三自由度平面欠驱动机械臂的轨迹跟踪控制

刘盛平 吴立成

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100083) (清华大学 智能技术与系统国家重点实验室, 北京 100084)

陆 震

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100083)

摘 要: 研究了三连杆平面欠驱动机械臂的轨迹跟踪问题. 机械臂的第 3个关节为被动关节,施加在自由运动连杆上的动力学约束是二阶非完整的. 通过全局输入和坐标变换,系统的动力学方程被变换成高阶链式形式. 基于后推法 (backstepping)的思想推导出保证系统全局渐近收敛于参考轨迹的时变反馈控制规律. 后推法将系统分解为低阶子系统来处理,利用中间虚拟控制变量和部分 Lyapunov函数简化了控制器的设计. 数值仿真结果显示系统能稳定地跟踪参考轨迹,也证明了控制器设计是有效的.

关 键 词: 欠驱动; 非完整; 平面机械臂; 后推法; 轨迹跟踪

中图分类号: TP 242

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2007)03-0307-04

Trajectory tracking control of three-DOF planar under-actuated manipulator

Liu Shengping

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Wu Licheng

(State Key Laboratory of Intelligent Technology and Systems, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Lu Zhen

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: The trajectory tracking control of a three-link planar under-actuated manipulator was presented. The third joint of the manipulator was passive. The dynamic constraint on the free link was shown to be second-order nonholonomic. Motion equations of the system were transformed into high order chained form using some global coordinate and input changes. A time-varying feedback controller was proposed to force the under-actuated manipulator to globally asymptotically track a reference trajectory. The control development was based on the current popular integrator backstepping technique. The method breaks down nonlinear system into low dimensional systems and simplifies the controller design using virtual control inputs and partial Lyapunov functions. Simulation results show the system can stably converge to a desired trajectory and demonstrate the effectiveness of the proposed control law.

Key words: under-actuated; nonholonomic; planar manipulator; backstepping; trajectory tracking

收稿日期: 2006-04-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50375007, 50405002)

作者简介: 刘盛平 (1978 -),男,四川荣县人,博士生, liushengping@asee.buaa.edu.cn.

欠驱动机械臂是指在系统的某个或某些关节上缺少驱动器的特殊机器人. 驱动器的减少使欠驱动机械臂具有重量轻、成本低、能耗低的特点,这对于新型机器人的研究具有指导意义. 此外,对欠驱动系统的研究也必将扩大非线性控制理论的研究领域.

文献[1]最初研究了欠驱动机械臂被动关节上有制动器时的关节位置控制问题. 它利用制动器放松、啮合2种运动模式实现系统的关节位置控制. 之后人们对被动关节上无制动器的控制问题进行探索. 文献[2-3]等研究了第1个关节受驱动,而第2个关节为被动的2R, PR机械臂的稳定性问题. 文献[4]利用构造轨迹方法证明了3R型平面欠驱动机械臂是完全可控的. 文献[5]等研究了PPR型平面欠驱动机械臂的关节位置控制,利用输入坐标变换将系统的动力学方程变成一个链式系统形式,并设计控制器使系统在2个任意位置点间运动. 文献[6-7]利用新方法同样研究了PPR型平面欠驱动机械臂的关节位置控制. 文献[8]基于部分反馈线性化的非线性控制决策研究了吊车负载的防摆控制. 但到目前为止,对平面欠驱动机械臂的控制研究还没形成统一理论.

文献[5-6]只解决系统从一个点运动到另一个点,对2点间的轨迹无任何要求;而在实际中却需要使系统关节沿着特定的轨迹运动. 针对此问题,本文采用坐标和输入变换,将系统的动力学方程变成高阶链式形式,并利用后推法为系统设计了保证系统渐近收敛于给定轨迹的时变反馈控制规律的控制器.

1 动力学方程

研究如图1所示的在水平面运动的三自由度欠驱动机械臂,该机械臂的第1个和第2个关节是相互正交的移动主动关节,第3个关节为自由移动的转动关节. 设 $q=(x, y, \theta)^{\mathrm{T}}$ 表示系统的关节位置矢量, $(f_1, f_2)^{\mathrm{T}}$ 表示2个移动关节的控制输入, m_1, m_2, m_3 分别表示3个连杆的质量, I_3 表示第3个连杆对其质心的转动惯量, d 表示关节3到第3连杆质心的距离.

根据牛顿-欧拉法,得到式(1)所示PPR型平面欠驱动机械臂的动力学方程:

$$\left.\begin{aligned} & M_{123}\ddot{x}-m_3 d\dot{\theta}^2\cos\theta-m_3 d\ddot{\theta}\sin\theta=f_1\\ & M_{23}\ddot{y}-m_3 d\dot{\theta}^2\sin\theta+m_3 d\ddot{\theta}\cos\theta=f_2\\ & -m_3 d\ddot{x}\sin\theta+m_3 d\ddot{y}\cos\theta+I\ddot{\theta}=0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

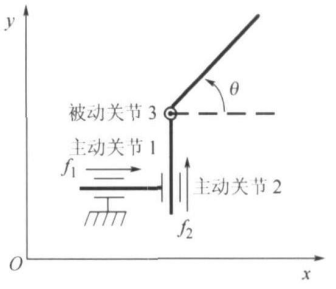

图1 三连杆平面欠驱动机械臂系统

式中, $M_{123}=\sum_{i=1}^{3}m_i$; $M_{23}=\sum_{i=2}^{3}m_i$; $I=I_3+m_3d^2$.

将式(2)的输入变换代入式(1):

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= M_{123}-\frac{m_3^2d^2}{I}\sin^2\theta\,u_x+\\ &\quad \frac{m_3^2d^2}{I}u_y\sin\theta\cos\theta-m_3d\dot{\theta}^2\cos\theta\\ f_2 &= -m_3d\dot{\theta}^2\sin\theta+\frac{m_3^2d^2}{I}u_x\sin\theta\cos\theta+\\ &\quad M_{23}-\frac{m_3^2d^2}{I}\cos^2\theta\,u_y \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

得

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= u_x\\ \ddot{y} &= u_y\\ \ddot{\theta} &= \gamma(u_x\sin\theta-u_y\cos\theta) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

式中, $\gamma=\frac{m_3d}{I}$; u_x, u_y 是新的控制输入. 进一步令

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x+\frac{1}{r}\cos\theta\\ x_2 &= y+\frac{1}{r}\sin\theta\\ x_3 &= \tan\theta\\ u_x &= \left(u_1\sec\theta+\frac{1}{r}\dot{\theta}^2\right)\cos\theta+\\ &\quad \frac{1}{r}(u_2\cos^2\theta-2\dot{\theta}^2\tan\theta)\sin\theta\\ u_y &= \left(u_1\sec\theta+\frac{1}{r}\dot{\theta}^2\right)\sin\theta-\\ &\quad \frac{1}{r}(u_2\cos^2\theta-2\dot{\theta}^2\tan\theta)\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

式中, (x_1, x_2) 在文献[4]中被称为连杆3的CP(Center of Percussion)点; u_1, u_2 是新的控制输入. 将变换式(4)代入式(3)得

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= u_1\\ \ddot{x}_2 &= x_3u_1\\ \ddot{x}_3 &= u_2 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

令 $y=(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^{\mathrm{T}}$ 且 $y_1=x_1$, $y_2=$

$\dot{x}_1$, $y_3 = x_2$, $y_4 = \dot{x}_2$, $y_5 = x_3$,以及 $y_6 = \dot{x}_3$,则二阶链式系统式 (5)变成

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2\\ \dot{y}_2 &= u_1\\ \dot{y}_3 &= y_4\\ \dot{y}_4 &= y_5 u_1\\ \dot{y}_5 &= y_6\\ \dot{y}_6 &= u_2\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

2　轨迹跟踪问题描述

设 $y_d = (y_{1d}, y_{2d}, y_{3d}, y_{4d}, y_{5d}, y_{6d})^T$ 为需要跟踪的轨迹矢量,且由方程 (7)产生:

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_{1d} &= y_{2d}\\ \dot{y}_{2d} &= u_{1d}\\ \dot{y}_{3d} &= y_{4d}\\ \dot{y}_{4d} &= y_{5d} u_{1d}\\ \dot{y}_{5d} &= y_{6d}\\ \dot{y}_{6d} &= u_{2d}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中 $u_d = (u_{1d}, u_{2d})^T$ 为时变的参考控制输入. 跟踪误差矢量表示为 $y_e = y - y_d$,通过对误差矢量求导并利用式 (6)和式 (7)得

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_{1e} &= y_{2e}\\ \dot{y}_{2e} &= u_1 - u_{1d}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_{3e} &= y_{4e}\\ \dot{y}_{4e} &= y_{5e} u_1 + y_{5d}(u_1 - u_{1d})\\ \dot{y}_{5e} &= y_{6e}\\ \dot{y}_{6e} &= u_2 - u_{2d}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

因此,三连杆欠驱动机械臂的轨迹跟踪问题描述为:在初始跟踪误差 $y_e(0) = y(0) - y_d(0)$ 下,通过设计适当的连续时变的状态反馈控制器 $u_1 = f_1(t, y)$, $u_2 = f_2(t, y)$使系统 (6)稳定地沿着设定的轨迹 (7)运动.

3　控制器设计

本文希望获得一个使非线性系统 (8)和系统 (9)渐近稳定的控制规律.

由于式 (8)是一个线性子系统,故通过式 (10)的控制规律就能使得 $y_{1e} \to 0$, $y_{2e} \to 0$ ($t \to +\infty$).

$$u_1 = u_{1d} - k_1(y_{2e} + k_2 y_{1e}) - k_2 y_{2e} \tag{10}$$

式中 $k_1 > k_2 > 0$是常数控制增益.

但是当 $u_1 = 0$时,式 (9)中控制输入 u_2 就成为奇异的,因此须要求 $u_1 \neq 0$.

根据式 (9)的具体形式,下面采用后推法推导使其渐近稳定的控制规律 u_2.

首先,利用虚拟控制,定义 4个误差变量:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= y_{3e}\\ \xi_2 &= y_{4e} - \alpha_1(y_{3e})\\ \xi_3 &= y_{5e} - \alpha_2(y_{3e}, y_{4e})\\ \xi_4 &= y_{6e} - \alpha_3(y_{3e}, y_{4e}, y_{5e})\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为待定的虚拟控制. 下面在每一步构造一个李雅普诺夫函数,使得每一状态分量具有适当的渐近特性. 式 (11)本质上为一微分同胚,因此为镇定系统 (9),只需要镇定原系统状态与虚拟反馈间的误差即可.

第 1步　定义 $V_1 = 0.5\xi_1^2$,取

$$\alpha_1 = -k_3 y_{3e} \tag{12}$$

式中 $k_3 > 0$为增益常数. 对 V_1 关于时间求导一次得 $\dot{V}_1 = -k_3\xi_1^2 + \xi_1\xi_2$. 显然,如果 $\xi_2 = 0$,则知 ξ_1 是指数趋近于 0的. 但一般情况下 $\xi_2 \neq 0$,因此需引入虚拟控制 α_2 使误差 ξ_2 具有期望的渐近性态.

第 2步　定义 $V_2 = V_1 + 0.5\xi_2^2$,取

$$\alpha_2 = [\dot{\alpha}_1 - \xi_1 - k_4\xi_2 - y_{5d}(u_1 - u_{1d})]/u_1 \tag{13}$$

式中 $k_4 > 0$为增益常数. 对 V_2 关于时间求导一次得 $\dot{V}_2 = -k_3\xi_1^2 - k_4\xi_2^2 + u_1\xi_2\xi_3$. 显然,如果 $\xi_3 = 0$,则知 ξ_1, ξ_2 指数趋近于 0. 但一般情况下 $\xi_3 \neq 0$,因此需引入虚拟控制 α_3 使误差 ξ_3 具有期望的渐近性态.

第 3步　定义 $V_3 = V_2 + 0.5\xi_3^2$,取

$$\alpha_3 = \dot{\alpha}_2 - \xi_2 u_1 - k_5\xi_3 \tag{14}$$

式中 $k_5 > 0$为增益常数. 对 V_3 关于时间求导一次得 $\dot{V}_3 = -k_3\xi_1^2 - k_4\xi_2^2 - k_5\xi_3^2 + \xi_3\xi_4$. 显然,如果 $\xi_4 = 0$,则知 ξ_1, ξ_2, ξ_3 指数趋近于 0. 但一般情况下 $\xi_4 \neq 0$,但可通过设计控制 u_2 使误差 ξ_4 具有期望的渐近性态.

第 4步　定义 $V_4 = V_3 + 0.5\xi_4^2$,选取反馈控制规律

$$u_2 = u_{2d} + \dot{\alpha}_3 - \xi_3 - k_6\xi_4 \tag{15}$$

式中 $k_6 > 0$为增益常数. 对 V_4 关于时间求导一次得 $\dot{V}_4 = -k_3\xi_1^2 - k_4\xi_2^2 - k_5\xi_3^2 - k_6\xi_4^2$,即可知 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是指数趋近于 0的.

综上所述,在后推法中给定的虚拟控制 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 及反馈控制 (15)下,原系统 (9)指数渐近趋于 0.

4　仿真结果

仿真模型如图 1所示,系统连杆都是均质杆

且质量分别为 $m_1 = m_2 = 2\ \mathrm{kg}, m_3 = 1\ \mathrm{kg}$,关节 3到第 3个连杆质心的距离 $d = 0.75\ \mathrm{m}$,连杆 3对其质心的转动惯量 $I_3 = 3/16\ \mathrm{kg \cdot m^2}$. 增益系数 $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 3$, $k_4 = k_5 = k_6 = 4$. 设系统要跟踪的参考轨迹为: $\theta_d = \arctan(\cos t)$, $x_d = 0.01t^2 - \cos\theta_d$, $y_d = 0.02\sin t - \sin\theta_d$. 设机械臂系统的初始条件为: $x(0) = -0.6$, $y(0) = 0.3$, $\theta(0) = 0$, $\dot{x}(0) = -0.5$, $\dot{y}(0) = 0.92$, $\dot{\theta}(0) = -0.6$. 则得出系统(8)和系统(9)的误差矢量为: $y_e(0) = (0.4, -0.5, 0.3, 0.3, -1, -0.6)^T$.

仿真结果如图 2～图 3所示,图 2显示在控制输入的作用下,系统实际运动轨迹收敛于参考轨迹. 图 3表示实际控制输入收敛于参考控制输入.

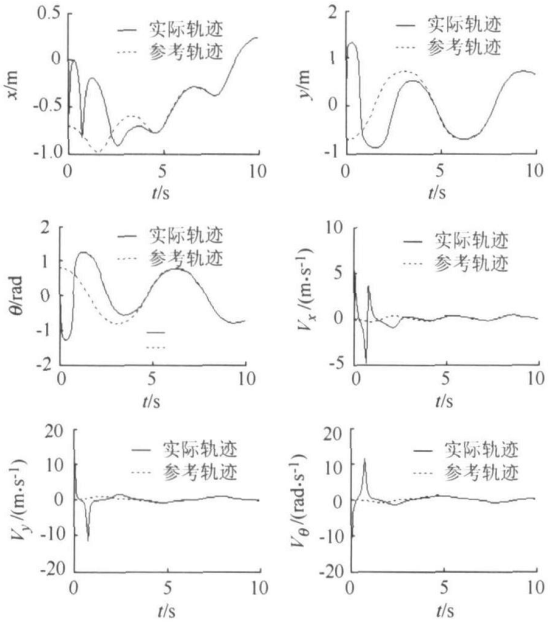

图 2 实际轨迹与参考轨迹比较

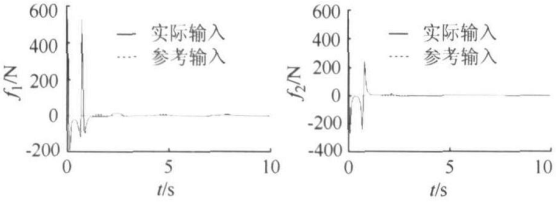

图 3 实际控制输入与参考控制输入比较

5 结束语

本文对三自由度平面欠驱动机械臂的轨迹跟踪问题进行了研究. 通过输入和坐标变换,将系统的动力学方程变换成高阶链式形式. 采用后推法推导出保证系统渐近收敛于给定轨迹的时变反馈控制规律,克服了文献[5-6]中只能实现的点位控制问题,同时仿真实例证明了该方法的有效性.

参考文献 (References)

[1] Arai H, Tachi S. Position control of a manipulator with passive joints using dynamic coupling[J]. Trans on Robotics and Automation, 1991, 7(4): 528 - 534

[2] Luca A D, Mattone R, Oriolo G. Stabilization of an underactuated planar 2R manipulator[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2000, 10(4): 181 - 198

[3] De Luca A, Iannitti S, Oriolo G. Stabilization of a PR planar underactuated robot[C]//Proc IEEE Int Conf Rob Autom. Seoul: IEEE, 2001, 2: 2090 - 2095

[4] Arai H, Tanie K, Shiroma N. Nonholonomic control of a three-dof planar underactuated manipulator[J]. IEEE Trans on Robotics and Automation, 1998, 14(5): 681 - 695

[5] Imura J, Kobayashi K, Yoshikawa T. Nonholonomic control of 3 link planar manipulator with a free joint[C]//Proc IEEE Conf Decis Control. Kobe: IEEE, 1996, 2: 1435 - 1436

[6] Mahindrakar A D, Banavar R N, Reyhanoglu M. Discontinuous feedback control of a 3 link planar PPR underactuated manipulator[C]//Proc IEEE Conf Decis Control. Orlando: IEEE, 2001, 3: 2424 - 2429

[7] 马保离. 一类二阶非完整系统的镇定[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(4): 565 - 568
Ma Baoli. Stabilization of a class of second-order nonholonomic systems[J]. Control Theory & Applications, 2003, 20(4): 565 - 568 (in Chinese)

[8] 高丙团,陈宏钧,张晓华. 一类欠驱动机械系统的非线性控制[J]. 控制与决策, 2006, 21(1): 104 - 110
Gao Bingtuan, Chen Hongjun, Zhang Xiaohua. Nonlinear control for a class of underactuated mechanical systems[J]. Control and Decision, 2006, 21(1): 104 - 110 (in Chinese)

(责任编辑:文丽芳)