飞行器姿态角解算的全角度双欧法

李跃军 阎 超

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院，北京 100083)

摘 要：为了实现飞行器超机动飞行情况下姿态角的连续解算，将传统双欧法进行了改进.通过引入判别函数使得数值模拟过程中正反欧拉角能一一对应，克服了欧拉方程的奇异性，消除了传统双欧法须限定俯仰为[－90°，＋90°]的限制，从而将正反欧拉角取值范围扩展到了全角度，实现了飞行器的任意姿态角连续解算.采用改进的双欧法数值模拟了飞机斤斗飞行动作，时间积分采用了变步长龙格库塔方法，结果表明该方法简单有效，能得到连续的高精度解.

关 键 词：双欧法；全角度；姿态角解算；欧拉角

中图分类号：V 448.22

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2007)05-0505-04

Improvement of dual-Euler method for full scale Eulerian angles solution of aircraft

Li Yuejun Yan Chao

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: To overcome the shortcoming of the original dual-Euler method, i.e., it presumes that the range of pitching angle was limited to [－90°，＋90°] and it can't be used for continuous solution of super-maneuvering flight when the pitching angle was beyond this limited range, improvement was made to solve Eulerian angles for full scale continuously by introducing a discriminant function that can obtain the only one corresponding solution for both positive Eulerian system and negative Eulerian system. To validate the new method, a simple model of super-maneuvering was numerically simulated with the improved Dual-Euler method, and *R-K* algorithm with variant time steps was used for time integration. Results showed that the numerical solution was in perferct agreement with the theoretical solution.

Key words: dual-Euler method; full scale; solving of attitude; Eulerian angles

在飞行力学研究中，飞行器姿态通常采用欧拉角来描述.欧拉角是通过求解欧拉方程得到的，但是欧拉方程存在奇异性，当俯仰角为＋π/2 时，滚转角和偏航角无法定值，同时临近该奇点的区域求解误差过大，导致求解失真.为了避免这个问题，最初人们采用限制俯仰角取值范围的方法，严重限制了大机动飞行的姿态模拟.为了克服这个问题，文献[1]提出了双欧法，该方法的思想是用两套不同的欧拉角描述同一个姿态，在不同的角度范围内采用不同的欧拉角描述，利用正反欧拉角奇异性的倒挂关系，以二者解算准确的精华区进行分区接替运算.这种方法彻底克服了传统单欧法的奇异性，同时获得了很高的计算精度.该方法受到了广泛关注[2－3]，并在实践中得到了应用[1].但是传统双欧法限定俯仰角的取值范围为[－π/2，＋π/2]，视超出该范围的姿态角为“奇观值”，尽管在过去大多数情况下，该取值范围可以满足要求，但是随着航空航天技术的发展，超机动飞行动作开始在飞行器使用中出现，例如著名的SU27 战斗机“普加乔夫机动”(也称为“眼镜蛇机

收稿日期：2006-06-12

作者简介：李跃军(1979－)，男，湖南益阳人，博士生，liyuejun@ase.buaa.edu.cn.

动”),其俯仰角就越过90°达到110°,实现了名副其实的“倒飞”.另外,现代舰载防空导弹的垂直发射系统也超过了传统双欧法的俯仰角取值范围.传统双欧法的正反欧角度转换方法使得该方法无法连续模拟越过±90°俯仰角的超机动飞行,这对于超出±90°的连续数值积分模拟是不利的.

本文对传统双欧法的正反欧角度转换方法进行了改进,使得欧拉角在数值模拟过程中能始终保持连续性,从而能适应全角度的姿态角数值求解.

1 正反欧拉方程定义

飞行力学研究中,飞行器的姿态是用一个坐标系相对另一坐标系的欧拉角来描述的.任何两个坐标系之间的关系可以通过若干次基元旋转来实现.最典型的情况是通过3个基元旋转来实现,可能的旋转顺序总共有12种,即:x-y-z,x-z-y,y-z-x,y-x-z,z-x-y,z-y-x,x-y-x,x-z-x,y-z-y,y-x-y,z-x-z,z-y-z.当两个坐标系位置关系一定时,不同的旋转顺序就对应不同的欧拉角.

本文采用两种不同的欧拉角系统,分别对应于y-z-x和y-x-z两种旋转方式,所产生的欧拉角为φ,θ,γ和$\varphi_r,\theta_r,\gamma_r$.其坐标旋转关系如图1所示.

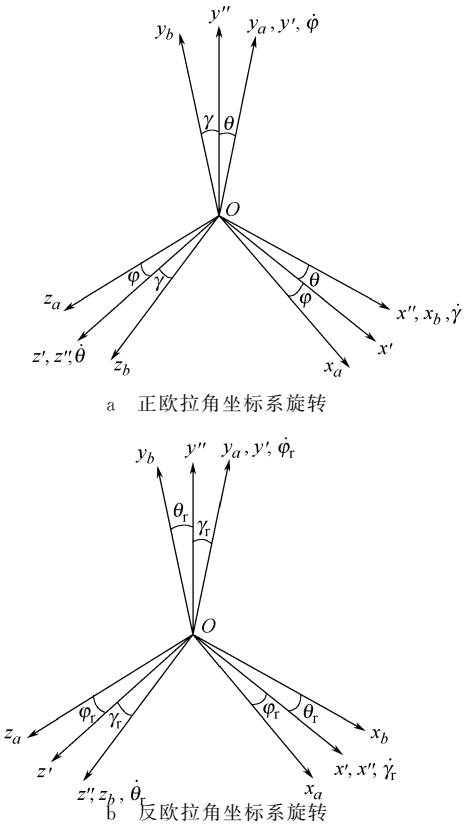


图1 正反欧拉角系统坐标系旋转示意图

设绕坐标轴x,y,z旋转α角的基元矩阵分别为$\boldsymbol{L}_x(\alpha)$、$\boldsymbol{L}_y(\alpha)$、$\boldsymbol{L}_z(\alpha)$,对正欧拉系统,坐标系依次绕$y_a(y')$,$z'(z'')$,$x''(x_b)$轴进行了3个基元旋转,从坐标系a到b的转换矩阵为

$$\boldsymbol{L}_x(\gamma)\boldsymbol{L}_z(\theta)\boldsymbol{L}_y(\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta & -\cos\theta\sin\varphi\\ \sin\gamma\sin\varphi-\cos\gamma\sin\theta\cos\varphi & \cos\gamma\cos\theta & \sin\gamma\cos\varphi+\cos\gamma\sin\theta\sin\varphi\\ \cos\gamma\sin\varphi+\sin\gamma\sin\theta\cos\varphi & -\sin\gamma\cos\theta & \cos\gamma\cos\varphi-\sin\gamma\sin\theta\sin\varphi\end{bmatrix} \tag{1}$$

对反欧拉系统,坐标系依次绕$y_a(y')$,$x'(x'')$,$z''(z_b)$轴进行了3个基元旋转,从坐标系a到b的转换矩阵为

$$\boldsymbol{L}_z(\theta_r)\boldsymbol{L}_x(\gamma_r)\boldsymbol{L}_y(\varphi_r)=\begin{bmatrix}\cos\theta_r\cos\varphi_r+\sin\theta_r\sin\gamma_r\sin\varphi_r & \sin\theta_r\cos\gamma_r & \sin\theta_r\sin\gamma_r\cos\varphi_r-\cos\theta_r\sin\varphi_r\\ \cos\theta_r\sin\gamma_r\sin\varphi_r-\sin\theta_r\cos\varphi_r & \cos\theta_r\cos\gamma_r & \cos\theta_r\sin\gamma_r\cos\varphi_r+\sin\theta_r\sin\varphi_r\\ \cos\gamma_r\sin\varphi_r & -\sin\gamma_r & \cos\gamma_r\cos\varphi_r\end{bmatrix} \tag{2}$$

显然,由于二者表示的是同一个转换,所以有

$$\boldsymbol{L}_x(\gamma)\boldsymbol{L}_z(\theta)\boldsymbol{L}_y(\varphi)=\boldsymbol{L}_z(\theta_r)\boldsymbol{L}_x(\gamma_r)\boldsymbol{L}_y(\varphi_r)$$

飞行器角速度在本体坐标系中有分量ω_{x_b},ω_{y_b},ω_{z_b},而飞行器角速度是由姿态角变化率引起的,可得:对正欧拉系统,角速度和姿态角的关系为

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\gamma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\omega_{y_b}\cos\gamma-\omega_{z_b}\sin\gamma)/\cos\theta\\ \omega_{y_b}\sin\gamma+\omega_{z_b}\cos\gamma\\ \omega_{x_b}-\dot{\varphi}\sin\theta\end{bmatrix} \tag{3}$$

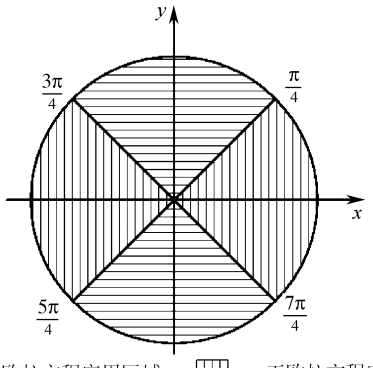
即正欧拉方程;

对反欧拉系统,角速度和姿态角的关系为

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_r\\ \dot{\theta}_r\\ \dot{\gamma}_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\omega_{x_b}\sin\theta_r+\omega_{y_b}\cos\theta_r)/\cos\gamma_r\\ \omega_{z_b}+\dot{\varphi}_r\sin\gamma_r\\ \omega_{x_b}\cos\theta_r-\omega_{y_b}\sin\theta_r\end{bmatrix} \tag{4}$$

即反欧拉方程.

正反欧拉方程的使用范围由θ确定,如图2所示.



▤ — 反欧拉方程应用区域；▥ — 正欧拉方程应用区域.

图 2　俯仰角 θ 划分的正反欧拉方程应用区域

2　全角度正反欧拉角转换关系

设转换矩阵

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}_x(\gamma)\boldsymbol{L}_z(\theta)\boldsymbol{L}_y(\varphi)=$$

$$\boldsymbol{L}_z(\theta_{\mathrm{r}})\boldsymbol{L}_x(\gamma_{\mathrm{r}})\boldsymbol{L}_y(\varphi_{\mathrm{r}})=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}\tag{5}$$

各正欧拉角和反欧拉角的取值范围均为$[0,2\pi]$. 正反欧拉角均从转换矩阵元素计算得到.

在传统双欧法中，通过限定俯仰角值为“直观值”，即不越过$\pm 90°$，以确保能取得确定的正(反)欧拉角值，否则一组正欧拉角存在多组反欧拉角与之对应，同样，一组反欧拉角也存在多组正欧拉角与之对应，导致无法取舍. 但是这种限定取值范围的方法使得滚转角发生了突变，例如对于斤斗飞行动作，传统双欧法对俯仰角越过 90°的飞行姿态统一定义为小于 90°，但此时滚转角却突变了 180°，即等效于飞行器瞬间翻滚了 180°，而实际飞行中并未发生这种情况.

本文通过定义一个简单的函数$\Delta(\cdot,\cdot)$来进行判断取舍，使得正反欧拉角能一一对应，从而实现全角度解算. 具体的转换算法如下.

1) 由正欧拉角求反欧拉角

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}_x(\gamma)\boldsymbol{L}_z(\theta)\boldsymbol{L}_y(\varphi)$，即各元素由正欧拉角求得，反欧拉角的计算方法如下：

$$\gamma_{\mathrm{r},k}=k\pi+(-1)^k\arcsin(-A_{32})+\{[1+(-1)^k]/2\}\{[1-\mathrm{sign}(-A_{32})]/2\}2\pi=k\pi+(-1)^k\arcsin(-A_{32})+\{[1+(-1)^k]/2\}[1-\mathrm{sign}(-A_{32})]\pi\tag{6}$$

$$\varphi_{\mathrm{r},k}=2\pi\{[1-\mathrm{sign}(A_{31}/\cos\gamma_{\mathrm{r}}]/2\}+(-1)^{\frac{1}{2}[1-\mathrm{sign}(A_{31}/\cos\gamma_{\mathrm{r}}]}\arccos(A_{33}/\cos\gamma_{\mathrm{r}})=[1-\mathrm{sign}(A_{31}/\cos\gamma_{\mathrm{r}})]\pi+(-1)^{\frac{1}{2}[1-\mathrm{sign}(A_{31}/\cos\gamma_{\mathrm{r}})]}\arccos(A_{33}/\cos\gamma_{\mathrm{r}})\tag{7}$$

$$\theta_{\mathrm{r},k}=2\pi\{[1-\mathrm{sign}(A_{12}/\cos\gamma_{\mathrm{r}})]/2\}+(-1)^{\frac{1}{2}[1-\mathrm{sign}(A_{12}/\cos\gamma_{\mathrm{r}})]}\arccos(A_{22}/\cos\gamma_{\mathrm{r}})=[1-\mathrm{sign}(A_{12}/\cos\gamma_{\mathrm{r}})]\pi+(-1)^{\frac{1}{2}[1-\mathrm{sign}(A_{12}/\cos\gamma_{\mathrm{r}})]}\arccos(A_{22}/\cos\gamma_{\mathrm{r}})\tag{8}$$

以上各式中 k 取 0 或 1，对应两组结果.

2) 由反欧拉角求正欧拉角

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}_z(\theta_{\mathrm{r}})\boldsymbol{L}_x(\gamma_{\mathrm{r}})\boldsymbol{L}_y(\varphi_{\mathrm{r}})$，即各元素由反欧拉角求得，正欧拉角的计算方法如下：

$$\theta_k=k\pi+(-1)^k\arcsin(A_{12})+\{[1+(-1)^k]/2\}\{[1-\mathrm{sign}(A_{12})]/2\}2\pi=k\pi+(-1)^k\arcsin(A_{12})+\{[1+(-1)^k]/2\}[1-\mathrm{sign}(A_{12})]\pi\tag{9}$$

$$\varphi_k=2\pi\{[1-\mathrm{sign}(-A_{13}/\cos\theta)]/2\}+(-1)^{\frac{1}{2}[1-\mathrm{sign}(-A_{13}/\cos\theta)]}\arccos(A_{11}/\cos\theta)=[1-\mathrm{sign}(-A_{13}/\cos\theta)]\pi+(-1)^{\frac{1}{2}[1-\mathrm{sign}(-A_{13}/\cos\theta]}\arccos(A_{11}/\cos\theta)\tag{10}$$

$$\gamma_k=2\pi\{[1-\mathrm{sign}(-A_{32}/\cos\theta)]/2\}+(-1)^{\frac{1}{2}[1-\mathrm{sign}(-A_{32}/\cos\theta)]}\arccos(A_{22}/\cos\theta)=[1-\mathrm{sign}(-A_{32}/\cos\theta)]\pi+(-1)^{\frac{1}{2}[1-\mathrm{sign}(-A_{32}/\cos\theta)]}\arccos(A_{22}/\cos\theta)\tag{11}$$

以上各式中 k 取 0 或 1，对应两组结果.

3) 正反欧拉角的取舍

定义函数 $\Delta(a_1,a_2)=\min(|a_1-a_2|,2\pi-|a_1-a_2|)$，$a_1,a_2\in[0,2\pi]$. 在微分方程积分求解的过程中，设某时刻各欧拉角分别为 $\varphi^n,\theta^n,\gamma^n,\varphi_{\mathrm{r}}^n,\theta_{\mathrm{r}}^n,\gamma_{\mathrm{r}}^n$，则下一时刻设为 $\varphi_k^{n+1},\theta_k^{n+1},\gamma_k^{n+1},\varphi_{\mathrm{r},k}^{n+1},\theta_{\mathrm{r},k}^{n+1},\gamma_{\mathrm{r},k}^{n+1}$，令

$$D_k=\sqrt{\Delta^2(\varphi^n,\varphi_k^{n+1})+\Delta^2(\theta^n,\theta_k^{n+1})+\Delta^2(\gamma^n,\gamma_k^{n+1})}\tag{12}$$

$$D_{\mathrm{r},k}=\sqrt{\Delta^2(\varphi_{\mathrm{r}}^n,\varphi_{\mathrm{r},k}^{n+1})+\Delta^2(\theta_{\mathrm{r}}^n,\theta_{\mathrm{r},k}^{n+1})+\Delta^2(\gamma_{\mathrm{r}}^n,\gamma_{\mathrm{r},k}^{n+1})}\tag{13}$$

k 取 0 或 1.

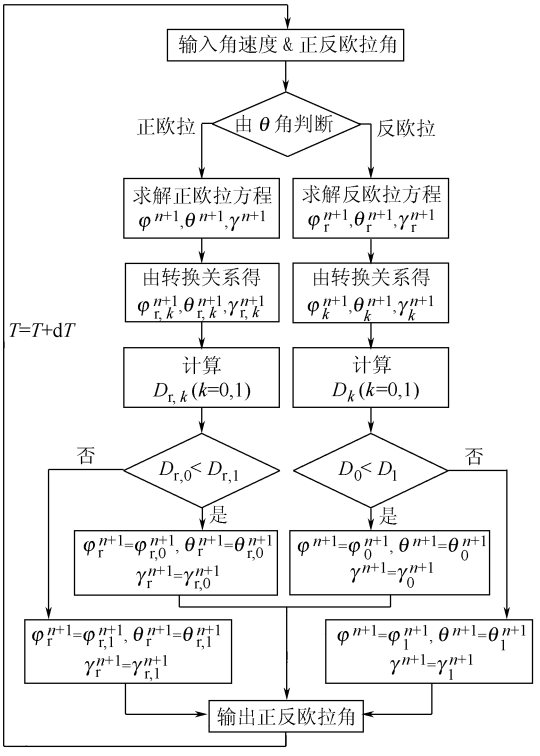
① 由正欧拉角求反欧拉角时，如果 $D_{\mathrm{r},0}<D_{\mathrm{r},1}$，则有：$\varphi_{\mathrm{r}}^{n+1}=\varphi_{\mathrm{r},0}^{n+1},\theta_{\mathrm{r}}^{n+1}=\theta_{\mathrm{r},0}^{n+1},\gamma_{\mathrm{r}}^{n+1}=\gamma_{\mathrm{r},0}^{n+1}$；

如果 $D_{\mathrm{r},0}>D_{\mathrm{r},1}$，则有：$\varphi_{\mathrm{r}}^{n+1}=\varphi_{\mathrm{r},1}^{n+1},\theta_{\mathrm{r}}^{n+1}=\theta_{\mathrm{r},1}^{n+1},\gamma_{\mathrm{r}}^{n+1}=\gamma_{\mathrm{r},1}^{n+1}$.

② 由反欧拉角求正欧拉角时，如果 $D_0<D_1$，则有" $\varphi^{n+1}=\varphi_0^{n+1},\theta^{n+1}=\theta_0^{n+1},\gamma^{n+1}=\gamma_0^{n+1}$；

如果 $D_0>D_1$，则有：$\varphi^{n+1}=\varphi_1^{n+1},\theta^{n+1}=\theta_1^{n+1},\gamma^{n+1}=\gamma_1^{n+1}$.

一个时间步的运算过程如图 3 所示.



T—时间；dT—时间步长.

图 3 全角度双欧法运算流程

3 算例及分析

为了考察全角度双欧法的全角度解算特性，本文对如下模型进行了仿真：

$$\left.\begin{aligned}\omega_x=\omega_y=0\\ \omega_z=\pi\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

在该模型信号输入下，飞行器将作斤斗飞行动作. 采用变步长龙格库塔方法作时间积分，时间步长取为 0.001 s，总时间为 10 s. 图 4 为传统双欧法、全角度双欧法与理论值比较图. 从图 4 可以看出，全角度双欧法和理论值完全吻合，传统双欧法在 ±90°处改变变化趋势，此时滚转角突变 180°，等效于飞行器突然翻滚 180°，这种现象在实际飞行中是不存在的，因此不利于超越 ±90°大机动情况下的实时连续数值模拟，如著名的“普加乔夫机动”等. 图 5 为数值模拟过程中正反欧拉方程交替求解状态变化历程图，其中纵坐标值为 +1 表示求解的方程为正欧拉方程，−1 表示求解的方程为反欧拉方程，不难看出该图与图 2 是符合的.

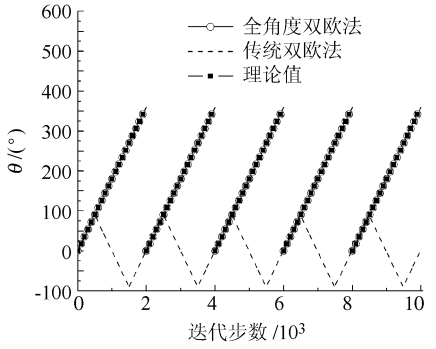


图 4 传统双欧法、全角度双欧法仿真结果与理论值比较

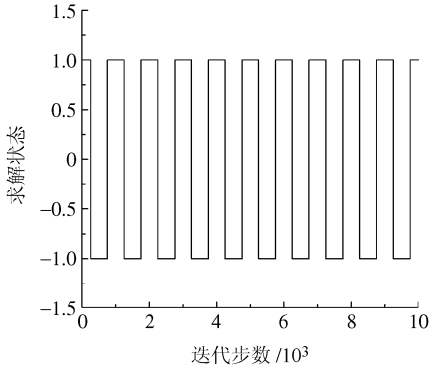


图 5 计算过程中正反欧拉方程交替求解状态变化历程

4 结 论

本文对传统双欧法的正反欧拉角度转换方法进行了改进，使得欧拉角在数值模拟过程中能始终保持连续性，从而能适应全角度的姿态角数值求解. 计算实践表明，改良的双欧法同时具有传统双欧法的高精度和四元数法优良的全角度模拟能力，却没有四元数法的误差积累缺陷，且该方法简单易行，可以在已有双欧法代码基础上修改得到，具有较高的应用价值.

参考文献（References）

[1] 黄雪樵. 克服欧拉方程奇异性的双欧法[J]. 飞行力学，1994，12(4)：28－37
Huang Xueqiao. A method for overcoming the singularity of the Euler equation[J]. Flight Dynamics，1994，12(4)：28－37(in Chinese)

[2] 陈廷楠，张登成. 双欧法与四元数法的应用比较[J]. 飞行力学，1996，14(4)：59－64
Chen Tingnan，Zhang Dengcheng. Application comparison of dual Euler method and quaternion method[J]. Flight Dynamics，1996，14(4)：59－64(in Chinese)

[3] 熊志斌，刘喜斌. 克服欧拉方程奇异性的方法研究[J]. 岳阳师范学院学报(自然科学版)，2000，13(4)：60－62
Xiong Zhibin，Liu Xibin. Research on methods for overcoming the singularity of the Euler equation[J]. Journal of Yueyang Normal University(Natural Sciences)，2000，13(4)：60－62(in Chinese)

[4] 肖业伦. 航空航天器运动的建模[M]. 北京：北京航空航天大学出版社，2003
Xiao Yelun. Model building for the motion of aircraft and spacecraft[M]. Beijing：Beijing University of Aeronautics and Astronatics Press，2003(in Chinese)

（责任编辑：刘登敏）