确捕捉粘性效应;另外也不能只减小 $\bar{y}$ 值,还应兼顾网格的长细比.从本文的算例中可以看出,若想准确模拟边界层内的剪切流动,则边界层内应至少布置 4 个网格点.

参考文献(References)

[1] 阎超.计算流体力学方法及应用[M].北京:北京航空航天大学出版社,2006:17－18
Yan Chao. Methods and applications of computational fluid dynamics [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2006:17－18(in Chinese)

[2] Jameson Antony, Martinelli Luigi. Mesh refinement and modeling errors in flow simulation [R]. AIAA-96-2050, 1996

[3] 阎超.涡流数值模拟中的计算格式粘性分辨率探讨[J].计算物理,2001,18(4):308－312
Yan Chao. Investigations into the viscous resolution of CFD schemes for vortex flow simulation [J]. Computational Physics, 2001, 18(4):308－312(in Chinese)

[4] 阎超,张智,张立新,等.上风格式的若干性能分析[J].空气动力学学报,2003,21(3):336－341
Yan Chao, Zhang Zhi, Zhang Lixin, et al. Characteristic analysis of the upwind scheme [J]. Acta Aerodynamic Sinica, 2003, 21(3):336－341(in Chinese)

[5] Jameson Antony. Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence in transonic and hypersonic flows [R]. AIAA-93-3359, 1993

[6] Zingg D W. Comparison of several spatial discretizations for the N-S equations [R]. AIAA-99-3260, 1999

[7] Tatsumi S. Design implementation, and validation of flux limited schemes for the solution of the compressible N-S equations [R]. AIAA-94-0647, 1994

(责任编辑:刘登敏)