基于 DFT 的正弦波初相估计算法及误差分析

李春宇 张晓林 张 展 常 江

(北京航空航天大学 电子信息工程学院, 北京 100083)

摘 要: 提出一种基于 DFT(Discrete Fourier Transforms)频谱相位信息的正弦波初相高精度估计方法. 该方法通过截取正弦波的两段长度不同的离散序列,利用它们的 DFT 系数来消去正弦信号的频率项,从而估计其初相. 同时,给出了在高斯白噪声背景下,利用该种方法进行正弦波初相估计的均方根误差计算公式,此公式表明了均方根误差与信噪比及 FFT (Fast Fourier Transforms)长度之间的关系. 并以此均方根误差最小化为目标,对该估计方法进行了优化改进,得到方法中参数的最优选取方案. 选择最优参数的过程即是对以均方根误差最小为目标的整数规划问题的求解过程. 应用 Monte Carlo 仿真,将改进后的算法的性能与已有的几种典型算法的性能及 Cramer-Rao 下限进行了分析比较,并验证了所推导的均方根误差计算公式的正确性.

关 键 词: 初相估算; 离散傅里叶变换; 误差分析

中图分类号: TN 911.72

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2007)05-0580-05

Phase estimation of sinusoid signal based on DFT and error analysis

Li Chunyu Zhang Xiaolin Zhang Zhan Chang Jiang

(School of Electronics and Information Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: A fast and accurate estimation technique of initial phase of single-tone signal based on the phase of discrete Fourier transforms (DFT) spectrum was proposed. The initial phase is obtained by removing the frequency item in the multinomial using the DFT coefficient which is from two discrete sinusoid signal sequences of different length. The root mean square error (RMSE) formula of initial phase estimation under Gaussian white noise was derived that presents the relationship among RMSE, fast Fourier transforms (FFT) length and signal noise ratio (SNR). The parameters in the formula were studied and optimized to minimize the RMSE. The process of which is to solve the integer programming problem with the objective function that RMSE is minimal. Through Monte Carlo simulation, the performance of the improved technique was compared with other typical algorithms and Cramer-Rao lower bound (CRLB), the RMSE formula is found to be effective.

Key words: phase measurement; discrete Fourier transforms; error analysis

正弦波信号的参数估计在测控通信、雷达等领域中具有重要的应用价值,而对被噪声污染的正弦波信号的初相估计是其中的一个重要课题. 基于参数模型的谱估计、最大熵谱估计等方法具有分辨力高的优点,但对于长序列,其运算量大,不利于实时处理. 目前,测控通信等系统对于信号处理速度的要求显著提高,因此上述方法很难满足其实时性处理的要求. 而基于 DFT(Discrete Fourier Transforms)的谱分析方法可采用 FFT (Fast Fourier Transforms)算法,其具有运算速度快的优点,适合于实时信号处理. 但 DFT 的初位估计精度取决于接收信号的时间长度. 时间过短,DFT 的估计精度受到限制;时间过长,又会给实时处理带来困难. 如何应用 DFT 方法,利用有

收稿日期: 2006-05-31

作者简介: 李春宇(1981—),男,辽宁鞍山人,博士生,lichunyu@ee.buaa.edu.cn.

限时间的信号来提高初相估计的精度成为研究的热点问题. 文献[1]利用插值 DFT 的方法对正弦信号进行初相估计;文献[2]分析了不同窗函数下用插值 DFT 方法进行正弦信号初相估计的性能;文献[3]则利用 DFT 频谱的相位来提高初相的测量精度.

本文在文献[4－5]算法思想的基础上,提出一种利用 DFT 频谱的相位信息进行正弦信号初相估计的方法. 同时,分析了在高斯白噪声背景下利用该方法进行正弦信号初相估计的误差,并推导出该方法下初相估计的均方根误差与信噪比及 FFT 长度之间的关系式. 然后,在估计方差最小化准则下,对估计方法进行了改进. 最后,利用 Monte Carlo 仿真对改进后的算法(简称改进算法)及已有的几种典型的初相估计方法进行了比较分析,并对均方根误差的推导结果进行了验证.

1　初相估计原理

设接收信号为单一频率复正弦波信号

$$s(t)=a\cdot\exp[\mathrm{j}(2\pi f_0 t+\phi_0)] \tag{1}$$

其中,a, f_0 和 ϕ_0 分别为信号的幅度、频率和初相. 对接收的信号进行采样,设 $s(t)$的接收时间为 T,采样间隔为 Δt,总采样点数为 N,则 $T=N\cdot\Delta t$,采样序列可以记为

$$s(n)=a\cdot\exp[\mathrm{j}(2\pi f_0 n\Delta t+\phi_0)]\quad n=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{2}$$

对 $s(n)$进行 N 点的 DFT,得到离散频谱

$$S(k)=\sum_{n=0}^{N-1}a\cdot\exp[\mathrm{j}(2\pi f_0 n\Delta t+\phi_0)]\cdot\exp(-\mathrm{j}2\pi nk/N)=a\cdot\exp(\mathrm{j}\phi_0)\cdot\sum_{n=0}^{N-1}\exp[-\mathrm{j}(2\pi nk/N-2\pi f_0 n\Delta t)] \tag{3}$$

设 $\beta(k)=2\pi\left(\dfrac{k}{N\Delta t}-f_0\right)$, 则

$$S(k)=a\cdot\exp(\mathrm{j}\phi_0)\cdot\exp[\mathrm{j}(N-1)\beta(k)\Delta t/2]\cdot\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\exp[-\mathrm{j}\pi\beta(k)\Delta t]=a\cdot\exp(\mathrm{j}\phi_0)\cdot\exp[-\mathrm{j}(N-1)\beta(k)\Delta t/2]\cdot\frac{\sin[N\beta(k)\Delta t/2]}{\sin[\beta(k)\Delta t/2]} \tag{4}$$

所以 $S(k)$的相位项为

$$\varphi_k=\phi_0+\pi\left(1-\frac{1}{N}\right)(f_0N\Delta t-k)=\arctan\left\{\frac{\mathrm{Im}[S(k)]}{\mathrm{Re}[S(k)]}\right\} \tag{5}$$

幅度项为

$$A_k=\frac{a\sin[N\beta(k)\Delta t/2]}{\sin[\beta(k)\Delta t/2]}=\frac{a\sin[\pi(k-f_0T)]}{\sin[\pi(k-f_0T)/N]} \tag{6}$$

对于较大的 N,在主瓣附近,A_k 可近似为

$$A_k\approx Na\,\mathrm{sinc}(\delta) \tag{7}$$

式中,$\mathrm{sinc}(x)=\sin(\pi x)/(\pi x)$,$\delta=k-f_0T$,表示信号实际频率与最大谱线对应的频率的相对偏差,其变化范围为$(-0.5,0.5)$.

为了由接收信号的 DFT 相位信息推导出正弦波的初相表达式,对 $s(t)$取两个不同长度的序列:

$\{s_{N_1}(n)\}$,$n=0,1,2,\cdots,N_1-1$;$\{s_{N_2}(n)\}$,$n=0,1,2,\cdots,N_2-1$;$0<N_2<N_1\leqslant N$.

采样间隔仍然取为 Δt, 对 $\{s_{N_1}(n)\}$ 和 $\{s_{N_2}(n)\}$分别做 DFT,则有

$$S_{N_1}(k)=a\exp\{-\mathrm{j}[(N_1-1)\beta(k)\Delta t/2-\phi_0]\}\cdot\frac{\sin[N_1\beta(k)\Delta t/2]}{\sin[\beta(k)\Delta t/2]} \tag{8}$$

$$S_{N_2}(k)=a\exp\{-\mathrm{j}[(N_2-1)\beta(k)\Delta t/2-\phi_0]\}\cdot\frac{\sin[N_2\beta(k)\Delta t/2]}{\sin[\beta(k)\Delta t/2]} \tag{9}$$

设 k_1,k_2 分别为式(8)、式(9)的最大谱线位置,则

$$\varphi_{k_1}=\phi_0+\pi\left(1-\frac{1}{N_1}\right)(f_0N_1\Delta t-k_1)=\arctan\left\{\frac{\mathrm{Im}[S_{N_1}(k_1)]}{\mathrm{Re}[S_{N_1}(k_1)]}\right\} \tag{10}$$

$$\varphi_{k_2}=\phi_0+\pi\left(1-\frac{1}{N_2}\right)(f_0N_2\Delta t-k_2)=\arctan\left\{\frac{\mathrm{Im}[S_{N_2}(k_2)]}{\mathrm{Re}[S_{N_2}(k_2)]}\right\} \tag{11}$$

联立式(10)、式(11),经过整理可得

$$\phi_0=\varphi_{k_1}-\pi\left(1-\frac{1}{N_1}\right)\left\{\frac{N_1}{N_1-N_2}\left[\frac{\varphi_{k_1}-\varphi_{k_2}}{\pi}+k_1\left(1-\frac{1}{N_1}\right)-k_2\left(1-\frac{1}{N_2}\right)\right]-k_1\right\} \tag{12}$$

或

$$\phi_0=\varphi_{k_2}-\pi\left(1-\frac{1}{N_2}\right)\left\{\frac{N_2}{N_1-N_2}\left[\frac{\varphi_{k_1}-\varphi_{k_2}}{\pi}+k_1\left(1-\frac{1}{N_1}\right)-k_2\left(1-\frac{1}{N_2}\right)\right]-k_2\right\} \tag{13}$$

将 $\varphi_{k_1}=\arctan\left\{\dfrac{\mathrm{Im}[S_{N_1}(k_1)]}{\mathrm{Re}[S_{N_1}(k_1)]}\right\}$ 和 $\varphi_{k_2}=\arctan\left\{\dfrac{\mathrm{Im}[S_{N_2}(k_2)]}{\mathrm{Re}[S_{N_2}(k_2)]}\right\}$代入式(12)或式(13),便得到初相的估计值 $\hat{\phi}_0$.

2　估计误差分析

在实际的测量环境中,必然有噪声存在,所以

在噪声背景下的初相估计误差是必须考虑的问题.这里对所提出的方法在高斯白噪声背景下的初相估计误差进行了分析,并从理论上推导出误差的表达式.

在加性白噪声背景下,接收信号可表示为 $x(t)=s(t)+z(t)$.其中 $s(t)$ 为式(1)所表示的纯信号,$z(t)$ 为高斯白噪声.在 $0\sim T$ 仍然以 Δt 为间隔,对 $x(t)$ 进行采样,得到长度为 N 的采样序列:

$$x(n)=s(n)+z(n)\quad n=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{14}$$

式中,$s(n)$ 即为式(2);$z(n)$ 为零均值高斯白噪声序列,其方差为 σ_z^2,采样序列的信噪比为 $\mu=a^2/\sigma_z^2$.由文献[6]分析可得,在 DFT 最大谱线处,叠加在 DFT 相位上的噪声的方差为

$$\mathrm{var}(\varphi_k)=\frac{N\sigma_z^2}{2A_k^2} \tag{15}$$

将式(7)代入式(15),整理得

$$\mathrm{var}(\varphi_k)=\frac{1}{2N\mathrm{sinc}^2(\delta)\mu} \tag{16}$$

由式(12)(或式(13))可得初相估计的方差为

$$\mathrm{var}(\hat{\phi}_0)=\left(\frac{N_2-1}{N_1-N_2}\right)^2\cdot\mathrm{var}(\varphi_{k_1})+\left(\frac{N_1-1}{N_1-N_2}\right)^2\cdot\mathrm{var}(\varphi_{k_2}) \tag{17}$$

式中 $\mathrm{var}(\varphi_{k_1})$,$\mathrm{var}(\varphi_{k_2})$ 的分析方法与 $\mathrm{var}(\varphi_k)$ 相同,所以有

$$\mathrm{var}(\varphi_{k_1})=\frac{1}{2N_1\mathrm{sinc}^2(\delta)\mu} \tag{18}$$

$$\mathrm{var}(\varphi_{k_2})=\frac{1}{2N_2\mathrm{sinc}^2(\delta)\mu} \tag{19}$$

将式(18)、式(19)代入式(17)整理可得

$$\mathrm{var}(\hat{\phi}_0)=\frac{1}{2(N_1-N_2)^2\mathrm{sinc}^2(\delta)\mu}\cdot\left[\frac{(N_2-1)^2}{N_1}+\frac{(N_1-1)^2}{N_2}\right] \tag{20}$$

所以有初相估计的均方根误差为

$$\sigma_{\phi_0}=\frac{1}{(N_1-N_2)\cdot\mathrm{sinc}(\delta)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2\mu}\left[\frac{(N_2-1)^2}{N_1}+\frac{(N_1-1)^2}{N_2}\right]} \tag{21}$$

上式表明初相估计的均方根误差与下面几个因素有关:信噪比,两段序列的采样长度,信号的实际频率与 FFT 频谱最大谱线对应频率的相对偏差 δ.提高信噪比可以降低均方根误差.在式(21)中,对 δ 在 $0\sim0.5$ 范围内取平均,则初相估计的平均均方根误差可近似表示为

$$\bar{\sigma}_{\phi_0}=\frac{0.81}{(N_1-N_2)}\sqrt{\frac{1}{\mu}\left[\frac{(N_2-1)^2}{N_1}+\frac{(N_1-1)^2}{N_2}\right]} \tag{22}$$

3 改进的初相估计算法

本节对第 2 部分中的初相估计方法进行了优化改进.在式(22)中,测量中 μ 为定值,$0<N_2<N_1\leqslant N$,$N_1,N_2\in\mathbf{Z}^+$($\mathbf{Z}^+$ 为正整数集合).为使均方根误差最小,则问题转化为以 N_1,N_2 为决策变量,$\min(\sigma_{\phi_0})$ 为目标函数的整数规划问题.在给定 $T,\Delta t$ 的条件下,$N=T/\Delta t$,则可求出使 σ_{ϕ_0} 最小的 N_1,N_2 的值.由代数方法可求出使 $\bar{\sigma}_{\phi_0}$ 最小的 N_1,N_2 的解为:$N_1=N$.设方程 $2x^3-2x^2+3N(N-1)x-N^2(N-1)=0$ 的实数解为 x_0,则 N_2 在 x_0,$[x_0]$,$[x_0]+1$ 中使 $\bar{\sigma}_{\phi_0}$ 最小的整数处取得.由于上述的整数规划模型中仅有两个决策变量,所以也可以使用全局搜索法来进行求解.在实际应用中,为了使初相估计的误差最小,可以先依据上述方法求出所选用的 N_1 和 N_2 的值,然后将 N_1,N_2 代入式(12)或式(13),进行初相估计.

改进的初相估计算法可以概括为:

1) 根据接收时间 T,采样频率 f_s(或采样间隔 Δt),计算总采样点数 N.

2) 根据算出的 N 值及式(22)的推导结果,在 $\bar{\sigma}_{\phi_0}$ 最小化的原则下,求出相应的 N_1 和 N_2 的值;N_1,N_2 的求解可依据上文结论.

3) 将求出的 N_1,N_2 代入式(12)或式(13),进行初相估计.

4 计算机仿真结果与分析

采用 Monte Carlo 仿真对本文提出的初相估计方法进行了仿真分析.仿真参数设置为:$a=1$,$\phi_0=\pi/6$,$T=0.1024$ s,$f_s=20$ kHz.

根据改进算法的思想,进行 N_1,N_2 的求解.$N=f_s\cdot T=2048$.所以,$N_1=2048$;$2x^3-2x^2+3N(N-1)x-N^2(N-1)=0$ 的实数解为 $x_0=640.9$,因为 $\bar{\sigma}_{\phi_0}^2$($N_1=2048$,$N_2=641$)小于 $\bar{\sigma}_{\phi_0}^2$($N_1=2048$,$N_2=640$),所以取 $N_2=641$.

若按照全局搜索法来进行 N_1,N_2 的求解,其搜索结果如图 1 所示.

从图 1 可见,N_1,N_2 所取参数不同时,方差会有较大变化,特别是当 N_1,N_2 取值接近时,方差迅速增大.所以,N_1,N_2 应寻求上述的最优解.同时,从计算机全局搜索的计算结果也可得,当 $N_1=2048$,$N_2=641$ 时,$\bar{\sigma}_{\phi_0}$ 有最小值.这个结果与上文的理论计算结果完全一致.因此 $N_1=2048$,$N_2=641$,作为估计式中的取值.

当 $\mu=6$ dB,$f_0=1000+\delta\Delta f$,($\delta=0,0.1,0.$

2,0.3,0.4,0.5)时,通过 500 次的 Monte Caro 仿真对几种典型方法的初相估计性能进行了分析比较,结果如表 1 所示.

由表 1 可见,在常规信噪比下,改进算法的性能优于表中所列的其他方法.$\delta=0\sim0.5$ 变化时,改进算法初相估计的平均值更加接近真实值,估计的平均方差最小,显示了改进算法的有效性.同时,从仿真结果可以看到,改进方法的估计均方根误差的仿真结果与本文所推导的估计均方根误差的计算结果基本吻合,从而验证了本文所推导的初相估计均方根误差计算公式的正确性.

当 $f_0=1$ kHz 时,延用上面的仿真参数,比较本文的改进算法及几种典型的初相估计方法的均方根误差随信噪比的变化情况,如图 2 所示.

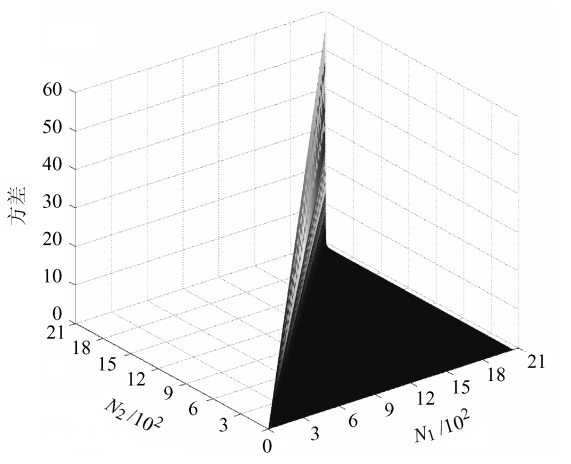


图 1　$N=2048$ 时,方差随 N_1,N_2 变化的全局搜索示意图

表 1　几种初相估计方法的性能比较

δ	载波频率/Hz	初相/rad	本文的改进算法		文献[1] 方法		文献[3]方法		推导的改进算法的估计误差
			均值/rad	均方根误差/rad	均值/rad	均方根误差/rad	均值/rad	均方根误差/rad	
0	1000	0.5236	0.5231	0.0283	0.5292	0.0247	0.5214	0.0265	0.0238
0.1	1000.98	0.5236	0.5252	0.0279	0.5257	0.0247	0.5211	0.0284	0.0242
0.2	1001.95	0.5236	0.5247	0.0290	0.5264	0.0248	0.5171	0.0287	0.0255
0.3	1002.93	0.5236	0.5232	0.0294	0.5239	0.0247	0.5197	0.0307	0.0277
0.4	1003.91	0.5236	0.5220	0.0280	0.5234	0.0278	0.5191	0.0341	0.0315
0.5	1004.88	0.5236	0.5212	0.0293	0.4737	0.1877	0.5185	0.0365	0.0374
平均误差			0.5232	0.02865	0.51705	0.0524	0.5194	0.0308	0.02835

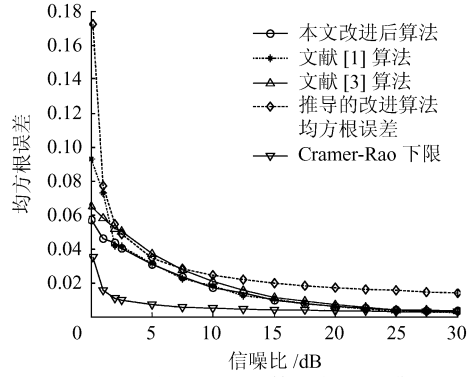


图 2　本文的改进算法与几种典型初相估计方法性能比较

由图 2 可见,在较低信噪比时,改进算法的均方根误差要小于文献[1]算法;在常规信噪比及较高信噪比时,两种算法的性能相近.在仿真的信噪比变化范围内,改进算法的均方根误差要小于文献[3] 算法;由仿真所得的改进算法的均方根误差要略低于本文推导出的相应值,在 5 dB 附近的常规信噪比时两者最为接近.同时可以看出,几种算法的均方根误差均略高于 Cramer-Rao 下限;但在较高的信噪比时,几种算法与 Cramer-Rao 下界变得十分接近.

5　结 束 语

针对测控通信、雷达等系统中信号处理的实际应用需求,本文提出了一种利用 DFT 系数的相位信息进行正弦信号初相估计的方法,并从理论上推导了这种方法的均方根误差.然后,以所推导的均方根误差最小化为目标,对提出的估计方法进行了改进,确定了该初相估计方法中的参数最佳选择方案.应用 Monte Carlo 仿真,对本文改进后的初相估计方法、文献[1]方法及文献[3]方法进行了分析比较.由仿真结果可见,在不同仿真条件下,本文经过改进后的初相估计算法的估计误差均小于或接近于其他算法,显示了良好的性能.同时,本文所推导的估计算法的均方根误差与仿真结果基本吻合,验证了理论推导的正确性.

本文所提出的方法及其改进算法的运算量主要来源于 DFT,由于可以引入 FFT,所以易于硬件实现和对信号进行实时处理,因此具有广泛的

应用前景.

参考文献（References）

[1] Jain V K, Collins W L, Davis D C. High-accuracy analog measurements via interpolated FFT [J]. IEEE Trans on IM, 1979, 28 (2): 113－122

[2] Dusan Agrez. Improving phase estimation with leakage minimization [J]. IEEE Trans on IM, 2005,54(4):1347－1353

[3] 齐国清,贾欣乐. 基于DFT相位的正弦波频率和初相的高精度估计方法[J]. 电子学报,2001,29(9):1164－1167
Qi Guoqing, Jia Yule. High-accuracy frequency and phase estimation of single-tone based on phase of DFT [J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(9):1164－1167(in Chinese)

[4] 刘渝. 正弦波频率快速估计方法[J]. 数据采集与处理, 1998, 13(1):8－11
Liu Yu. Fast frequency estimation of single tone [J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 1998, 13(1):8－11 (in Chinese)

[5] 刘渝. 快速高精度正弦波频率估计综合算法[J]. 电子学报, 1999,27(6):126－128
Liu Yu. A fast and accurate single frequency estimator synthetic approach [J]. Acta Electronica Sinica, 1999,27(6): 126－128 (in Chinese)

[6] 齐国清. 利用FFT相位差校正信号频率和初相估计的误差分析[J]. 数据采集与处理,2003,18(1):7－11
Qi Guoqing. Error analysis of frequency and phase estimations based on phase difference of segmented FFTs [J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2003, 18(1):7－11(in Chinese)

[7] Rife D C, Boorstyn P R. Single tone parameter estimation from discrete-time observations [J]. IEEE Trans Info Theory, 1974, IT-20(5): 591－598

[8] Christ D Richmond. On the probability of resolution for the amplitude and phase estimation (APES) spectral estimation [C] //The 30th International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP2005). Philadelphia, USA: IEEE, 2005:iv/1025 - iv/1028

(责任编辑:娄 嘉)

(上接第551页)

参考文献（References）

[1] Zhang Shiwen,Cheung Chuikuan. Modeling error propagation in vector-based overlay analysis[J]. Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 2004,59(2): 47－59

[2] Bowser M, Hammond J, Perlmutter M,et al. Broad fiber optic gyroscopes for a broad range of applications[C]// In Proceedings of the Position, Location and Navigation Symposium. Atlanta: IEEE, 2004:553－558

[3] 延风平,简水生. 光纤陀螺温度补偿的实验研究[J]. 光电子·激光, 1999,10(1):28－32
Yan Fengping, Jian Shuisheng. Study on fiber optic gyro temperature compensation[J]. Photoelectron · Laser,1999, 10(1):28－32(in Chinese)

[4] Tuckness M, Dan G. Analysis of optical navigation error during mass enery applied mathematics and computation [J]. Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 2004, 80(1):1－22

[5] Ruffin P B, Smith R H. Fiber windng approaches for environmentally robust IFOG sensor coils,components for fiber optic applications[C] // Transactions on Aerospace and Electronic Systems. San Diego:IEEE,1992:179－189

[6] Sawyer J, Ruffin P B, Sung C C. Investigation of the effiects of temporal thermal gradients in fiber optic gyroscope sensing coils[J]. Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 1997,36(1):29－34

[7] Wanser K H. Fundamental phase noise limit in optical fibers due to temperature fluctuations[J]. Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 1992,28(1):53－54

(责任编辑:刘登敏)