随机结构功能模糊性的定量分析

陈建军 江 涛 张驰江

(西安电子科技大学机电工程学院，西安 710071)

摘 要：针对率模可靠性理论应用中结构功能函数对结构安全(模糊事件)的隶属函数往往涉及主观因素的问题，对随机结构功能的模糊性产生根源进行了初步探索：利用等效水平截集处理功能函数的各随机分量，将连续随机向量映射为标准区间向量；在标准区间向量张成的凸域及其扩展空间中，研究截集水平和基于区间分析的结构非概率可靠性指标之间的定量关系.所得的非概率可靠性指标作为截集水平的连续严格单调增函数，能反映出结构功能的内在模糊性.初步找到了依据结构功能函数自身特征建立不涉及主观因素的安全隶属函数的桥梁.

关 键 词：率模可靠性；结构功能；客观隶属函数；功能函数；λ 截集

中图分类号：TB 114.3

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2007)03-0345-05

Qualitative and quantitative analysis of fuzziness for stochastic structure performance

Chen Jianjun Jiang Tao Zhang Chijiang

(School of Electromechanical Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: To overcome the deficiency that the safety membership function of a structure or a system in safety engineering sometimes involves subjectivity in the application of profust reliability theory, a preliminary study was made for finding out the rootstock of the performance fuzziness of a random system. The performance fuzziness for a general random structure system was quantified by translating random vectors into standard interval vectors, that is, the density functions of random vectors was intercepted by an equivalent horizontal cut set. A non-probabilistic reliability index was proposed to measure the fuzziness of the structural performance, and the index was defined in a convex domain a subspace of the standard interval vector space and in its extended space. Not only does the index offer to what extent the structure is safe but also depicts to what extent the structure has been failure. Consequently the index is proposed to characterize the fuzziness for the structural performance.

Key words: profust reliability; structural performance; impersonality membership function; performance function; λ cut set

1 问题的提出

经典的基于概率模型的可靠性理论忽略了结构从安全向失效或从失效向安全渐变的过渡性，即忽略了结构功能的模糊性.其不合理性已被人们所认知.文献[1－2]提出的率模可靠性(profust reliability)理论能够克服以上的不合理性，它基于两个基本假设：①概率假设，影响结构功能的不确定性参量都是随机变量；②模糊状态假设，结构安全与失效之间存在平滑过渡.设 $\boldsymbol{X}=(R,$

收稿日期：2006-04-04

基金项目：国防预研基金资助项目(51421060505DZ0155)；陕西省自然科学基金资助项目(2005A009).

作者简介：陈建军，男(1951－)，河北保定人，教授，jjchen@xidian.edu.cn.

S)为影响结构力学行为的广义随机强度 R 和广义随机应力 S 组成的二维向量,则结构状态变量 M 可表示为

$$M=g(\boldsymbol{X})=g(R,S)=R-S \tag{1}$$

设 M 的概率密度函数为 $F_M(m)$,M 对结构安全这一模糊概念的隶属函数记作 $\mu_M(m)$,则率模可靠度公式为[2]

$$R^f=\int_{-\infty}^{+\infty}F_M(m)\mu_M(m)\mathrm{d}m \tag{2}$$

该公式已得到广泛应用[3-6],但大都采用主观确定 $\mu_M(m)$ 的方法,即由专家给出或有限工程经验数据的拟合. 这两种方法在工程实践中不失其有效性,但 $\mu_M(m)$ 在一定程度上反映的是人对结构功能模糊性的主观认知. 文献[7]认为任意结构其功能的模糊性应该与其功能函数相关,即 $\mu_M(m)$ 与 $F_M(m)$ 的相关,提出将功能函数的线性函数假想为集值统计的随机集边界点,通过定积分运算获得客观隶属函数的方法. 该方法得到的 $\mu_M(m)$ 具有一定的科学性,但未能指出结构功能模糊性产生的根源.

本文对结构功能模糊性产生的根源进行了初步探索,以期在此基础上建立依据 $F_M(m)$ 的特征构造 $\mu_M(m)$ 的解析方法. 梗概如下:利用等效 λ 水平截集处理式(1)中随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的各个分量,将其变换为区间向量,再将区间向量映射为标准区间向量 $\boldsymbol{\delta}=(\delta_r,\delta_s)$,这样状态变量 M 就可表示成 $\boldsymbol{\delta}=(\delta_r,\delta_s)$ 和 λ 的函数. 在标准区间向量张成的凸域及其扩展空间中,研究 λ 和非概率可靠性指标 η(基于区间分析,区别于经典可靠性指标 β)的定量关系. 研究发现:η 作为截集水平 λ 的连续严格单调增函数,能反映出结构状态的平滑过渡,即功能的模糊性:$\eta>1$ 时,结构处于安全状态,且距离失效还有一定的裕度;$\eta=1$ 时,结构处于临界状态;$\eta<1$ 时,结构进入失效状态. 得出定性结论:η 增大的过程可解释为结构的安全状态 $\mu_M(m)$ 增强的过程,同时也是失效状态 $1-\mu_M(m)$ 减弱的过程. 从而初步找到了依据结构功能函数特征,从客观上建立结构对安全的隶属函数的桥梁.

2 基于区间模型的结构功能模糊性的数学表征

λ 水平截集法常用于处理模糊数(模糊变量)[8-9]. 随机变量的概率密度函数与模糊数的共同之处在于:绝大多数都是凸函数,即都有最大值点. 唯一不同之处在于随机变量的概率密度函数的最大值不一定为 1. 由于式(1)中随机向量 $\boldsymbol{X}=(R,S)$ 的各分量概率密度函数 $f_R(r)$ 和 $f_S(s)$ 的最大值往往不同,为方便对它们的处理,定义等效截集水平

$$\lambda\in[0,\min\{(f_R(r)),\max(f_S(s))\}]$$

用 λ 截取 $f_R(r)$ 和 $f_S(s)$,则式(1)中 R 和 S 的任一水平截集表示两个区间,分别记作 $\{r|f_R(r)\geqslant\lambda\}\triangleq[r^l(\lambda),r^u(\lambda)]$ 和 $\{s|f_S(s)\geqslant\lambda\}\triangleq[s^l(\lambda),s^u(\lambda)]$,其上、下界限分别为

$$\begin{cases}r^l(\lambda)=(f_R^l)^{-1}(\lambda)\\ r^u(\lambda)=(f_R^r)^{-1}(\lambda)\end{cases}\text{和}\begin{cases}s^l(\lambda)=(f_S^l)^{-1}(\lambda)\\ s^u(\lambda)=(f_S^r)^{-1}(\lambda)\end{cases}$$

式中,$(f_R^l)^{-1}(\cdot)$,$(f_R^r)^{-1}(\cdot)$ 分别表示最大值点 $\max(f_R(r))$ 左右两侧的 $f_R(r)$ 的反函数;$(f_S^l)^{-1}(\cdot)$,$(f_S^r)^{-1}(\cdot)$ 含义相同.

将区间 $[r^l(\lambda),r^u(\lambda)]$ 和 $[s^l(\lambda),s^u(\lambda)]$ 中的任意元素分别用标准化区间变量 $\delta_r\in[-1,1]$ 和 $\delta_s\in[-1,1]$ 表示为

$$\left.\begin{aligned}R&=r^c(\lambda)+r^r(\lambda)\delta_r\\ S&=s^c(\lambda)+s^r(\lambda)\delta_s\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式中,$r^c(\lambda)=[r^l(\lambda)+r^u(\lambda)]/2$;$r^r(\lambda)=[r^u(\lambda)-r^l(\lambda)]/2$;$s^c(\lambda)$,$s^r(\lambda)$ 含义相同.

将式(3)代入式(1),并令其等于 0,可得标准区间变量空间中的失效面为

$$\begin{aligned}M=g(R,S)=G(\lambda,\delta_r,\delta_s)=r^c(\lambda)+\\ r^r(\lambda)\delta_r-s^c(\lambda)-s^r(\lambda)\delta_s=0\end{aligned} \tag{4}$$

据连续功能函数的基于区间分析的非概率可靠性指标定义[10-11],针对式(4),非概率可靠性指标 η 定义为:标准区间向量 $\boldsymbol{\delta}=(\delta_r,\delta_s)$ 张成的凸域 $C^2_{|\delta|<1}=\{(\delta_r,\delta_s):|\delta_r|\leqslant1,|\delta_s|\leqslant1\}$ 及其扩展空间 $C^{\infty^2}_{\delta}=\{(\delta_r,\delta_s):\delta_r,\delta_s\in(-\infty,+\infty)\}$ 中,按 ∞ 范数度量的从坐标原点到失效面的最短距离,η 可被表示为

$$\begin{cases}\eta=\min\{\|\boldsymbol{\delta}\|_\infty\}\\ \text{subject to } M=0\end{cases}\triangleq\begin{cases}\eta=\min\{\max(|\delta_r|,|\delta_s|)\}\\ \text{subject to } G(\lambda,\delta_r,\delta_s)=0\end{cases} \tag{5}$$

由于式(4)是 $\boldsymbol{\delta}$ 的线性函数,所以区间运算能够在 $C^{\infty^2}_{\delta}$ 中保持线性特性[12-13],故式(5)等价于

$$\eta=\begin{cases}\dfrac{M^c}{M^r} & M^c>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\triangleq\begin{cases}\dfrac{r^c(\lambda)-s^c(\lambda)}{r^r(\lambda)+s^r(\lambda)} & r^c(\lambda)-s^c(\lambda)>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \tag{6}$$

可见,非概率可靠性指标 η 是状态变量 M 的连续函数,也是 λ 的连续函数. 不同的 λ 将得到不同的 η,而不同的 η 又代表 M 的不同取值,即结构

所处功能状态的不同,故 η 可表征拥有确定功能函数的结构功能的模糊性.

3　标准区间向量空间中 η 的数学特征

3.1　η 是截集水平 λ 的单增函数

文献[13]对不确定性变量均为模糊数时,基于区间分析的非概率可靠性指标 η^f 对截集水平 $\lambda^f(\lambda^f\in[0,1])$ 的单调性给予了证明. 式(6)中 η 对 $\lambda\in[0,\min\{\max(f_R(r)),\max(f_S(s))\}]$ 的单调性证明与之类似,虽不复杂但篇幅较长. 由于以上所述随机变量与模糊数的共同特点,故此处的 η 单调性证明可参见文献[13].

3.2　η 的几何表示

为了形象地用几何图形表示出式(5)和式(6)给出的代表结构功能的 η 在标准区间向量 $\boldsymbol{\delta}=(\delta_r,\delta_s)$ 张成的凸域 $C^{c2}_{|\delta|<1}$ 及其扩展空间 $C^{\infty 2}_{\delta}$ 中具有模糊性,需证明:η 可在通过原点($\delta_r=0,\delta_s=0$)和顶点($|\delta_r|=1,|\delta_s|=1$)的某一条射线与失效面的交点处取得,且在数值上等于交点坐标的绝对值. 为使证明具有代表性,将标准区间向量的维数扩展为任意 n 维,证明过程需引入 2 范数.

设 n 维空间 $C^{\infty n}_{\delta}=\{\boldsymbol{\delta}:\delta_i\in(-\infty,+\infty),i=1,2,\cdots,n\}$ 中,标准区间向量 $\boldsymbol{\delta}=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$ 张成的凸域 $C^{cn}_{|\delta|<1}=\{\boldsymbol{\delta}:|\delta_i|\leqslant 1,i=1,2,\cdots,n\}$ 有 2^n 个顶点,记作 $P^j_{|\delta|<1}=(\boldsymbol{\delta}:|\delta_i|=1,i=1,2,\cdots,n\}$ $(j=1,2,\cdots,2^n)$. 通过原点与 $P^j_{|\delta|<1}$,必然可形成 2^{n-1} 条超射线. 若 2^{n-1} 条超射线中一条或若干条与失效面 $M=G(\boldsymbol{\delta})=0$ 相交(交点的个数取决于失效面的空间形状),交点处必然满足

$$\left.\begin{aligned} &M=G(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)=0\\ &|\delta_i|=|\delta_j| \quad i,j=1,2,\cdots,n\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

设 $\boldsymbol{\delta}=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$ 是 C^{∞}_{δ} 中失效面 $M=G(\boldsymbol{\delta})=0$ 上的任意点,其一定满足

$$M=f(\boldsymbol{\delta})=f(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)=0 \tag{8}$$

$\boldsymbol{\delta}=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$ 的 ∞ 范数和 2 范数分别为 $\|\boldsymbol{\delta}\|_{\infty}=\max\{|\delta_1|,|\delta_2|,\cdots,|\delta_n|\}$ 和 $\|\boldsymbol{\delta}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}$. 由于 ∞ 范数和 2 范数在测度上等价且存在如下关系[14]

$$\|\boldsymbol{\delta}\|_2\leqslant\sqrt{n}\,\|\boldsymbol{\delta}\|_{\infty} \tag{9}$$

由上式可得 $\boldsymbol{\delta}$ 的 2 范数和结构的 η 关系

$$\min\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{\delta}\|_2\right\}=\frac{1}{\sqrt{n}}\min\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}\right\}\leqslant\eta=\min\{\|\boldsymbol{\delta}\|_{\infty}\}=\min\{\max\{|\delta_1|,|\delta_2|,\cdots,|\delta_n|\}\} \tag{10}$$

只有当 $|\delta_1|=|\delta_2|=\cdots=|\delta_n|$ 时,式(10)中的等号才成立,即式(9)和式(10)中的 $\|\boldsymbol{\delta}\|_{\infty}$ 取得其最小值 $\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{\delta}\|_2$,即 η 的取值. 进一步设

$$|\delta_1|=|\delta_2|=\cdots=|\delta_n|=\psi(\text{任意正实数})$$

可得

$$\eta=\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{\delta}\|_2=\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\psi^2}=\frac{\sqrt{n\psi^2}}{\sqrt{n}}=\psi \tag{11}$$

可见能够得到 η 的点同时满足式(8)和式(11),将二者联立可得式(7),得证.

以上述证明为理论基础,则式(5)和式(6)表示的 η 可在通过 $C^{\infty 2}_{\delta}$ 的原点($\delta_r=0,\delta_s=0$)和 $C^{c2}_{|\delta|<1}$ 的 4 个顶点($(\delta_r=1,\delta_s=1);(\delta_r=-1,\delta_s=-1);(\delta_r=1,\delta_s=-1);(\delta_r=-1,\delta_s=1)$)的 2 条射线($\delta_r-\delta_s=0$ 和 $\delta_r+\delta_s=0$)中的 1 条与失效面的交点处取得.

4　结构功能模糊性的几何解释

图 1 给出了具有代表性的结构功能的模糊性示意图,因式(6)满足 $(r^c(\lambda)-s^c(\lambda))/s^r(\lambda)>0$,$(s^c(\lambda)-r^c(\lambda))/r^r(\lambda)<0$,则 λ 取不同值时,式(4)表示的失效面簇必然与 δ_r 的负半轴及 δ_s 的正半轴相交,且必然与射线 $\delta_r+\delta_s=0$ 相交.

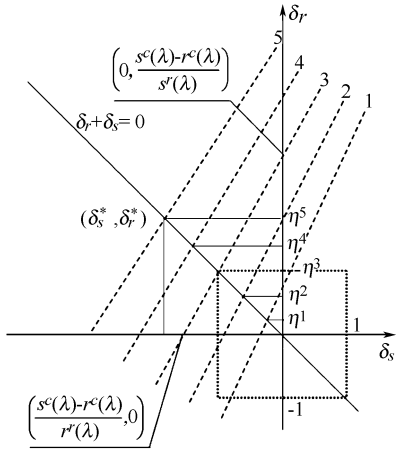

图 1　结构功能的模糊性示意

用图 2 所示满足关系 $\lambda^1<\lambda^2<\lambda^3<\lambda^4<\lambda^5$ 的 $\lambda^i(i=1,2,3,4,5)$ 截取 $f_R(r)$ 和 $f_S(s)$,在图 1 中可得 5 个不同的失效面,即虚线表示的直线1～5. 因 3.1 与 3.2 的结论,可得 λ^i 所对应的 η^i 满足 $\eta^1<\eta^2<\eta^3<\eta^4<\eta^5$,且 η^i 在数值上等于直线 1～5 与射线 $\delta_r+\delta_s=0$ 交点的横或纵坐标绝对值,即 $\eta^i=-\delta_s^*=\delta_r^*$.

可见,当 $\lambda^4<\lambda^5$ 时,均有 $[r^l(\lambda),r^u(\lambda)]\cap[s^l$

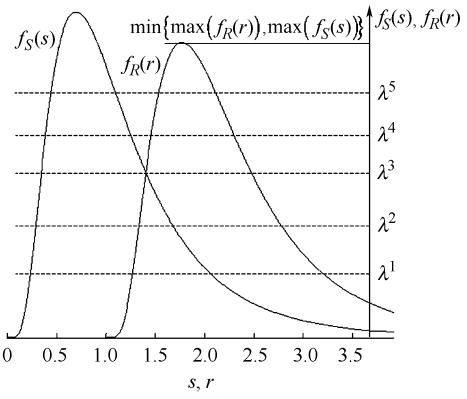

图2 区间变量的交集与功能的模糊性

$(\lambda),s^u(\lambda)]=\varnothing$(空集),不存在应力大于强度的可能,结构绝对安全.对应图1有$1<\eta^4<\eta^5$,即η^5所对应的结构安全程度大于η^4所对应的.

当$\lambda=\lambda^3$时,$[r^l(\lambda),r^u(\lambda)]\cap[s^l(\lambda),s^u(\lambda)]=r^u(\lambda)=s^l(\lambda)$(单点集合).有$\eta^3=1$,结构处于绝对安全与可能失效的临界状态.总体上的安全程度较η^5与η^4有所降低.

当$\lambda^1<\lambda^2$时,$[r^l(\lambda),r^u(\lambda)]\cap[r^u(\lambda),s^l(\lambda)]=[r^u(\lambda),s^l(\lambda)]$(非空集),此时交集中部分区域的应力大于强度,有$0<\eta^1<\eta^2<1$,即$\eta^1$所对应的结构安全程度小于$\eta^2$所对应的.总体上的安全程度较前两种情况又有所降低.

由以上分析可见,虽然结构功能函数以及其中的随机分量的概率密度函数均已确定,但非概率可靠性指标η作为截集水平λ的连续严格单调增函数,能反映出结构所处状态的平滑过渡,即结构功能的模糊性:$\eta>1$时,结构处于绝对安全状态,而且距离失效还有一定的裕度;$\eta=1$时,结构处于临界状态;$\eta<1$时,结构进入失效状态.

此外不再局限于区间$[0,1]$的η不仅可给出结构可靠的可能性度量也可给出其安全裕度信息.

5 正态空间中结构模糊性表达式的推导

正态随机变量在结构可靠性分析和设计中最常用,有必要推导出正态空间中结构模糊性表达式.当式(4)中的$R\sim N(\mu_r,\sigma_r)S\sim N(\mu_s,\sigma_s)$且$\mu_s<\mu_r$时,利用标准区间变量$\delta_r$和$\delta_s$将随机变量$R$和$S$分别表示为

$$R=\mu_r+\sigma_r\sqrt{-2\ln(\lambda\sqrt{2\pi}\sigma_r)}\ \delta_r$$

$$S=\mu_s+\sigma_s\sqrt{-2\ln(\lambda\sqrt{2\pi}\sigma_s)}\ \delta_s$$

则失效面簇可表示为

$$M=\mu_r+\sigma_r\sqrt{-2\ln(\lambda\sqrt{2\pi}\sigma_r)}\ \delta_r-\mu_s-\sigma_s\sqrt{-2\ln(\lambda\sqrt{2\pi}\sigma_s)}\ \delta_s=0$$

上式表示一直线,当$\delta_r=0$时,$\delta_s=\dfrac{\mu_r-\mu_s}{\sigma_s\sqrt{-2\ln(\lambda\sqrt{2\pi}\ \sigma_s)}}>0$;当$\delta_s=0$时,$\delta_r=\dfrac{\mu_s-\mu_r}{\sigma_r\sqrt{-2\ln(\lambda\sqrt{2\pi}\sigma_r)}}<0$.所以易知失效面簇与$\delta_r$的负半轴及$\delta_s$的正半轴相交,$\eta$在射线$\delta_r+\delta_s=0$与失效面簇的交点处取得,其数值为

$$\eta=\frac{\mu_r-\mu_s}{\sigma_r\sqrt{-2\ln(\lambda\sqrt{2\pi}\sigma_r)}+\sigma_s\sqrt{-2\ln(\lambda\sqrt{2\pi}\sigma_s)}}$$

图3绘出了当$\mu_r=8,\sigma_r=0.9,\mu_s=6$并且$\sigma_s=0.8$时,$\lambda$在区间$[0,1/(\sqrt{2\pi}\delta_r)]$内间隔0.025取值时不同的失效面,箭头方向为$\lambda$增大方向.

表1给出η和λ的映射,图4给出当μ_r,μ_s,σ_s取值同上,而σ_r分别取0.9,1.1,1.3,1.5,1.7及1.9时,η与λ的映射曲线及其渐近线,均可显示出结构功能模糊性的平滑过渡.

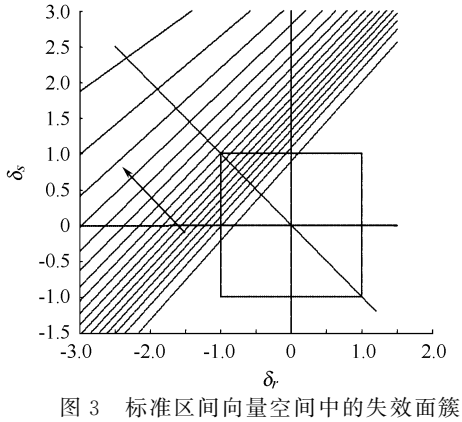

图3 标准区间向量空间中的失效面簇

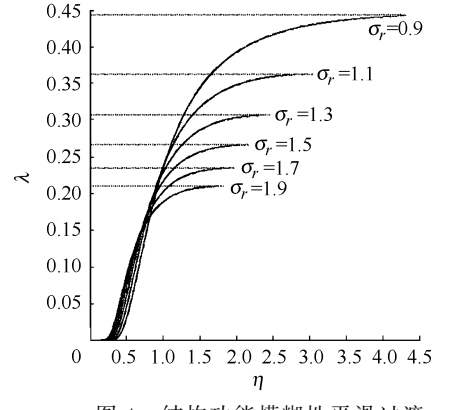

图4 结构功能模糊性平滑过渡

表1 $\sigma_r=0.9$时η和λ的映射关系

λ	η	λ	η
0.010	0.424	0.235	1.002
0.035	0.517	0.260	1.085
0.060	0.580	0.285	1.182
0.085	0.637	0.310	1.298
0.110	0.691	0.335	1.442
0.135	0.746	0.360	1.631
0.160	0.803	0.385	1.899
0.185	0.863	0.410	2.336
0.210	0.929	0.435	3.374

6　结　论

基于区间分析的非概率可靠性指标作为截集水平的连续严格单调增函数,也是结构状态变量的连续函数,故能反映出随机结构功能的内在模糊性,亦即反映出拥有确定的功能函数的结构其安全状态的平滑过渡.非概率可靠性指标不再局限于[0,1]区间,不仅可给出结构可靠的可能性度量也可给出其安全裕度信息.

功能函数的任意水平截集所得到的区间变量的上下限都来自功能函数各随机分量的概率密度函数,也能说明刻画结构功能模糊性的非概率可靠性指标是功能函数的函数.至此,初步找到了在率模可靠性公式中依据功能函数构造客观隶属函数的桥梁.

参考文献(References)

[1] 蔡开元,文传源,张明廉. 模糊可靠性理论中的基本概念[J]. 航空学报,1993,14(7):A388－397
Cai Kaiyuan, Wen Chuanyuan, Zhang Minglian. Basic concepts in fuzzy reliability theories[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1993, 14(7): A388－397(in Chinese)

[2] Cai Kaiyuan, Wen Chuanyuan, Zhang Minglian. Fuzzy states as a basis for a theory of fuzzy reliability[J]. Microelectronics and Reliability, 1993, 33(15): 2253－2263

[3] 赵德孜,温卫东,段成美. 基于模糊数的航空发动机可靠性预计模型[J]. 航空动力学报,2004,19(3):320－325
Zhao Dezi, Wen Weidong, Duan Chengmei. A model of aeroengine reliability prediction based on fuzzy number[J]. Journal of Aerospace Power, 2004, 19(3): 320－325(in Chinese)

[4] 张会,曾亮. 分置信度的模糊统计方法[J]. 模糊结构与数学,2004,18(1):96－98
Zhang Hui; Zeng Liang. Fuzzy statistic with different confidence levels[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2004, 18(1): 96－98(in Chinese)

[5] 刘长虹,陈虬,吕震宙,等. 工程模糊随机结构失效模式的确定方法[J]. 机械强度,2001,23(3):302－304
Liu Changhong, Chen Qiu, Lü Zhenzhou, et al. Determination for the failure models in the fuzzy-random engineering structures[J]. Journal of Mechanical Strength, 2001, 23(3):302－304(in Chinese)

[6] 王保平,范九伦,谢维信. 基于模糊熵的多值图像恢复方法[J]. 西安电子科技大学学报,2004,31(2):214－217
Wang Baoping, Fan Jiulun, Xie Weixin. Fuzzy entropy-based method for multilevel image restoration[J]. Journal of Xidian University, 2004, 31(2):214－217(in Chinese)

[7] 江涛,陈建军. 基于率模可靠性的客观确定非对称概型功能函数隶属函数的方法[J]. 模糊结构与数学,2005,21(3):6－10
Jiang Tao; Chen Jianjun. Assignment of membership function in profust reliability context[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2005, 21(3):6－10(in Chinese)

[8] Huang Hongzhong. Fuzzy reliability analysis of generalized strength of mechanical structure[J]. Chinese Journel of Mechnical Engineering, 2001, 37(6): 106－108

[9] 邱志平,刘正权. 含模糊参数振动系统的 Taylor 级数展开法[J]. 北京航空航天大学学报,2005,31(12):1342－1346
Qiu Zhiping, Liu Zhengquan. Taylor serie s expansion method for vibration system with fuzzy parameters[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2005, 31(12): 1342－1346(in Chinese)

[10] 郭书祥,吕震宙,冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J]. 计算力学学报,2001,18(1):56－60
Guo Shuxiang, Lü Zhenzhou, Feng Yuansheng. A non－probabilistic model of structural reliability based on interval analysis[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2001, 18(1):56－60(in Chinese)

[11] 郭书祥,吕震宙. 模糊结构和机械系统的能度可靠性分析方法[J]. 机械强度,2003,25(4):430－432
Guo Shuxiang, Lü Zhenzhou. Procedure for the analysis of possibilistic reliability of fuzzy mechanical and structural systems[J], Journal of Mechanical Strength, 2003, 25(4): 430－432(in Chinese)

[12] 杨晓伟,陈塑寰,滕绍勇. 基于单元的静力区间有限元法[J]. 计算力学学报,2002,19(2):179－183
Yang Xiaowei, Chen Suhuan, Teng Shaoyong. Static interval finite element method based on the elements[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002, 19(2): 179－183(in Chinese)

[13] Sawyer J P, Rao S S. Srength－based reliability and fracture assessment of fuzzy mechanical and structural systems[J]. AIAA Journal, 1999, 37(1): 84－92

[14] 龚怀云. 应用泛函分析[M]. 西安:西安交通大学出版社,1999
Gong Huaiyun. Applied functional analysis[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1999(in Chinese)

(责任编辑:娄　嘉)