# 基于遗传算法的最优 Lambert 双脉冲转移

陈 统 徐世杰

(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100083)

**摘 要**: 研究了初始位置和转移时间不固定的 Lambert 双脉冲轨道转移的数值解,用三维图和截面图直观显示了初始位置、转移时间和速度增量的关系,并说明了其在实际工程任务中的应用价值. 基于数值解,提出了 Lambert 双脉冲轨道转移的优化问题. 目标是找到最优初始位置和转移时间,使燃料和时间的加权和最小. 给出了遗传算法求解该优化问题的设计步骤. 该算法应用于 2 个算例:①平面圆轨道的燃料最优转移,并将遗传算法和 Hohmann 转移的结果进行了比较;②椭圆轨道、初始位置有约束的燃料和时间最优转移. 结果说明了遗传算法寻找最优转移解是准确有效的.

**关 键 词**: 轨道转移; 最优化; 遗传算法

**中图分类号**: V 448.234

**文献标识码**: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2007)03-0273-05

## Optimal Lambert two-impulse transfer using genetic algorithm

Chen Tong Xu Shijie

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract**: Numerical solutions of Lambert two-impulse orbital transfer with unfixed initial position and transfer time were studied. The velocity increment versus initial position and transfer time were showed in the 3-dimensional plots or 2-dimensional sections, which are valuable for the practical designing tasks. Based on the numerical solutions, the optimization problem of Lambert two-impulse orbital transfer was then proposed and solved by genetic algorithm(GA). The goal was to find the optimal initial position and transfer time to minimize the weighted sum of fuel and time. This method was tested in two examples: one was the fuel optimal transfer between coplanar circular orbits, in which the computing result based on GA was compared with that of Hohmann transfer. Another was the fuel and time optimal transfer between elliptical orbits of restricted initial position. Results indicate that GA is valid to solve the optimal transfer problems.

**Key words**: orbital transfer; optimization; genetic algorithms

为了实现空间轨道转移、交会等任务,航天器需要进行远程轨道大机动. 在轨道大机动阶段,燃料消耗、机动时间都是需要考虑的问题,而且初始位置必须位于某些可测区域内.

对于二体问题,在已经确定机动的初始位置、目标位置和机动时间的情况下,可以用 Lambert 方程求解转移轨道,然后根据初始速度和目标速度计算机动所需的速度增量,简称 Lambert 法. 文献[1－2]讨论了用 Lambert 法求解固定位置、固定时间的双脉冲轨道转移问题,并用图解法获得了多圈 Lambert 转移的燃料最优解. 实际上,还可以通过优化转移的初始位置和转移时间来获得燃料和时间的综合最优解. 这是一个数学规划问题. 鉴于无法获得 Lambert 方程的解析解,遗传算法是获得此类优化问题全局最优解的最有效的方法之一. 文献[3－4]已用遗传算法尝试计算了最优双脉冲转移解,但仍存在仅考虑圆轨道间的转移、固定初始位置的优化、没有考虑时间因素

**收稿日期**: 2006-04-18

**作者简介**: 陈 统(1980－),男,浙江绍兴人,博士生, chet1980@163.com.

等缺陷.

本文给出了任意轨道之间,初始位置和转移时间不固定的单圈 Lambert 双脉冲轨道转移的数值解,用直观的三维图和截面图说明了初始位置、转移时间和速度增量的关系,并以初始位置、转移时间为优化设计变量,用遗传算法求解了燃料和时间最优解,最后用实例说明该算法的优越性.

## 1 Lambert 方程

对于仅考虑为单圈转移轨道的情况,Lambert 方程如下[5]:

$$\mu^{1/2}\Delta t = a^{3/2}[(\alpha-\sin\alpha)-(\beta-\sin\beta)] \quad (1a)$$

$$\mu^{1/2}\Delta t = a^{3/2}[2\pi-(\alpha-\sin\alpha)-(\beta-\sin\beta)] \quad (1b)$$

$$\mu^{1/2}\Delta t = a^{3/2}[(\alpha-\sin\alpha)+(\beta-\sin\beta)] \quad (1c)$$

$$\mu^{1/2}\Delta t = a^{3/2}[2\pi-(\alpha-\sin\alpha)+(\beta-\sin\beta)] \quad (1d)$$

式中,$\Delta t$ 是转移时间;$a$ 为转移轨道半长轴;$\mu$ 为地球引力常数;$\alpha$ 和 $\beta$ 可以用式(2)求得,它们的取值范围均为$[0,\pi]$.

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\alpha/2 &= (r_1+r_2+s)/4a\\ \sin^2\beta/2 &= (r_1+r_2-s)/4a\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

式中,$r_1$ 为初始点地心距;$r_2$ 为目标点地心距;$s$ 为初始点到目标点的距离.式(1a)~式(1d)描述了 Lambert 方程的 4 种情况:

1) 式(1a)对应转移角 $0<\Delta\theta\leqslant\pi$($\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$,见图 1),$\Delta t\leqslant\Delta t_m$;

2) 式(1b)对应 $0<\Delta\theta\leqslant\pi$,$\Delta t\geqslant\Delta t_m$;

3) 式(1c)对应 $\pi\leqslant\Delta\theta<2\pi$,$\Delta t\leqslant\Delta t_m$;

4) 式(1d)对应 $\pi\leqslant\Delta\theta<2\pi$,$\Delta t\geqslant\Delta t_m$.

$\Delta t_m$ 对应转移轨道为最小能量椭圆时的转移时间,其具体定义参见文献[5].其物理意义是对于相同的初始位置和目标位置,可以求出 2 类转移时间不同的转移轨道,$\Delta t\leqslant\Delta t_m$ 对应短路径转移轨道,$\Delta t\geqslant\Delta t_m$ 对应长路径转移轨道.

图 1 描绘了平面转移问题.已知待命轨道(下标"1")和目标轨道(下标"2")的半长轴 $a_i$、偏心率 $e_i$、近地点幅角 $\omega_i$、真近点角 $\theta_i$($i=1,2$),可以求出 $r_1$,$r_2$ 和 $s$,以及初始点速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和目标点速度 $\boldsymbol{v}_2$,若再选定 $\Delta t$,就可以根据 Lambert 方程求得转移轨道,从而计算出转移轨道上初始点速度 $\boldsymbol{v}_{t1}$ 和目标点速度 $\boldsymbol{v}_{t2}$.因此轨道转移所需要的 2 次速度脉冲为

$$\left.\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{v}_{t1}-\boldsymbol{v}_1\\ \Delta\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_{t2}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

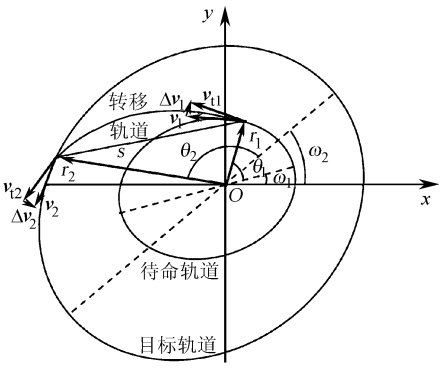


图 1 双脉冲转移

所需总速度增量为

$$\Delta v = |\boldsymbol{v}_1| + |\boldsymbol{v}_2| \quad (4)$$

工程应用中,初始点要求在待命轨道上某些范围内选择,转移时间也需根据任务要求选择.因此 $\theta_1$ 和 $\Delta t$ 是变量,它们对应着不同的速度增量 $\Delta v$,可以将这个关系写成 $\Delta v=F(\theta_1,\Delta t)$,Lambert 方程就是这个关系中的重要部分.

## 2 Lambert 方程的数值解

根据上述计算过程,以 $\theta_1$ 和 $\Delta t$ 作为自变量,可以求得 Lambert 转移所需速度脉冲的数值解,并可在 $\theta_1$-$\Delta t$-$\Delta v$ 的三维空间作图解分析.下面考虑一个具体的例子.待命轨道和目标轨道要素如表 1 所示.

**表 1 待命轨道和目标轨道要素**

| 轨道 | $a_i$/km | $e_i$ | $\omega_i$/(°) | $\theta_i$/(°) |
|---|---|---|---|---|
| 待命轨道 | 8000 | 0.0010 | 30 | |
| 目标轨道 | 42166.261 | 0.0003 | 70 | 45 |

图 2 给出了 $\theta_1$-$\Delta t$-$\Delta v$ 的三维曲面图,其中 $\theta_1$ 取值范围为$[-145°,-45°]$,取值间隔为 2°;$\Delta t$ 取值范围为[1 h,15 h],取值间隔为 100 s.可以看出 $\Delta v$ 存在一个最小值.工程应用中,主要对图 1 的截面图进行分析.

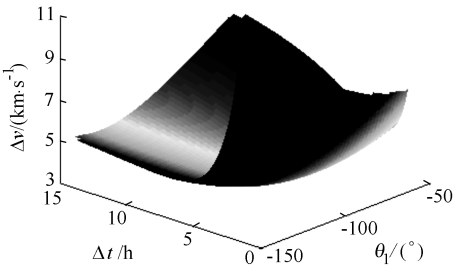


图 2 $\theta_1$-$\Delta t$-$\Delta v$ 三维曲面图

图 3 为所有 $\Delta v\leqslant 4$ km/s 的点在 $\theta_1$-$\Delta t$ 平面的投影图,它表示了 $\Delta v\leqslant 4$ km/s 时($\theta_1$,$\Delta t$)的所有可行解集合.如果在具体任务中,转移的速度增

量限制在 4 km/s 以下,就可以从图 3 中选择合适的 $\theta_1$ 和 $\Delta t$.

图 4 为 $\theta_1=-100°$时的截面图,表示了 $\Delta t$-$\Delta v$ 的对应关系.如果具体任务中已经确定了初始位置,就可以用此类图来选择合适的转移时间和所需的速度增量.图 5 为 $\Delta t=5$ h 的截面图,表示了 $\Delta\theta_1$-$\Delta v$ 的对应关系,可以用此类图来选择转移时间确定时的初始位置,使其位于任务的可测区域内,而且也使所需的速度增量较小.

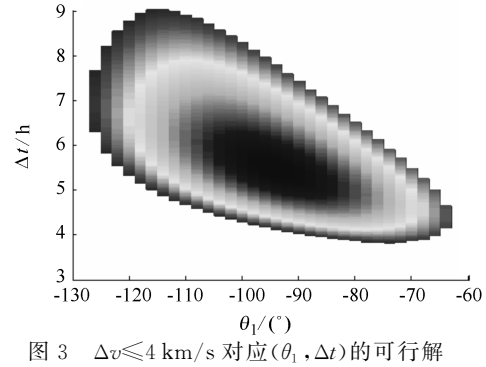

图 3　$\Delta v\leqslant 4$ km/s 对应$(\theta_1,\Delta t)$的可行解

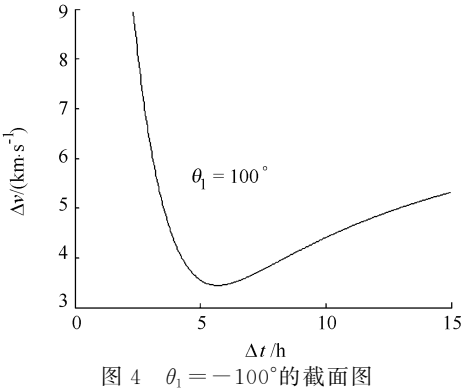

图 4　$\theta_1=-100°$的截面图

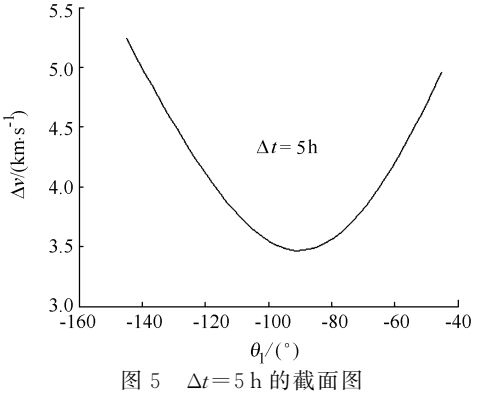

图 5　$\Delta t=5$ h 的截面图

## 3　遗传算法

第 2 节用连续等间隔取点获得数值解的方法绘出了 $\theta_1$-$\Delta t$-$\Delta v$ 三维曲面图,直观显示了它们的关系,工程应用中可以用来进行转移轨道的初步选择.但由于计算量有限,取值间隔不可能达到无限小,因此无法得到一个精确的全局最优解,使用数学规划的方法,能快速精确的获得全局最优解.

该最优化问题描述为:给定约束方程 $\Delta v=F(\theta_1,\Delta t)$,寻找最优解$(\theta_1,\Delta t)$,以使下列指标函数 $J$ 最小:

$$J=k_v\Delta v+k_t\Delta t \tag{5}$$

式中,$k_v$ 和 $k_t$ 分别为速度增量和转移时间的加权因子,均为大于 0 的常数,这是燃料和时间的综合最优;若 $k_v=0$,$k_t=1$ 则为时间最优;若 $k_v=1$,$k_t=0$则为燃料最优.

另外,如果初始位置必须位于任务的可测区域$[\theta_1^-,\theta_1^+]$内,则需要附加约束条件:

$$\theta_1^-\leqslant\theta_1\leqslant\theta_1^+ \tag{6}$$

该最优化问题的关键是算子 $F$ 的计算,由于其中包括 Lambert 方程的求解,因此无法得到 $F$ 的解析表达式.传统的优化方法(如梯度法)往往需要对解析式求导,对于复杂的优化问题会陷入局部最优点.上世纪 60～70 年代发展起来的遗传算法 GA(Genetic Algorithm)正好克服了传统优化算法的这些缺点.遗传算法是一种基于自然界中种族进化优胜劣汰的原则设计的优化算法,对于寻找复杂问题的全局最优解非常有效[6].

遗传算法求解此优化问题的设计步骤如下:

1) 编码:采用二进制编码,按 $\theta_1$ 精确到0.1°,$\Delta t$ 精确到 1 s 分别确定各自的二进制串长,然后组合成一个二进制个体;

2) 初始种群:随机产生 100 个二进制个体;

3) 计算适应度:适应度函数选为

$$f=1/(k_v\Delta v+k_t\Delta t) \tag{7}$$

4) 选择:轮盘赌选择法,产生随机数 $P$,如果满足:

$$\sum_{n=1}^{i-1}f(n)\Big/\sum_{n=1}^{100}f(n)\leqslant P<\sum_{n=1}^{i}f(n)\Big/\sum_{n=1}^{100}f(n) \tag{8}$$

则第 $i$ 个个体被选中;

5) 交叉:由于一个二进制个体中包括了 $\theta_1$ 部分和 $\Delta t$ 部分,因此 2 个部分分别进行单点交叉,如图 6 所示.

交叉概率 $P_c$ 进行自适应调整:

$$P_c=\begin{cases}P_{c1}-\dfrac{(P_{c1}-P_{c2})(f'-f_{avg})}{f_{max}-f_{avg}} & f'\geqslant f_{avg}\\ P_{c1} & f'<f_{avg}\end{cases} \tag{9}$$

式中,$P_{c1}=0.9$;$P_{c2}=0.6$;$f_{avg}$为每代群体的平均适应度值;$f_{max}$为群体中最大的适应度值;$f'$为要交叉的 2 个个体中较大的适应度值;

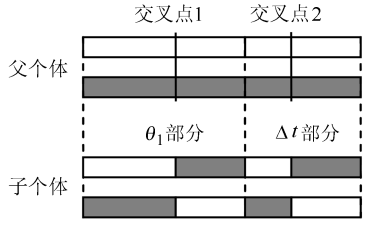


图6 二进制交叉

6）变异：二进制变异，每个个体的每个位都判断是否发生变异，若是，则翻转该位，变异概率 $P_m$ 进行自适应调整：

$$P_m=\begin{cases}P_{m1}-\dfrac{(P_{m1}-P_{m2})(f_{max}-f)}{f_{max}-f_{avg}} & f\geqslant f_{avg}\\ P_{m1} & f<f_{avg}\end{cases} \tag{10}$$

式中，$P_{m1}=0.1$；$P_{m2}=0.001$；$f$ 为要变异个体的适应度值. 另外为了保证收敛性，每一代新种群中都保存上一代种群中的最优个体.

## 4 应用遗传算法的寻优算例

**算例1** 待命轨道和目标轨道均为圆轨道，轨道要素见表2，对初始位置无限制，$k_v=1$，$k_t=0$，求燃料最优解.

**表2 算例1待命轨道和目标轨道要素**

| 轨 道 | $a_i$/km | $e_i$ | 纬度幅角 $u$/(°) |
|---|---|---|---|
| 待命轨道 | 8000 | 0 | |
| 目标轨道 | 42166.261 | 0 | 115 |

待命轨道和目标轨道均为圆轨道，且轨道半径之比小于15.58，因此Hohmann二脉冲转移即为燃料最优，与遗传算法求得的最优解作比较，见表3. 结果显示，遗传算法求得的最优解和Hohmann转移解偏差很小，说明遗传算法准确有效.

**表3 算例1的计算结果**

| 算 法 | $\min\Delta v$/(m·s$^{-1}$) | $\theta_1$/(°) | $\Delta t$/s |
|---|---|---|---|
| 遗传算法 | 3431.53 | 294.95 | 19758 |
| Hohmann转移 | 3431.53 | 295.00 | 19768 |

图7显示了历代适应度情况，从最大适应度值变化曲线可以发现遗传算法求解最优解的收敛速度快.

**算例2** 待命轨道和目标轨道均为椭圆轨道，轨道要素见表4，$\theta_1$ 范围为[15°，65°]，$k_v$，$k_t$ 分别取3组不同的值进行优化.

**表4 算例2待命轨道和目标轨道要素**

| 轨 道 | $a_i$/km | $e_i$ | $\omega_i$/(°) | $\theta_i$/(°) |
|---|---|---|---|---|
| 待命轨道 | 7000 | 0.05 | 0 | |
| 目标轨道 | 28000 | 0.10 | 85 | 115 |

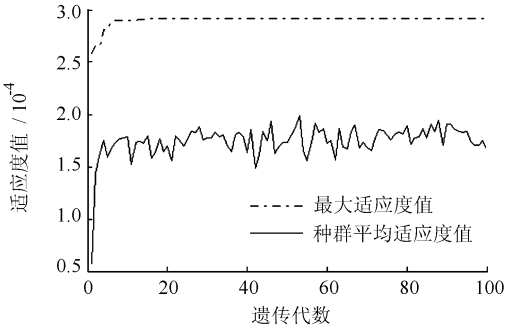


图7 算例1的历代适应度曲线

表5为算例2的计算结果. 根据 $k_v$，$k_t$ 不同，第1组为燃料最优解，第2组为燃料和时间综合最优解，第3组为时间最优解. 图8中3条转移轨道分别对应3组不同的 $k_v$，$k_t$ 值. 从计算结果看，随着 $k_v$ 减小、$k_t$ 增大，最优解的速度增量增大、转移时间减小，转移轨道的偏心率增大. 这是合理的，因为最优性能指标中的时间比重越来越大，而速度增量比重越来越小.

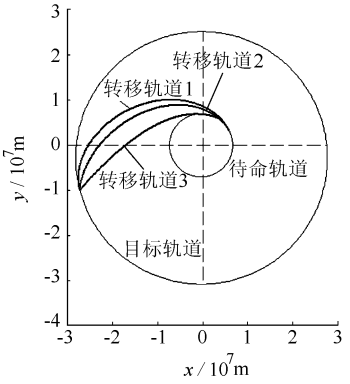


图8 3组不同性能指标下的最优转移轨道

**表5 算例2计算结果**

| 不同加权因子 | | $\Delta v$/(m·s$^{-1}$) | $\theta_1$/(°) | $\Delta t$/s |
|---|---|---|---|---|
| 第1组 | $k_v=1$<br>$k_t=0$ | 3312.41 | 27.5 | 10862 |
| 第2组 | $k_v=1$<br>$k_t=0.3$ | 3584.40 | 43.4 | 8802 |
| 第3组 | $k_v=0$<br>$k_t=1$ | 7812.98 | 63.5 | 4876 |

需要指出的是，对于纯粹的Lambert双脉冲转移问题，时间最优解是没有意义的，当时间极小时，转移轨道的半长轴趋于无穷大，接近于抛物线轨道. 本文在解Lambert方程时，限制转移轨道的半长轴不超过 $10^7$ km，文中的时间最优解也是在这个限制范围内求得的.

## 5 结 束 语

对于初始位置和转移时间不固定的Lambert双脉冲轨道转移问题，通过数值方法绘制了初始

位置、转移时间和速度增量的三维图及其截面图,它们对实际工程任务中进行转移轨道的初步设计具有一定的价值.基于数值解,提出了 Lambert 最优双脉冲轨道转移问题,并给出了遗传算法求解此优化问题的设计步骤.遗传算法可以用来求解任意轨道、初始位置有约束的燃料和时间综合最优解.算例说明了该算法是准确有效的.

## 参考文献(References)


[1] Shen Haijun, Tsiotras P. Optimal two-impulse rendezvous using multiple-revolution Lambert solutions[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2003,26(1):50－61

[2] 韩潮,谢华伟.空间交会中多圈 Lambert 变轨算法研究[J].空间科学技术,2004,5:9－14
Han Chao, Xie Huawei. Research on algorithm of loopy Lambert transfer in space rendezvous[J]. Chinese Space Science and Technology, 2004,5:9－14(in Chinese)

[3] Spencer D B, Kim Y H. Optimal spacecraft rendezvous using genetic algorithms[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2002, 39(6): 859－865

[4] 刘鲁华,汤国建.基于进化算法的空间交会最优轨道机动[C]//全国第十一届空间及运动体控制技术学术会议.云南:中国宇航学会, 2004: 166－170
Liu Luhua, Tang Guojian. Optimal orbital maneuvers of space rendezvous using genetic algorithms[C]// Proceedings of the 11th Chinese Biennial Academic Conference on Space/Motion-Bodies Control Technology. Yunnan: Chinese Society of Astronautics, 2004: 166－170(in Chinese)

[5] 郗晓宁,王威,高玉东.近地航天器轨道基础[M].长沙:国防科技大学出版社,2003: 219－235
Xi Xiaoning, Wang Wei, Gao Yudong. Fundamentals of near-earth spacecraft orbit[M]. Changsha: University of National Defence Technology Press, 2003: 219－235(in Chinese)

[6] 王小平,曹立明.遗传算法——理论、应用与软件实现[M].西安:西安交通大学出版社,2002
Wang Xiaoping, Cao Liming. Genetic algorithms——theory, application and software realization[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2002(in Chinese)


(责任编辑:张　嵘)

(上接第 272 页)

## 4　结　论

使用 Euler 方程作为流场求解器,将其与 Powell 优化方法相结合,对 Wing B 机翼的气动外形进行了数值模拟校核.选取升阻比为目标函数,以机翼沿展向翼剖面的厚度和翼梢剖面的扭角增量作为优化控制量,对 Wing B 机翼作了数值优化设计计算,得到了在亚音速时升阻比大的机翼厚度以及机翼扭角的优化分布.算例比较证明了特定的厚度与扭角分布可以使机翼气动性能获得明显的增益,本文的方法是成功和可行的.为将三维机翼厚度与扭角的气动外形优化设计研究应用于工程实践,选用 N-S 方程作为流场解的主控方程是必要的,此工作正在进行中.

## 参考文献(References)


[1] Van der Velden A, Forbrich D. Use of aerodynamic shape optimization for a large transonic aircraft[R]. AIAA 97-2274,1997

[2] Van der Velden A, Von Reith D. Multi-disciplinary SCT design at deutsche aerospace airbus[C]//Proceedings of the 7th European Aerospace Conference, Toulouse:[s. n.],1994

[3] Takahashi T T, Coopersmith R M. Wing section design for a long-range hydrofoil transport[R]. AIAA 2002-0832,2002

[4] Sobieczky H. New design concept for high speed air transports[C]//CISM cours and Lectures NO. 366. New York: Springer Wien,1997

[5] 朱自强,吴宗成.现代飞机设计空气动力学[M].北京:北京航空航天大学出版社,2005
Zhu Ziqiang, Wu Zongcheng. Aerodynamics for modern aircraft design[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press,2005(in Chinese)

[6] Jameson A, Schmidt W, Turkel E. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods with Runge-Kutta time stepping schemes[R]. AIAA 81-1259,1981

[7] Powell M J D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculation derivatives[J]. Computer Journal, 1964, 7: 155－162

[8] Burdges K P, Hinson B L. Transport wing and far field test data on a moderate aspect ratio wing for three dimensional computational method evaluation[R]. AGARD-AR-138, 1979


(责任编辑:赵海容)