基于 SSUKF 的航天器自主导航算法

刘 勇 徐世杰

(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100083)

摘 要: 针对航天器自主导航系统对稳定性、精确性和实时性的要求,将超球面分布采样点变换 SSUT(Spherical Simplex Unscented Transformation)和 Unscented 卡尔曼滤波(UKF)相结合,研究了基于 SSUT 的 UKF(SSUKF)导航滤波算法. 由于 SSUT 减少了采样点个数,在保证滤波精度和标准 UKF 相当的条件下减轻了计算负担. 根据 UKF 和扩展卡尔曼滤波(EKF)计算过程相似的特点,设计了 SSUKF 和 EKF 相结合的混合卡尔曼滤波算法. 算法通过能够度量估计误差的模式切换函数,可以自适应地在 SSUKF 和 EKF 之间切换,避免了 UKF 计算效率低以及 EKF 对滤波参数敏感、容易发散的缺点. 数值仿真结果表明,混合卡尔曼滤波器提高了计算效率,保证了估计精度,具有良好的鲁棒性,适合于航天器自主导航系统.

关 键 词: 自主导航; 卡尔曼滤波; 采样变换; 混合滤波

中图分类号: V 448.22^{+}4

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2007)02-0127-05

Spacecraft autonomous navigation based on SSUKF algorithm

Liu Yong Xu Shijie

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: An improved unscented Kalman filter (UKF) algorithm based on spherical simplex unscented transformation (SSUT) was presented to satisfy the stability, precision and real time requirements of spacecraft autonomous navigation. The SSUT reduces the sigma points for the unscented transformation. Compared with the traditional UKF, the computational efficiency of spherical simplex unscented Kalman filter (SSUKF) was improved, without sacrificing the estimation precision. According to the similar computation process of UKF and extended Kalman filter (EKF), the combined Kalman filter based on SSUKF and EKF was designed. This algorithm can switch adaptively between the SSUKF and EKF through a mode switching function which is the criterion of estimation errors. It solves both the inefficiency problem of UKF and the instability problem of EKF. Simulation results show that the combined Kalman filter integrates the advantages of SSUKF and EKF, improves the computational efficiency, insures the estimation precision and robustness, therefore it is more suitable for the spacecraft autonomous navigation system.

Key words: autonomous navigation; Kalman filter; unscented transformation; combined filter

航天器自主导航是指不依赖地面站,完全靠自身携带设备自主地完成轨道确定任务. 自主导航技术不仅可以减轻地基测控网的负担,提高导航的实时性,同时也增强了航天器的可靠性与生存能力. 天文导航通过姿态敏感器测量航天器与自然天体的几何关系,确定航天器的轨道位置. 天文导航具有良好的自主性,成为现阶段自主导航的主要方案.

Unscented 卡尔曼滤波算法(UKF)[1]是一种基于 Unscented 变换的状态估计方法,对于非

收稿日期: 2006-03-13

作者简介: 刘 勇(1980—),男,内蒙古呼和浩特人,博士生, liuyong@sa.buaa.edu.cn.

线性系统,UKF算法避免了对状态方程和测量方程的线性化,不存在高阶项截断误差,可以获得比扩展卡尔曼滤波(EKF)更高的估计精度.

UKF算法的计算效率很大程度上取决于Unscented变换中采样点的个数,对于 n 维随机向量,传统的UKF采用关于其均值对称的 $2n+1$ 个采样点实现Unscented变换,当向量维数较高时,计算效率降低.用超球面分布采样点变换SSUT(Spherical Simplex Unscented Transformation)代替对称分布采样点变换,可以在保证滤波性能的条件下减少采样点个数,提高计算效率.

本文研究了基于SSUT的UKF方法(SSUKF),并将其应用于以星光角距作为观测信息的航天器天文自主导航算法中,针对导航系统对实时性和鲁棒性的要求,设计了SSUKF和EKF相结合的混合卡尔曼滤波算法.最后通过数值仿真,比较了SSUKF和传统的UKF方法的性能,验证了混合卡尔曼滤波器应用于航天器自主导航的有效性和先进性.

1 超球面分布采样变换UKF

1.1 SSUT

设 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维随机变量,均值和均方差阵分别为 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 和 $\boldsymbol{P}_{xx}$. $\boldsymbol{x}$ 经过非线性变换 $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ 得到 m 维随机变量 $\boldsymbol{y}$. Unscented变换通过选择一批可表示随机变量 $\boldsymbol{x}$ 均值和方差的采样点,经过非线性变换,用变换后的采样点来近似随机变量 $\boldsymbol{y}$ 的均值和方差.

通常选择 $2n+1$ 个对称分布的采样点进行Unscented变换.文献[2]证明:对于 n 维状态变量,至少需要 $n+1$ 个采样点来描述其均值和方差.超球面分布采样点变换是通过 $n+1$ 个分布在以随机状态的均值为原点的超球面上的权值相等的采样点来近似状态的概率分布,这样,由 $n+1$ 个超球面分布采样点和状态的均值点构成了 $n+2$ 个Unscented变换采样点.

均值为 $\boldsymbol{0}$,均方差阵为单位阵的 n 维随机变量 $\boldsymbol{z}$ 的超球面分布采样点算法如下[3]:

1) 选择权值 W_0,满足:

$$0 \leqslant W_0 \leqslant 1 \tag{1}$$

2) 确定权值 W_i:

$$W_i=(1-W_0)/(n+1) \quad i=1,\cdots,n+1 \tag{2}$$

3) 初始化向量序列:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}_0^1&=[0]\\ \boldsymbol{e}_1^1&=\left[-1/\sqrt{2W_1}\right]\\ \boldsymbol{e}_2^1&=\left[1/\sqrt{2W_1}\right]\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

4) 扩展向量序列($j=2,\cdots,n$):

$$\boldsymbol{e}_i^j=\begin{cases}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_0^{j-1}\\0\end{bmatrix} & i=0\\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_i^{j-1}\\-1/\sqrt{j(j+1)W_j}\end{bmatrix} & i=1,\cdots,j\\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}^{j-1}\\j/\sqrt{j(j+1)W_j}\end{bmatrix} & i=j+1\end{cases} \tag{4}$$

式中,$\boldsymbol{e}_i^j$ 表示 j 维随机变量的第 i 个采样点;$\boldsymbol{0}^j$ 表示 j 维零向量.

通过以上算法得到 $\boldsymbol{z}$ 的 $n+2$ 个采样点 $\boldsymbol{e}_i^n$, $i=0,\cdots,n+1$. 对于均值为 $\hat{\boldsymbol{x}}$,均方差阵为 $\boldsymbol{P}_{xx}$ 的 n 维随机变量 $\boldsymbol{x}$ 的超球面分布采样点可以通过式(5)得到:

$$\boldsymbol{X}_i^n=\hat{\boldsymbol{x}}+\sqrt{\boldsymbol{P}_{xx}}\,\boldsymbol{e}_i^n \qquad i=0,\cdots,n+1 \tag{5}$$

1.2 基于SSUT的UKF算法

假设一个非线性系统的状态方程和量测方程用如下离散形式表示:

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=F(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k,k)+\boldsymbol{\omega}_k \tag{6}$$

$$\boldsymbol{y}_k=H(\boldsymbol{x}_k,k)+\boldsymbol{\upsilon}_k \tag{7}$$

式中,$\boldsymbol{x}_k$ 是系统状态向量;$\boldsymbol{u}_k$ 是输入控制向量;$\boldsymbol{y}_k$ 是观测向量;$\boldsymbol{\omega}_k$ 和 $\boldsymbol{\upsilon}_k$ 分别为系统噪声向量和量测噪声向量,均值都为 $\boldsymbol{0}$,方差阵分别表示为 $\boldsymbol{Q}_k$ 和 $\boldsymbol{R}_k$. 设系统状态向量维数为 n.

SSUKF算法如下:

1) 初始化:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_0=E[\boldsymbol{x}_0] \tag{8}$$

$$\boldsymbol{P}_0=E[(\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}_0)(\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}_0)^{\mathrm{T}}] \tag{9}$$

2) 计算 $n+2$ 采样点:

$$\boldsymbol{X}_{i,k-1}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}+\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}}\,\boldsymbol{e}_i^n \qquad i=0,\cdots,n+1 \tag{10}$$

3) 时间更新:

$$\boldsymbol{X}_{i,k|k-1}=F(\boldsymbol{X}_{i,k-1},\boldsymbol{u}_{k-1},k-1) \quad i=0,\cdots,n+1 \tag{11}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^-=\sum_{i=0}^{n+1}W_i\boldsymbol{X}_{i,k|k-1} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{P}_k^-=\sum_{i=0}^{n+1}W_i(\boldsymbol{X}_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{x}}_k^-)\cdot(\boldsymbol{X}_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{x}}_k^-)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_k \tag{13}$$

$$\boldsymbol{Y}_{i,k|k-1}=H(\boldsymbol{X}_{i,k|k-1},k) \quad i=0,\cdots,n+1 \tag{14}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{n+1} W_i \boldsymbol{Y}_{i,k|k-1} \tag{15}$$

4) 量测更新:

$$\boldsymbol{P}_{\hat{y}_k\hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{n+1} W_i (\boldsymbol{Y}_{i,k|k-1} - \hat{\boldsymbol{y}}_k^-)(\boldsymbol{Y}_{i,k|k-1} - \hat{\boldsymbol{y}}_k^-)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k \tag{16}$$

$$\boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{n+1} W_i (\boldsymbol{X}_{i,k|k-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_k^-)(\boldsymbol{Y}_{i,k|k-1} - \hat{\boldsymbol{y}}_k^-)^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{y}_k} \boldsymbol{P}_{\hat{y}_k\hat{y}_k}^{-1} \tag{18}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{y}_k - \hat{\boldsymbol{y}}_k^-) \tag{19}$$

$$\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_k^- - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{P}_{\hat{y}_k\hat{y}_k} \boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

SSUKF 用 $n+2$ 个超球面分布的采样点代替了 $2n+1$ 个对称分布的采样点,对于多维系统而言,减少了采样点个数,因此,在保证滤波精度与标准 UKF 算法相当的前提下,计算效率得到明显改善.

2　自主导航系统数学模型

2.1　航天器轨道运动模型

在地心赤道惯性坐标系中建立航天器轨道运动方程,取包括地球引力场摄动二阶带谐项的二体运动模型,将其它摄动因素等效为高斯白噪声.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v_x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= v_y \\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= v_z \\
\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= -\mu\frac{x}{r^3}\left[1 - J_2\left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \cdot \left(7.5\frac{z^2}{r^2} - 1.5\right)\right] + \omega_{v_x} \\
\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -\mu\frac{y}{r^3}\left[1 - J_2\left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \cdot \left(7.5\frac{z^2}{r^2} - 1.5\right)\right] + \omega_{v_y} \\
\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= -\mu\frac{z}{r^3}\left[1 - J_2\left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \cdot \left(7.5\frac{z^2}{r^2} - 4.5\right)\right] + \omega_{v_z}
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

式中,$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;x, y, z 为航天器位置坐标;v_x, v_y, v_z 为航天器速度坐标;μ 为地球引力常数;J_2 为地球二阶带谐项系数;R_e 为地球赤道半径;$\omega_{v_x}, \omega_{v_y}, \omega_{v_z}$ 为系统噪声.

2.2　星光角距测量模型

根据红外地球敏感器和星敏感器的测量信息可以确定星光角距[4],即航天器本体坐标系中导航星星光的矢量方向和地球球心的矢量方向的夹角.

由于星光角距在不同的坐标系中保持不变,在本体坐标系中测得的角距同样可用于赤道惯性坐标系,在地心赤道惯性坐标系中 2 颗导航星的星光角距的表达式为

$$\eta_1 = \gamma_1 + v_{\eta_1} = \arccos\left(-\frac{xs_{x_1} + ys_{y_1} + zs_{z_1}}{r}\right) + v_{\eta_1} \tag{22}$$

$$\eta_2 = \gamma_2 + v_{\eta_2} = \arccos\left(-\frac{xs_{x_2} + ys_{y_2} + zs_{z_2}}{r}\right) + v_{\eta_2} \tag{23}$$

式中,$s_{x_1}, s_{y_1}, s_{z_1}$ 和 $s_{x_2}, s_{y_2}, s_{z_2}$ 分别是 2 颗导航星在地心赤道惯性坐标系下的方向余弦.

3　SSUKF-EKF 混合滤波器设计

对于非线性系统,UKF 算法避免了对状态方程和测量方程的线性化,不存在高阶项截断误差,收敛速度和稳态精度优于 EKF,对初始条件和系统噪声的不确定性也有较好的鲁棒性,但在一步计算周期中,UKF 要对若干个采样点进行计算,计算效率较低. EKF 方法有很高的计算效率,当系统的非线性较弱时,也能保证较高的估计精度,但若初始误差较大或系统噪声不确定,EKF 容易发散. 考虑到 2 种算法都基于卡尔曼滤波,计算过程相似,因此,可以将 2 种算法相结合,设计混合卡尔曼滤波器,改善滤波器性能.

基于 SSUKF-EKF 的混合滤波算法流程如图 1,其中模式切换函数 $M(\hat{\boldsymbol{x}}_k, \boldsymbol{P}_k)$ 是随估计误差单调递增的函数,当函数取值小于设定的误差阈值 M_{eff} 时,表示滤波精度满足设计要求,为提高计

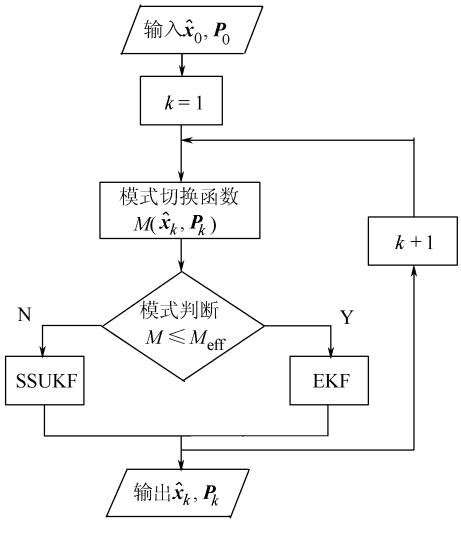

图 1　混合卡尔曼滤波器算法流程

算效率，采用EKF算法，当函数取值大于误差阈值时，表示滤波器性能下降，采用SSUKF算法改善滤波性能.

卡尔曼滤波的稳定性决定于系统的状态方程和量测方程的性质，如果系统随机可控和随机可观测，则卡尔曼滤波器是稳定的[5]. 混合滤波器通过模式切换函数和误差阈值自适应地在EKF和UKF间切换，这只是改变状态量均值和方差阵的计算方法，并不影响系统的稳定性. 因此，通过选择合适的M_{eff}，可以使滤波器在满足一定的精度要求下提高计算效率.

模式切换函数的设计原则是要能够准确体现滤波器的估计精度，可以采用如下2种方法：

当对系统噪声方差阵$\boldsymbol{Q}_k$估计准确时，估计均方误差阵$\boldsymbol{P}_k$能够反映估计误差，模式切换函数选为

$$M(\hat{\boldsymbol{x}}_k,\boldsymbol{P}_k)=\sqrt{\text{tr}\boldsymbol{P}_k} \tag{24}$$

当对测量噪声方差阵$\boldsymbol{R}_k$估计准确时，可以根据测量残差来衡量估计误差，模式切换函数取为

$$M(\hat{\boldsymbol{x}}_k,\boldsymbol{P}_k)=$$
$$[H(\hat{\boldsymbol{x}}_k,k)-\boldsymbol{y}_k]^{\text{T}}\boldsymbol{R}_k^{-1}[H(\hat{\boldsymbol{x}}_k,k)-\boldsymbol{y}_k] \tag{25}$$

4 数值仿真

仿真条件：坐标系取J2000地心赤道惯性坐标系. 初始轨道参数：长半轴$a=7\,151.918$ km，偏心率$e=0.025\,8$，轨道倾角$i=98.52°$，升交点赤经$\Omega=204.597°$，近地点幅角$\omega=234.083°$，平近点角$240.817°$. 敏感器精度：星敏感器精度$1''(1\sigma)$；红外地球敏感器精度$0.01°(1\sigma)$. 量测噪声取为零均值高斯白噪声. 真实轨道考虑了地球非球形引力摄动，其中地球重力模型采用JGM-3(Joint Gravity Model)，取前21×21阶带谐项与田谐项，同时考虑太阳和月球引力、大气阻力、太阳光压等摄动. 采用四阶龙格库塔法对系统进行离散化.

4.1 小初始偏差、小步长条件下的仿真结果

设状态变量初始偏差：

$$\Delta\boldsymbol{X}_0=[2\quad -2\quad 2\quad -2\quad 2\quad -2]$$

位置偏差单位为km，速度偏差单位为$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，下同. 仿真步长为15 s，仿真时间为4个轨道周期. 仿真结果如表1及图2、图3所示，其中位置误差和速度误差定义为误差向量的模，收敛时间定义为从初始时刻到估计误差稳定于1 km的时刻的时间间隔. 可以看出，SSUKF和标准UKF的滤波性能相当，而计算效率显著提高，EKF算法也具有较高的精度，且计算效率最高.

4.2 大初始偏差、较大步长条件下的仿真结果

设状态初始偏差：

$$\Delta\boldsymbol{X}_0=[40\quad -40\quad 40\quad -400\quad 400\quad -400]$$

仿真步长为60 s，仿真时间为8个轨道周期.

表1 小初始偏差、小步长下的导航仿真结果

滤波方法	位置误差/m	速度误差/($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	收敛时间/s	相对计算时间
标准UKF	243.58	0.256 6	2 367	1.00
SSUKF	243.39	0.256 4	2 365	0.69
EKF	260.38	0.270 1	2 370	0.24

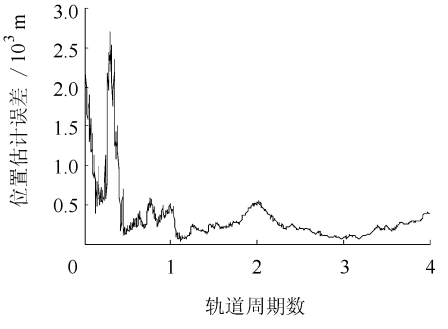

图2 基于SSUKF的导航位置估计误差

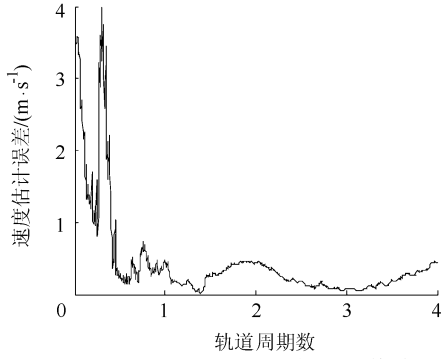

图3 基于SSUKF的导航速度估计误差

由于已知系统噪声方差阵$\boldsymbol{Q}_k$，SSUKF-EKF混合卡尔曼滤波器的模式切换函数可以按式(24)选取，$M(\hat{\boldsymbol{x}}_k,\boldsymbol{P}_k)$的数值大小和位置估计误差在同一数量级上，因此可令$M_{\text{eff}}=10^3$. 仿真结果列于表2.

表2 大初始偏差、大步长下的导航仿真结果

滤波方法	位置误差/m	速度误差/($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	收敛时间/s	相对计算时间
标准UKF	336.20	0.341 1	3 939	1.00
SSUKF	334.25	0.339 0	3 942	0.70
EKF	455.49	0.506 1	18 360	0.22
SSUKF-EKF	351.17	0.358 3	3 946	0.26

可以看出，当对状态初值的估计偏差较大时，*EKF*需要很长时间才能收敛，且随着步长的增大，*EKF*的估计误差也相应增大. 标准*UKF*和*SSUKF*在大初始偏差、大步长的条件下仍能保证较快的收敛速度，滤波精度也好于*EKF*算法. 基于*SSUKF*和*EKF*的混合滤波器综合了2种

算法的优点,即用 *SSUKF* 算法加快了滤波的收敛时间,当状态估计趋于稳定的时候,调用 *EKF* 算法也可以保证较高的估计精度,且计算效率大幅度提高.

4.3　系统噪声均方差矩阵对滤波器性能的影响

EKF 算法对参数的选取比较敏感,当 $\boldsymbol{Q}_k$ 选择不当时,EKF 性能下降,甚至发散.设仿真初始偏差 $\Delta\boldsymbol{X}_0=[2\quad -2\quad 2\quad -2\quad 2\quad -2]$,仿真步长 60 s,仿真时间为 5 个轨道周期,并令 $\boldsymbol{Q}_k$ 取值小于真实系统误差方差阵.由于 $\boldsymbol{P}_k$ 无法正确反映估计误差,需根据测量残差来衡量估计误差大小,SSUKF-EKF 的模式切换函数按式(25)选取,$M(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{P}_k)$数值在 1 附近,表明估计误差稳定,若 $M(\hat{\boldsymbol{x}}_k,\boldsymbol{P}_k)$远大于 1,则滤波器发散,仿真中取 $M_{\text{eff}}=3.2$.仿真结果如表 3 和图 4 所示.

表 3　$\boldsymbol{Q}_k$ 估计不准确时的导航仿真结果

滤波方法	位置误差/m	速度误差/($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	相对计算时间
SSUKF	304.14	0.2991	1.00
SSUKF-EKF	391.09	0.3994	0.49

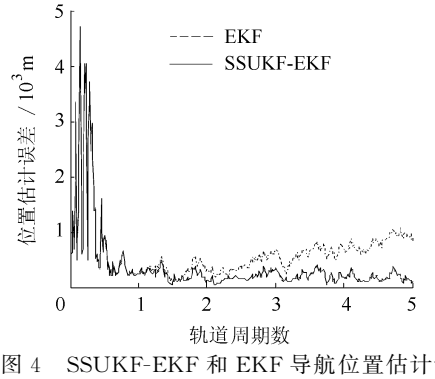

图 4　SSUKF-EKF 和 EKF 导航位置估计误差

仿真结果表明,当对系统噪声估计不准确时,EKF 容易发散,而 SSUKF 和 SSUKF-EKF 都能保证状态估计的收敛性,SSUKF 的估计精度较高,SSUKF-EKF 的计算效率明显优于 SSUKF.

5　结 束 语

本文研究了基于 SSUT 的 UKF 算法,设计了将 SSUKF 和 EKF 相结合的混合卡尔曼滤波器并应用于以星光角距作为观测信息的航天器天文自主导航系统中.数值仿真结果表明,SSUKF 和标准 UKF 的滤波性能相当,计算效率显著提高;混合卡尔曼滤波器综合了 SSUKF 和 EKF 的特点,既保证了估计精度、收敛速度和鲁棒性,同时又有较高的计算效率,适合于航天器自主导航系统.

参考文献(References)

[1] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whytte H F. A new approach for filtering systems[C]// Proceedings of the American Control Conference. Seattle, Washington: [s. n.], 1995: 1628－1632

[2] Julier S J, Uhlmann J K. Reduced sigma point filters for the propagation of means and covariances through nonlinear transformations[C]// Proceedings of the American Control Conference. Anchorage AK:[s. n.],2002: 887－892

[3] Julier S J. The spherical simplex unscented transformation [C]// Proceedings of the American Control Conference. Denver, Colorado:[s. n.],2003: 2430－2434

[4] 董云峰, 章仁为. 利用星敏感器的卫星自主导航[J]. 宇航学报, 1995, 16(4): 36－41
Dong Yunfeng, Zhang Renwei. Satellite autonomous navigation using star sensor[J]. Journal of Astronautics,1995, 16(4): 36－41(in Chinese)

[5] 秦永元, 张洪钺, 王叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998: 141－145
Qin Yongyuan, Zhang Hongyue, Wang Shuhua. Kalman filter and integrated navigation theory[M]. Xi′an: Northwestern Polytechnical University Press, 1998: 141－145(in Chinese)

(责任编辑:张　嵘)