飞行控制中的一种新型最优控制分配方法

杨凌宇 高金源 申功璋

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100083)

摘 要: 针对新一代多操纵面飞行器的控制分配问题,提出了一种全新的最优控制分配算法——基底排序法.该方法将优化目标按照飞行控制的需求分成控制目标和任务目标两类,以基底的形式对舵面进行重新组合,并按照期望控制目标和任务优化指标进行排序,将冗余优化问题转化成排序问题加以解决.通过与几种常用控制分配方法的比较及多操纵面飞行控制系统的仿真验证,表明基底排序法能在准确实现期望目标的同时获得更好的任务目标分配结果,构成的控制系统能按期望要求准确、快速地跟踪指令信号,并可有效地抑制飞机各控制通道之间的影响.

关 键 词: 飞行控制系统; 最优控制分配; 冗余

中图分类号: TP 273

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2007)05-0572-05

New optimal control allocation method for flight control system

Yang Lingyu Gao Jinyuan Shen Gongzhang

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Control allocation method was investigated with the background of aircraft with multiple control effectors. A new optimal control allocation method, bases sequence control allocation, was put forward. The optimal objectives were divided into control objective and mission objective, and the control objective should be fulfilled firstly. The actuators were recombined, and the efficiency vectors of the actuators were treated as the bases of multidimensional space. All of the bases were sequenced according to the control object and the mission objective. Then the optimization of redundancy system was transformed to a sequencing problem. Comparison with other allocation method and control system simulation results show the bases sequence method can achieve the objective accurately and optimally, and can be computed in real-time. The response of the control system is rapid and accurate, and shows good decouple performance among axes.

Key words: flight control system; optimal control allocation; redundancy

新一代战斗机对隐身性要求大大提高,多为无尾多操纵面布局形式,与传统飞行器相比,操纵面个数大大增加,且一个舵面担负着多个轴的控制,操纵舵面的冗余和耦合程度增强,直接采用副翼、方向舵、升降舵控制 3 轴的方法已不再适用,一般采用控制分配方法将控制指令分配到各个操纵舵面.

现有的控制分配算法主要包括简单算法、直接分配和基于优化方法的分配算法.简单算法易于实现,计算速度快,但对约束条件的处理存在不足,易产生舵面饱和,且不能实现目标可达集中所有向量[1-3].直接分配采用几何搜索方法,寻找目标向量和目标可达集边界的交点,直接获得分配结果[3-4].但对于目标处于可达集范围内的情况,仅采用比例缩减的方式获得分配结果,没有对其进行优化.另外在期望目标大于三维的情况时,边

收稿日期: 2006-06-13

基金项目: 国家 973 资助项目(5132004)

作者简介: 杨凌宇(1979—),男,吉林吉林市人,博士生,yly@asee.buaa.edu.cn.

界条件不易计算,几何处理较复杂.基于优化的分配算法将带约束的控制分配问题转化成典型的最优求解问题,使用成熟的优化算法加以解决,一般采用多步法的形式,可实现多个目标的优化分配,缺点是计算量较大[3],限制了该类方法的应用.

针对现有方法存在的问题,本文提出一种新算法,可结合附加目标对控制分配进行优化,实现对操纵面的最优分配,并能满足实时计算要求.

1　飞行控制中的最优控制分配

1.1　控制分配的基本描述

n 维目标的控制分配可描述为

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u}_{\min}\leqslant\boldsymbol{u}\leqslant\boldsymbol{u}_{\max} \tag{2}$$

式中,$\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}\in\boldsymbol{R}^{n}$ 为期望目标;$\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 为已知控制效率矩阵,代表 m 个控制机构分别在 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$ 上的控制效率系数;$\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^{m}$ 为待求的 m 个控制机构的偏量,$m\geqslant n$,受到结构、载荷等方面约束,$\boldsymbol{u}$ 偏转范围受到限制,如式(2).$\boldsymbol{u}$ 在限制范围内所能实现的目标的集合称为目标可达集.

在飞行控制中,控制目标一般为飞机的各轴力矩,控制机构为飞机的各个操纵舵面.

1.2　控制分配的优化目标

待分配系统其控制量维数大于目标维数,存在冗余,可对其进行优化.现有控制分配算法的优化目标主要包括误差最小、控制量最小及混合最小目标[5].

1) 误差最小目标

现有控制分配所研究的最优问题,一般指限定范围内的最小分配误差问题或加权最小误差问题,目的是求得与目标值最接近的分配结果,即

$$\min J=(\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{u}_{\min}\leqslant\boldsymbol{u}\leqslant\boldsymbol{u}_{\max} \tag{3}$$

式中,$\boldsymbol{W}$ 为加权矩阵.

2) 控制量最小目标

仅满足分配误差最小并没有充分发挥整个系统的潜力,由于存在冗余,满足最小误差的解往往不是唯一的,因此在误差最小化的基础上又提出了控制最小化问题的研究,即

$$\min J=\|\boldsymbol{u}\|$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}\qquad\boldsymbol{u}_{\min}\leqslant\boldsymbol{u}\leqslant\boldsymbol{u}_{\max} \tag{4}$$

3) 混合最小目标

混合最优问题将误差最小和控制量最小问题以线形加权的形式综合表述,如式(5),式中 λ 表征对两个最小指标的倾向,根据具体情况选择:

$$\min J=\|\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\|+\lambda\|\boldsymbol{u}\|$$

$$\boldsymbol{u}_{\min}\leqslant\boldsymbol{u}\leqslant\boldsymbol{u}_{\max} \tag{5}$$

混合最优方法已考虑到多个目标的优化,但控制系统中对误差的要求是放在首位的,应尽可能的满足,这很难通过单纯调节 λ 来满意的实现.虽然可采用基于优化的分配方法利用多步法来解决,但是受计算量的影响,很难用于实时计算.因此,现有的分配方法主要针对分配误差进行处理,对在此基础上的进一步优化的问题还不能很好解决.

1.3　控制分配的任务目标

控制分配进一步优化的目标往往和飞行任务有关,如巡航时期望舵面阻力更小;常规飞行时,从延长寿命的角度,期望舵面有较小的运动幅度;对敌攻击时,期望有较低的雷达反射特性,针对不同任务,可选用相应的指标来实现有针对性的优化.为与传统控制分配的优化目标相区分,本文将误差最小目标称为控制目标,将与飞行任务相关的进一步优化目标称为任务目标.

飞行控制中的任务优化目标一般可以表示为多个控制舵面偏度的线性叠加形式:

$$\min\Phi=a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_mu_m \tag{6}$$

式中,a_i 为各舵面的效率系数,当 a_i 全为 1 时,对应控制量最小化目标.按照实际的系统需求,分配时首先满足控制目标,同时尽可能实现任务优化目标,与传统多步法优化不同,本文将优化过程一步完成,可满足实时计算要求.

2　基底排序最优控制分配方法

2.1　基于多维空间基底排序的控制分配算法

n 维目标的控制分配问题如式(1)和式(2),将 $\boldsymbol{B}$ 阵按列划分,可表述为 m 个列向量的组合:

$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{12}\\\vdots\\b_{1n}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_{21}\\b_{22}\\\vdots\\b_{2n}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_{31}\\b_{32}\\\vdots\\b_{3n}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}b_{m1}\\b_{m2}\\\vdots\\b_{mn}\end{pmatrix}\right]=$$

$$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\cdots,\boldsymbol{b}_m] \tag{7}$$

式中,每一个列向量 $\boldsymbol{b}_i$ 都对应着一个控制舵面 u_i,代表该舵面偏转在期望控制目标上产生的分量.

n 维线性空间中,任意 n 个线性无关的向量可构成该空间的一个基底,空间中的任意向量均可由该基底通过线性组合表示.相应地,从 $\boldsymbol{B}$ 中任取 n 个线性无关列向量均可构成一个 n 维空间基底 $\boldsymbol{B}_k\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$,最多可构成 $m!/[n!(m-n)!]$

个：

$$\boldsymbol{B}_k=[\boldsymbol{b}_{k1},\boldsymbol{b}_{k2},\cdots,\boldsymbol{b}_{kn}] \tag{8}$$

式中，k 为向量组标号，$ki\in\{1,2,\cdots,m\}$，代表 $\boldsymbol{B}_k$ 列向量在 $\boldsymbol{B}$ 中的相应位置，与 $\boldsymbol{B}_k$ 相对应，存在一组控制舵面 $\boldsymbol{U}_k=[u_{k1},u_{k2},\cdots,u_{kn}]^{\mathrm{T}}$，在无约束的情况下，$\boldsymbol{B}_k$ 及 $\boldsymbol{U}_k$ 可唯一的构成 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$，即

$$\boldsymbol{U}_k=\boldsymbol{B}_k^{-1}\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}} \tag{9}$$

当存在位置约束时，$\boldsymbol{B}_k$ 及 $\boldsymbol{U}_k$ 只能在 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$ 方向上实现一定长度的向量，可表示为

$$\boldsymbol{U}_k=\lambda_k\boldsymbol{B}_k^{-1}\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}} \tag{10}$$

式中，$\lambda_k\leqslant 1$，表示 $\boldsymbol{B}_k$ 及 $\boldsymbol{U}_k$ 在 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$ 方向上所能实现的最大分量. 当一个基底不能完成 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$ 时，可以通过依次选择多组基底共同作用的方式来实现 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$，有如下关系：

$$\begin{cases}\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}=\lambda_1\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}+\lambda_2\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}\\ \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1\\ \boldsymbol{U}_i=\lambda_i\boldsymbol{B}_i^{-1}\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}\qquad i=1,2,\cdots,k\\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{ext}}+\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{ext}}+\cdots+\boldsymbol{U}_k^{\mathrm{ext}}\end{cases} \tag{11}$$

式中，$\boldsymbol{U}^{\mathrm{ext}}$ 定义为 n 维向量按元素的对应位置向 m 维的扩展，空位用 0 填补，如

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{U}=[u_1,u_3,u_4,\cdots,u_{m-7},u_{m-5},\cdots]^{\mathrm{T}}\\ &\boldsymbol{U}^{\mathrm{ext}}=[u_1,0,u_3,u_4,0,\cdots,u_{m-7},0,u_{m-5},\cdots,u_m]^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

由于存在多个可用基底，基底选用的顺序将影响到任务目标的优劣. 为了评价各基底对任务目标的贡献，引入基底效率函数.

设某基底为 $\boldsymbol{B}_k$，任务优化指标为

$$\min\Phi=a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_mu_m=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \tag{13}$$

不考虑舵面限制，$\boldsymbol{B}_k$ 实现 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$ 时所需的控制量 $\boldsymbol{U}_k$ 由式(9)求得，则该基底的效率函数定义为

$$\pi(k)=\frac{1}{a_{k1}u_{k1}+a_{k2}u_{k2}+\cdots+a_{kn}u_{kn}}=\frac{1}{\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_k}=\frac{1}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_k^{\mathrm{ext}}} \tag{14}$$

若优化目标值为最大问题时，为满足效率排序的一致性要求可设：

$$\pi(k)=a_{k1}u_{k1}+a_{k2}u_{k2}+\cdots+a_{kn}u_{kn}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_k^{\mathrm{ext}} \tag{15}$$

该效率函数表征该舵面组对 Φ 指标的影响，该函数的大小表示该控制舵面组实现的期望目标所付出代价的程度.

根据上面的设计思想，一个 n 维目标的最优控制分配问题可以通过以下步骤解决：

1) 将 $\boldsymbol{B}$ 的 m 个列向量以 n 为基数进行组合，选出线性无关的组，构成多个候选基底；

2) 分别计算各基底在任务目标 Φ 下的效率函数 π，并进行排序，由高到低构成候选基底序列；

3) 取出候选基底序列中未使用的首个基底 $\boldsymbol{B}_k$，k 从 1 开始，按式(10)求解 λ_k，$\boldsymbol{U}_k$；

4) 计算 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k$，若 $\lambda<1$，记当前基底为“已用”，并重复 3)；若候选基底组中已无可用基底，并且 $\lambda<1$，令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{ext}}+\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{ext}}+\cdots+\boldsymbol{U}_k^{\mathrm{ext}}$，$\boldsymbol{u}$ 为在 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$ 方向上产生最大力矩的舵面偏度，产生的力矩为 $\lambda\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$；若 $\lambda\geqslant 1$，令 $\lambda_k=1-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{k-1})$，$\boldsymbol{U}_k=\lambda_k\boldsymbol{B}_k^{-1}\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{ext}}+\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{ext}}+\cdots+\boldsymbol{U}_k^{\mathrm{ext}}$，则 $\boldsymbol{u}$ 为最终分配结果.

通过上述步骤，控制分配的最优问题被转化成为一个排序问题得以解决.

上述方法具有以下几个特点：①该方法基于空间基底概念，可获得可达目标集中所有的解；②该方法通过对基底效率进行排序，可以获得最优的控制分配结果；③适用于目标维数 $n>3$ 的情况，易于编程实现；④以基底为基本元素，$\boldsymbol{B}$ 阵中的线性相关列被自然排除在外，适用于 $\boldsymbol{B}$ 阵存在线性相关向量的情况.

2.2 考虑速率约束的控制分配

实际操纵面受到舵机运动特性、舵面载荷等因素影响，不仅存在位置约束，其运动速率也受到限制. 这里采用以控制系统计算帧为单元进行处理的方法，将带速率约束转化为位置约束[3,6].

设飞行器舵面的速率约束为

$$\boldsymbol{v}_{\min}\leqslant\boldsymbol{v}\leqslant\boldsymbol{v}_{\max}$$

式中，$\boldsymbol{v}_{\max}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\min}$ 分别为舵面正偏和负偏允许的最大速率. 设 $\boldsymbol{u}(t)$ 表示飞机 t 时刻的舵面位置，控制系统计算周期为 Δt，则在 $t+\Delta t$ 时刻，舵面的可行变化范围受位置和速率共同约束，可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}'_{\max}=\min(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}_{\max}\Delta t,\boldsymbol{u}_{\max})\\ \boldsymbol{u}'_{\min}=\max(\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{v}_{\min}\Delta t,\boldsymbol{u}_{\min})\end{cases}$$

这样，带速率约束的控制分配问题可转化成为一个单位计算周期内的位置约束问题.

2.3 计算效率分析

根据 2.1 所述，本算法计算量主要在效率函数 π 的计算上，可以按 π 的计算次数来评估. 可知，当求解 n 维目标，m 个控制舵面的控制分配问题时，π 的计算次数最大为 $m!/[n!(m-n)!]$，当舵面个数恒定，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$ 维数每增加一维，计算次数增加 $(m-n)/(n+1)$ 倍，当 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$ 维数恒定，舵面每增加一个，计算次数增加 $(m+1)/(m-n+1)$ 倍. 表 1 列出了飞行控制中典型情况下 π 的计算次数，可以看出，相对现代计算工具的速度，该算法

计算量需求很小,可以满足实时性计算的要求.

表 1　π 函数计算次数统计表

舵面个数	维数			
	2	3	4	5
8	28	56	70	56
12	66	220	495	792
16	120	560	1 820	4 386

3　几种控制分配算法对比

为了验证本分配算法的有效性,选取了直接分配方法和多级广义逆两种方法作为比较,取某飞机[7]的控制矩阵(单位为 N·m/(°)):

$$\boldsymbol{B}=10^3\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1.5994 & -1.5994 & 6.4358 & -6.4358 & 5.8066 & -5.8066 & -1.9766 & 1.9766 & -4.7860 & 4.7860 \\ 0 & -0.8330 & 0.8330 & 1.4646 & -1.4646 & 2.8436 & -2.8436 & 1.5990 & -1.5990 & 5.1605 & -5.1605 \\ -6.2253 & 0.0735 & -0.0735 & -7.3683 & -7.3683 & -5.2246 & -5.2246 & 0.6176 & 0.6176 & 4.4232 & 4.4232 \end{bmatrix}$$

舵面约束为

$$\boldsymbol{u}_{\max}=[30,30,30,30,30,60,60,60,60,60,60]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{u}_{\min}=[-30,0,0,-30,-30,-10,-10,0,0,0,0]^{\mathrm{T}}$$

任务优化目标取所有舵面偏转和最小指标:

$$\min\Phi_{\sum}=|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_m|$$

分别取控制力矩可实现和不能实现两种情况进行仿真对比,结果如下:

1) 取 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}=[-50,-100,30]^{\mathrm{T}}$(kN·m),此时 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$ 处于可达目标集范围内,分配结果如下.

基底排序法分配结果为

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{BS}}=[0,0,0,0,0,-7.06,9.84,0,0,0,10.06]^{\mathrm{T}}$$

直接分配法分配结果为

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{DIR}}=[-3.85,3.53,0.69,-4.23,4.23,-1.41,8.46,0,8.46,0,8.46]^{\mathrm{T}}$$

多级广义逆方法分配结果为

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{CGI}}=[0.5,1.65,0,-2.45,3.64,-5.40,6.24,0,3.15,0,10]^{\mathrm{T}}$$

各分配方法的力矩分配误差及舵面偏转角度和如表 2 所示,可以看出,本方法能在满足控制需求的情况下保证舵面偏转和最小.

表 2　目标可实现时控制分配方法效果比较

方法	力矩误差直角坐标 $[x,y,z]$/(kN·m)	力矩误差球坐标 $[R/(\mathrm{kN\cdot m}),\theta/(°),\psi/(°)]^{\mathrm{T}}$	$\Phi_{\sum}$/(°)
基底排序法	$[0,0,0]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,0]^{\mathrm{T}}$	26.97
直接分配法	$[0,0,0]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,0]^{\mathrm{T}}$	43.33
多级广义逆	$[0,0,0]^{\mathrm{T}}$	$[0,0,0]^{\mathrm{T}}$	33.02

注:R 为球坐标中向量的模值;θ 和 ψ 分别为球坐标的极角和方位角.

2) 取 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}=[-300,-200,1\,200]^{\mathrm{T}}$(kN·m),此时 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$ 超出可达目标集范围,各方法分配结果见表 3,可以看出,当 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$ 超出可达目标集时,基底排序法与直接分配方法相比,在 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}}$ 方向上给出相同的力矩,但任务指标要优于后者,而多级广义逆方法则误差比较大.

表 3　目标不可实现时控制分配方法效果比较

方法	力矩误差直角坐标 $[x,y,z]$/(kN·m)	力矩误差球坐标 $[R/(\mathrm{kN\cdot m}),\theta/(°),\psi/(°)]^{\mathrm{T}}$	$\Phi_{\sum}$/(°)
基底排序法	$[-34.96,-23.31,139.85]^{\mathrm{T}}$	$[146.03,0,0]^{\mathrm{T}}$	412.66
直接分配法	$[-34.96,-23.31,139.85]^{\mathrm{T}}$	$[146.03,0,0]^{\mathrm{T}}$	414.60
多级广义逆	$[106.46,-0.95,227.48]^{\mathrm{T}}$	$[180.32,-7.60,-8.23]^{\mathrm{T}}$	400.00

4　基于控制分配的飞控系统仿真

根据文献[8]构建了多操纵面布局六自由度非线性仿真系统模型,共包含 11 个操纵舵面,分别为:俯仰襟翼,左、右前缘襟翼,左、右升降副翼,左、右全动翼尖,左、右扰流片,左、右开裂副翼;各舵面位置及速度约束如表 4 所示.

表 4　舵面位置约束和速率约束

舵面名称	$\boldsymbol{u}_{\max}$/(°)	$\boldsymbol{u}_{\min}$/(°)	$\boldsymbol{v}_{\max}$/((°)·s^{-1})	$\boldsymbol{v}_{\min}$/((°)·s^{-1})
俯仰襟翼	30	−30	50	−50
前缘襟翼	40	0	40	−40
升降副翼	30	−30	150	−150
全动翼尖	60	−10	150	−150
扰流片	60	0	150	−150
开裂副翼	60	0	150	−150

仿真结果如图 1～图 3 所示.在前述六自由

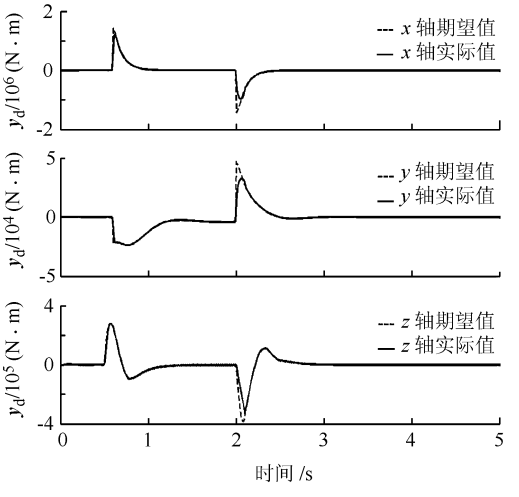


图 1　力矩响应曲线

度非线性模型基础上，设计了3轴控制系统[8]，控制指令迎角 α 和滚转角速度 ω_x 取矩形指令，控制无侧滑 $\beta=0$，取仿真采样周期为0.01 s. 其中图1为力矩指令与实际响应曲线，图2为各舵面角度随时间变化曲线，图3为控制系统整体响应结果曲线.

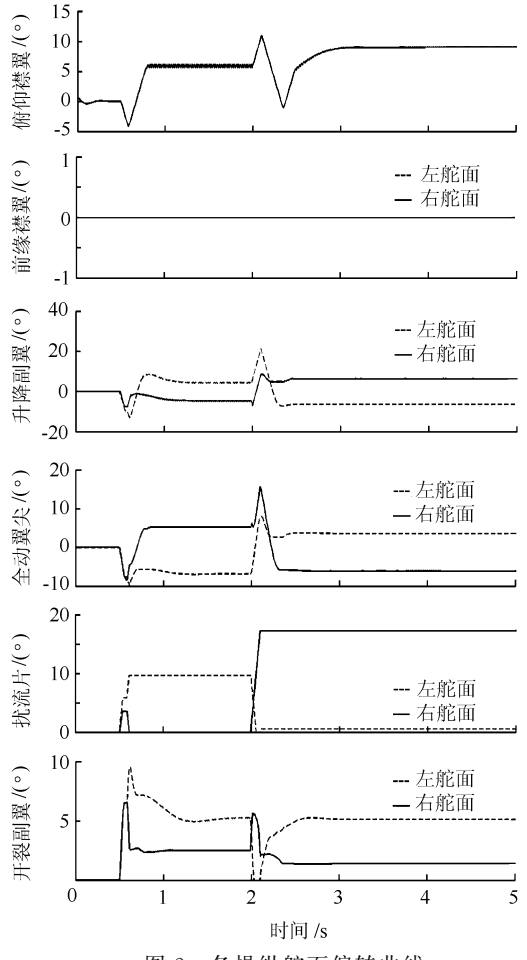


图2 各操纵舵面偏转曲线

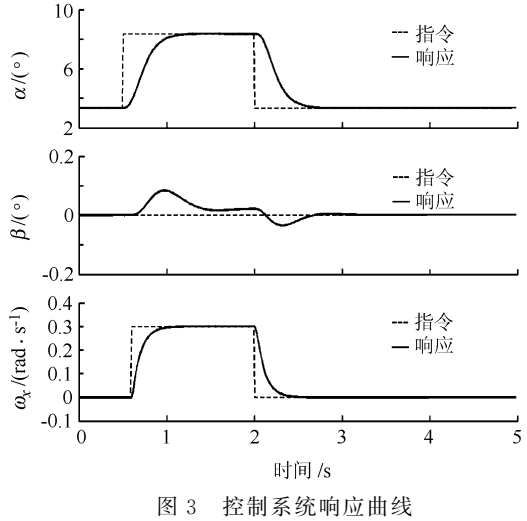


图3 控制系统响应曲线

仿真结果表明，控制分配能实现期望的力矩指令，各舵面均工作在位置与速率约束范围内；整个控制系统能快速跟踪系统指令，各控制通道之间的影响很小，满足期望要求.

5 结 论

本文基于多维空间基底排序的思想，提出了一种新的控制分配方法，该方法适用于解决多维冗余系统的在线分配问题，并能在满足优化目标的情况下获得目标可达集中所有的解，同时该方法还可处理当 B 中存在线性相关向量情况下的控制分配问题.

在设计中对控制分配问题的描述沿用传统线性映射的方式，但随着舵面非线性程度的增加，必然存在一定计算误差，需要在此基础上进一步研究其控制系统的设计，保证分配结果收敛.

参考文献（References）

[1] Beck R E. Application of control allocation methods to linear systems with four or more objectives[D]. Blacksburg, Virginia: Virginia Polytechnic Institute and State University, 2002

[2] Enns D. Control allocation approaches[R]. AIAA-98-4409, 1998

[3] 李卫琪. 先进布局飞机的自修复飞控系统研究[D]. 北京:北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院,2004
Li Weiqi. Research on the self-repairing flight control systems for advanced aircraft configuration [D]. Beijing: School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2004(in Chinese)

[4] Durham W C. Computationally efficient control allocation [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2001,24(3):519－524

[5] Bodson M. Evaluation of optimization methods for control allocation[R]. AIAA-2001-4223, 2001

[6] Durham W C, Leedy J Q. Real-time evaluation of control allocation with rate limiting[R]. AIAA-98-4460, 1998

[7] Addington G A, Myatt J H. Control-surface deflection effects on the innovative control effectors (ICE 101) design [R]. AFRL-VA-WP-TR-2000-3027,2000

[8] 柳嘉润,申功璋. 基于逆动力学和在线参数辨识的飞机姿态控制[J]. 北京航空航天大学学报,2005,31(2):111－115
Liu Jiarun, Shen Gongzhang. Attitude control based on inverse dynamics and online parameter identification[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2005, 31(2):111－115 (in Chinese)

(责任编辑:刘登敏)