复合材料薄壁梁几何非线性分析

石庆华 向锦武

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院，北京 100083)

摘 要：根据复合材料薄壁梁变形的特点，假设截面有面外翘曲，应变沿薄壁厚度方向呈二次曲线形式变化，采用 9 节点平面单元模拟复杂薄壁截面，用 27 节点体单元模拟面外翘曲变形. 在 Hamilton 原理基础上，采用非线性有限元理论，用 T. L. 法，将位移等状态量写成增量形式后，推导出了任意复杂截面薄壁复合材料梁计入剪切翘曲大变形分析的几何刚度矩阵，建立了一个新的任意复合材料薄壁截面梁几何非线性分析模型，并进行了算例验证. 算例表明，建立的模型正确，能够进行复合材料薄壁梁几何非线性分析；截面翘曲对复合材料梁的变形影响明显；与相关文献做比较，说明了模型的优越性.

关 键 词：复合材料；薄壁梁；几何非线性；翘曲；有限元

中图分类号：V 214.4

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2007)01-0050-05

Geometry nonlinear analysis of composite thin walled beams

Shi Qinghua Xiang Jinwu

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: A new geometry nonlinear finite element model for composite thin walled beams has been developed based on the complex deformation characteristic of the composite thin walled beams. Supposed the strain quadratic varies along the thin-walled, introducing the complex cross-section of beam was simulated by 9-node plane element and the out-of-plane warping displacement was simulated by 27-node solid element. Based on the Hamilton principle, nonlinear finite element theory and the Total Lagrange formulation, the geometry stiffness matrix was formed. The analytical model is proved correct through several examples. The model can be used in analysis of thin-walled composite beams, the warping deformation has evidently affected on composite thin walled beams, compared with related literatures numerical results, the advantage of this model has been showed.

Key words: composite materials; thin-walled beam; geometry nonlinear analysis; warping; finite element

由于复合材料的多种优点，近年来，在航空航天类结构上得到了广泛应用[1]，同时由于复合材料梁受力存在多种耦合现象，使得复合材料航空航天类结构的分析非常复杂，特别是薄壁非线性复合材料的变形分析问题，国、内外在这方面进行了长期的研究[2-9]. 其中，具有代表性的分析模型有 3 种，文献[3]采用将复合材料梁三维分析问题分成二维截面特性分析和一维非线性分析问题，但这种直接采用线性截面特性分析的非线性模型还存在争议；文献[4-5]基于 Euler 梁理论，采用欧拉角度变换，不考虑剪切和翘曲的影响，建立了大变形复合材料梁的分析模型，其缺点是显而易见的. 文献[6-7]在考虑了剪切和面外翘曲的基础上，将位移分成刚体位移和翘曲位移的形式，建立了复合材料薄壁梁的线性和非线性分析模型，具有较多的优点，但假设应变沿薄壁厚度呈线性

收稿日期：2006-01-09

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10272012)；教育部新世纪人才计划资助项目(NCET-04-0169)

作者简介：石庆华(1974-)，男，安徽安庆人，博士生，jxaabb@etang.com.

变化则具有局限性.

本文根据复合材料薄壁梁变形特点,假设截面有面外翘曲,应变沿薄壁厚度方向呈二次曲线形式变化,采用 9 节点平面单元模拟复杂薄壁截面,用 27 节点体单元模拟面外翘曲变形,用非线性有限元理论,建立了一个新的任意复合材料薄壁截面梁几何非线性分析模型,并进行了算例验证.

1　几何模型

对于复合材料薄壁梁,假设如下:①梁为细长结构杆件,其横向尺寸远小于轴向尺寸;②垂直于梁轴线的横截面在变形过程中不产生平面内的变形,仅有面外翘曲变形;③梁截面上任意一点的位移 $\boldsymbol{U}$ 可以分解为截面的平动、截面的刚体转动位移与截面的翘曲位移两部分组成.

采用文献[7]的坐标系统,这里做简单描述,$(OXYZ)$为总体坐标系,对应各轴的单位向量分别为 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$;$(O_{\mathrm{R}}X_{\mathrm{R}}Y_{\mathrm{R}}Z_{\mathrm{R}})$为参考坐标系或局部坐标系,对应各轴的单位向量分别为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$;$(O\xi\eta\zeta)$为曲线坐标系,$\xi$ 轴平行于参考坐标系 X_{R} 轴,η 轴与梁壁中面相切,ζ 轴垂直于梁壁的中面向外,满足右手定则. 根据以上确定的各坐标系,截面上任意点 P 在变形前的位置向量可表示为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_O+\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{Z}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{a}_3 \tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{X}_O$ 为 O 点在 $OXYZ$ 的位置向量;$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R}},\boldsymbol{Z}_{\mathrm{R}}$ 为 P 点在 $O_{\mathrm{R}}X_{\mathrm{R}}Y_{\mathrm{R}}Z_{\mathrm{R}}$ 的坐标分量.

设垂直于梁轴线的截面绕 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 轴的刚体转角分别为 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$,则根据剪切变形理论,梁上任意一点 P 变形后,在 $OXYZ$ 的刚体位移为

$$\begin{gathered}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_{\mathrm{tr}}+U_{\mathrm{w}} \\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{tr}}=\boldsymbol{U}_0+\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{a}'_2-\boldsymbol{a}_2)+\boldsymbol{Z}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{a}'_3-\boldsymbol{a}_3) \\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{w}}=\boldsymbol{f}\boldsymbol{A}_1\end{gathered} \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{U}$ 为总体位移向量;$\boldsymbol{U}_{\mathrm{tr}}$为经典梁理论的位移向量;$\boldsymbol{U}_{\mathrm{w}}$ 为梁截面翘曲位移向量;$\boldsymbol{a}'_1,\boldsymbol{a}'_2,\boldsymbol{a}'_3$ 为变形后坐标轴的单位矢量;$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为变形前坐标轴的单位矢量;$\boldsymbol{a}'_i$ 与 $\boldsymbol{a}_i$ 的关系可以参考文献[10];$\boldsymbol{A}_1$ 为梁轴线的方向;$\boldsymbol{f}$ 为梁变形后截面上 P 点的轴向翘曲位移向量.

2　有限元模型

2.1　三类单元形函数

如图 1 所示,为了描述复合材料薄壁梁的轴向变形,采用 3 节点每个节点 6 个自由度的等参梁单元,其形函数为 $N_i^1,i=1,\cdots,3$. 如图 2 所示,采用二维平面单元离散梁的截面,用曲线坐标来描述梁截面上任意一点,其形函数为 $N_j^2,j=1,\cdots,9$. 如图 3 所示,采用 27 节点体单元来描述截面的翘曲变形,其形函数为 $N_k^3,k=1,\cdots,27$.

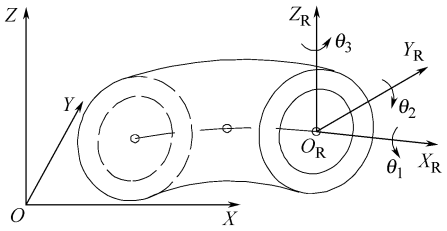

图 1　一维 3 节点梁单元

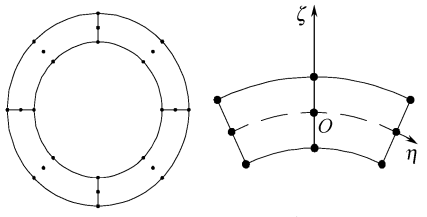

图 2　二维 9 节点单元

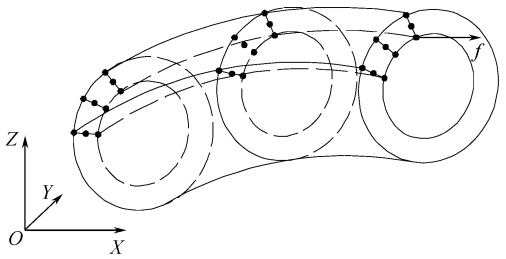

图 3　三维 27 节点单元

2.2　应变-位移关系

根据非线性有限元理论,这里用上标“°”表示已知状态量,“Δ”表示状态量增量,则

$$\begin{aligned}{}^{\circ}\boldsymbol{U}=\sum_i N_i^1\Bigg\{{}^{\circ}\boldsymbol{u}^i+\Bigg(\sum_j N_j^2\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R}}^{i,j}\Bigg)^{\circ}\Big(\boldsymbol{a}'^i_2-\boldsymbol{a}_2^i\Big)+ \\ \Bigg(\sum_j N_j^2\boldsymbol{Z}_{\mathrm{R}}^{i,j}\Bigg)^{\circ}\Big(\boldsymbol{a}'^i_3-\boldsymbol{a}_3^i\Big)+ \\ \Bigg(\sum_k N_k^3{}^{\circ}\boldsymbol{f}^{i,k}\Bigg)^{\circ}\boldsymbol{A}_1^i\Bigg\}\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{U}=\sum_i N_i^1\Bigg\{\Delta\boldsymbol{u}^i+\sum_{n=1}^3\Bigg[\Bigg(\sum_j N_j^2\boldsymbol{Y}_{\mathrm{R}}^{i,j}\Bigg)^{\circ}\boldsymbol{G}_n^i+ \\ \Bigg(\sum_j N_j^2\boldsymbol{Z}_{\mathrm{R}}^{i,j}\Bigg)^{\circ}\boldsymbol{H}_n^i\Bigg]\Delta\theta_n^i+{}^{\circ}\boldsymbol{A}_1^i\sum_k N_k^3\Delta\boldsymbol{f}^{i,k}+ \\ \Bigg(\sum_k N_k^3{}^{\circ}\boldsymbol{f}^{i,k}\Bigg)^{\circ}\boldsymbol{A}_1^i\Bigg\}\end{aligned} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{G}_n^i=\left[\frac{\partial\boldsymbol{a}'_2}{\partial\theta_n}\right]\qquad\boldsymbol{H}_n^i=\left[\frac{\partial\boldsymbol{a}'_3}{\partial\theta_n}\right]\quad n=1,\cdots,3$$

从而 $\Delta\boldsymbol{U}$ 可以简化为

$$\Delta\boldsymbol{U}=\boldsymbol{R}_{\mathrm{tr}}\Delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{tr}}+\boldsymbol{R}_{\mathrm{w}}\Delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{w}} \tag{5}$$

$$\Delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{tr}}=\left[\Delta u^1,\Delta v^1,\Delta w^1,\Delta\theta_1^1,\Delta\theta_2^1,\Delta\theta_3^1,\cdots,\Delta\theta_3^r\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\Delta \boldsymbol{q}_{\mathrm{w}}=\left[\Delta f^{1,1},\Delta f^{1,2},\cdots,\Delta f^{1,s},\Delta f^{2,1},\cdots,\Delta f^{r,s}\right]^{\mathrm{T}}$$

Green 应变[11]为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{G}}={}^{\circ}\boldsymbol{E}^{\mathrm{G}}+\Delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{G}} \tag{6}$$

$$\Delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{G}}=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{G}}+\Delta\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{G}} \tag{7}$$

其中，$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{G}}$ 为增量应变的线性部分；$\Delta\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{G}}$ 为增量应变的非线性部分；上标 r 为梁单元节点总数；上标 s 为翘曲单元节点总数.

$$\delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{G}}=\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{G}}+\delta\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{G}} \tag{8}$$

经过坐标转换，将 $OXYZ$ 的应变转化为 $O_{\mathrm{R}}X_{\mathrm{R}}Y_{\mathrm{R}}Z_{\mathrm{R}}$ 的应变：

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{T}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{G}}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr}}\Delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{tr}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{w}}\Delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{w}} \tag{9}$$

$$\Delta\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{T}\Delta\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{G}} \tag{10}$$

$\boldsymbol{T}$ 为 $OXYZ$ 与 $O_{\mathrm{R}}X_{\mathrm{R}}Y_{\mathrm{R}}Z_{\mathrm{R}}$ 的转化关系.

假设应变沿厚度方向按照二次函数规律变化，得

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{E}_{\kappa}+\boldsymbol{\zeta}^2\boldsymbol{E}_{\Gamma} \tag{11}$$

$${}^{\circ}\boldsymbol{E}={}^{\circ}\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{\zeta}{}^{\circ}\boldsymbol{E}_{\kappa}+\boldsymbol{\zeta}^2{}^{\circ}\boldsymbol{E}_{\Gamma} \tag{12}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0+\boldsymbol{\zeta}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\kappa}+\boldsymbol{\zeta}^2\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma} \tag{13}$$

$$\Delta\boldsymbol{\eta}=\Delta\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\zeta}\Delta\boldsymbol{\eta}_{\kappa}+\boldsymbol{\zeta}^2\Delta\boldsymbol{\eta}_{\Gamma} \tag{14}$$

则式(13)可以写成：

$$\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0\\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\kappa}\\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},0}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},\kappa}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},\Gamma}\end{bmatrix}\Delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{tr}}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{\mathrm{w},0}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{w},\kappa}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{w},\Gamma}\end{bmatrix}\Delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{w}} \tag{15}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},0}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr}}\big|_{\zeta=0}\qquad \boldsymbol{B}_{\mathrm{w},0}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{w}}\big|_{\zeta=0}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},\kappa}=\frac{1}{2a}\left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},a}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},-a}\right)$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{w},\kappa}=\frac{1}{2a}\left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{w},a}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{w},-a}\right)$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},\Gamma}=\frac{1}{2a^2}\left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},a}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},-a}-2\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},0}\right)$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{w},\Gamma}=\frac{1}{2a^2}\left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{w},a}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{w},-a}-2\boldsymbol{B}_{\mathrm{w},0}\right)$$

其中，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},0}\boldsymbol{B}_{\mathrm{w},0}$，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},a}\boldsymbol{B}_{\mathrm{w},a}$，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},-a}\boldsymbol{B}_{\mathrm{w},-a}$ 分别为 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{w}}$ 在 $\boldsymbol{\zeta}$ 等于 0，a，$-a$ 所对应的应变矩阵（a 为高斯积分点坐标）. 同理可以得到 $\boldsymbol{B}_{\eta,0}$，$\boldsymbol{B}_{\eta,\kappa}$，$\boldsymbol{B}_{\eta,\Gamma}$.

2.3 应力-应变关系

Payola 应力和 Green 应变关系可以表示为

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}} \tag{16}$$

其材料矩阵形式与线性复合材料分析问题是相同的，可参考文献[12].

2.4 有限元平衡方程

根据虚功原理：

$$\delta\boldsymbol{\pi}=\int\delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\mathrm{d}\boldsymbol{V}-\mathrm{d}\boldsymbol{W}=0 \tag{17}$$

将方程(4)～方程(15)代入到(17)式中，得

$$\int\delta\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\mathrm{d}\boldsymbol{V}=$$

$$\sum\left[\int\left\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}},\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\kappa}^{\mathrm{T}},\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}^{\mathrm{T}}\right\}\bar{\boldsymbol{Q}}\begin{Bmatrix}{}^{\circ}\boldsymbol{E}_0\\ {}^{\circ}\boldsymbol{E}_{\kappa}\\ {}^{\circ}\boldsymbol{E}_{\Gamma}\end{Bmatrix}\boldsymbol{J}_0\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}+\right.$$

$$\int\left\{\delta\boldsymbol{\eta}_0^{\mathrm{T}},\delta\boldsymbol{\eta}_{\kappa}^{\mathrm{T}},\delta\boldsymbol{\eta}_{\Gamma}^{\mathrm{T}}\right\}\bar{\boldsymbol{Q}}\begin{Bmatrix}{}^{\circ}\boldsymbol{E}_0\\ {}^{\circ}\boldsymbol{E}_{\kappa}\\ {}^{\circ}\boldsymbol{E}_{\Gamma}\end{Bmatrix}\boldsymbol{J}_0\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}+$$

$$\int\left\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}},\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\kappa}^{\mathrm{T}},\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}^{\mathrm{T}}\right\}\bar{\boldsymbol{Q}}\begin{Bmatrix}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0\\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\kappa}\\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}\end{Bmatrix}\boldsymbol{J}_0\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}+$$

$$\left.\int\left\{\delta\boldsymbol{\eta}_0^{\mathrm{T}},\delta\boldsymbol{\eta}_{\kappa}^{\mathrm{T}},\delta\boldsymbol{\eta}_{\Gamma}^{\mathrm{T}}\right\}\bar{\boldsymbol{Q}}\begin{Bmatrix}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0\\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\kappa}\\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\Gamma}\end{Bmatrix}\boldsymbol{J}_0\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\right] \tag{18}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{Q}}=\int\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}&\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{Q}&\boldsymbol{\zeta}^2\boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{Q}&\boldsymbol{\zeta}^2\boldsymbol{Q}&\boldsymbol{\zeta}^3\boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{\zeta}^2\boldsymbol{Q}&\boldsymbol{\zeta}^3\boldsymbol{Q}&\boldsymbol{\zeta}^4\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}(1+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\zeta})\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}$$

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_0(1+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\zeta})\qquad \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{J}_1/\boldsymbol{J}_0$$

$$\boldsymbol{J}_0=\det(\boldsymbol{J})\big|_{\zeta=0}\qquad \boldsymbol{J}_1=\det(\boldsymbol{J})\big|_{\zeta=1}-\boldsymbol{J}_0$$

$$\delta\boldsymbol{W}=\sum\delta\boldsymbol{W}_{\mathrm{e}} \tag{19}$$

容易看出式(18)中第 4 项是高阶小量，忽略不计. 由第 1 项得到线性和初位移刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{\mathrm{b,tr}}&\boldsymbol{K}_{\mathrm{b,c}}\\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{b,c}}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{K}_{\mathrm{b,w}}\end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{b,tr}}=\int\begin{Bmatrix}\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},0}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},\kappa}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},\Gamma}\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}\int\begin{Bmatrix}\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},0}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},\kappa}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},\Gamma}\end{Bmatrix}\boldsymbol{J}_0\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{b},c}=\int\begin{Bmatrix}\boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},0}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},\kappa}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{tr},\Gamma}\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}\int\begin{Bmatrix}\boldsymbol{B}_{\mathrm{w},0}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{w},\kappa}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{w},\Gamma}\end{Bmatrix}\boldsymbol{J}_0\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{b,w}}=\int\begin{Bmatrix}\boldsymbol{B}_{\mathrm{w},0}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{w},\kappa}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{w},\Gamma}\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{B}_{\mathrm{w},0}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{w},\kappa}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{w},\Gamma}\end{Bmatrix}\boldsymbol{J}_0\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$$

类似地，由第 2 项得到初应力刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{s}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{\mathrm{s,tr}}&\boldsymbol{K}_{\mathrm{s,c}}\\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{s,c}}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{K}_{\mathrm{s,w}}\end{bmatrix} \tag{21}$$

由第 3 项得到初应力向量为

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{s}}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{s,tr}}\\ \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{s,w}}\end{Bmatrix} \tag{22}$$

由式(17)$\mathrm{d}\boldsymbol{W}$ 项得

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{a}}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{a,tr}}\\ \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{a,w}}\end{Bmatrix} \tag{23}$$

从而得到非线性平衡方程：

$$\sum\boldsymbol{K}_{\tau}\Delta\boldsymbol{q}_{\mathrm{e}}=\sum\boldsymbol{Q}_{\mathrm{e}} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{K}_\tau=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{tr} & \boldsymbol{K}_c\\ \boldsymbol{K}_c^T & \boldsymbol{K}_w\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{K}_{tr}=\boldsymbol{K}_{b,tr}+\boldsymbol{K}_{s,tr}$$

$$\boldsymbol{K}_c=\boldsymbol{K}_{b,c}+\boldsymbol{K}_{s,c}\qquad \boldsymbol{K}_w=\boldsymbol{K}_{b,w}+\boldsymbol{K}_{s,w}$$

$$\boldsymbol{Q}_e=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{Q}_{e,tr}\\ \boldsymbol{Q}_{e,w}\end{Bmatrix}\tag{25}$$

$$\boldsymbol{Q}_{e,tr}=\boldsymbol{Q}_{a,tr}-\boldsymbol{Q}_{s,tr}\qquad \boldsymbol{Q}_{e,w}=\boldsymbol{Q}_{a,w}-\boldsymbol{Q}_{s,w}$$

用 Newton-Raphson 方法求解,并删去多余的自由度,则可进行复合材料梁的几何非线性分析.

3　算　例

算例 1　盒型复合材料薄壁梁长为 5.0 m,高为 0.1 m,宽为 0.2 m,薄壁厚度为 1.067×10^{-2} m,采用 AS4/3501-6 材料.其材料常数如下:

$$E_1=141.9\,\text{GPa}$$
$$E_2=E_3=9.790\,\text{GPa}$$
$$G_{12}=G_{13}=5.998\,\text{GPa}$$
$$G_{23}=4.826\,\text{GPa}$$
$$\mu_{12}=\mu_{13}=0.42$$
$$\mu_{23}=0.5$$

盒型梁上薄壁按$[0°/\theta_4/90°]_s$铺层,下薄壁按$[0°/-\theta_4/90°]_s$,左、右薄壁按$[0°/90°_4/0°]_s$,铺层角度θ从 0°～90°变化.梁在端部受到 6000 N 的垂直力均匀作用在截面上.

截面剖分成 8 个单元,如图 4 所示,沿长度方向剖分成 10 个单元.

图 5 示出了梁在发生几何大变形情况下,考虑翘曲和不考虑翘曲时复合材料梁垂直位移随着θ的变化情况.从图 5 中可以看出,考虑翘曲后本文解与 Ansys 软件分析结果非常接近;当忽略复合材料截面翘曲时,在大变形情况下,垂直位移相差很大,$\theta=20°$时,甚至达到 29.6%.

图 6 示出了梁在发生几何大变形情况下,扭转变形随θ的变化情况.可以看出,考虑翘曲后本文解与 Ansys 软件非线性分析结果吻合较好;当忽略截面翘曲变形时,计算的复合材料薄壁梁扭转角的极大值明显偏小.

算例 2　矩形截面悬臂梁长 0.508 m,采用

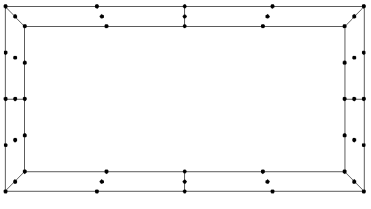

图 4　薄壁盒型梁截面单元

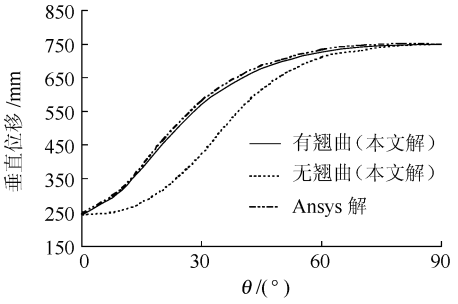

图 5　垂直位移随θ变化情况

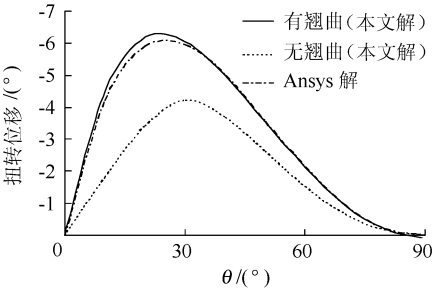

图 6　扭转角度随θ变化情况

$[\theta/-\theta]$铺层方式,$\theta=0°\sim90°$.材料采用 T300/5208 graphite/epoxy,材料常数如下:

$$E_1=146.9\times10^3\,\text{MPa}$$
$$E_2=E_3=11.0\times10^3\,\text{MPa}$$
$$G_{12}=G_{13}=6.2\times10^3\,\text{MPa}$$
$$G_{23}=4.8\times10^3\,\text{MPa}$$
$$\mu_{12}=\mu_{13}=0.28$$
$$\mu_{23}=0.5$$

悬臂梁在端部受到 4445 N 拉力作用.将悬臂梁沿长度方向分成 4 个单元,厚度方向分成一个单元做有限元分析.分别计算宽厚比为 1∶0.125,1∶0.5,1∶1的情况.本文编制了相应的计算程序,分别采用本文模型、文献[7]模型和 Ansys 软件计算,结果见图 7、图 8、图 9.

从图 7、图 8、图 9 可以看出,当宽厚比较小时,3 种计算结果具有较好的一致性;当厚度变大时,本文解和 Ansys 计算解仍然具有较好的一致性,而文献[7]却出现了明显的差别,随着厚度的进一步增大,这种差别更加明显.

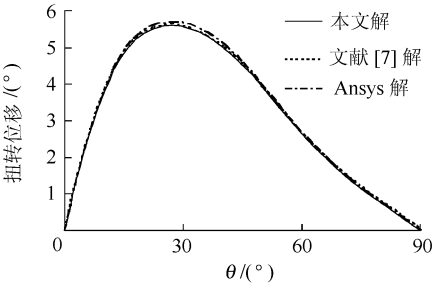

图 7　扭转位移随θ变化情况(宽厚比 1∶0.125)

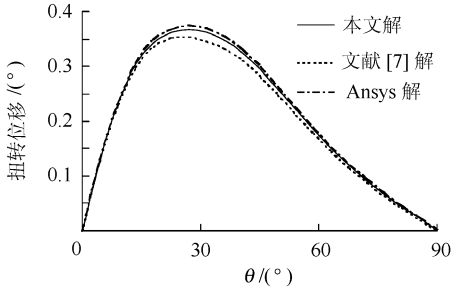

图8 扭转位移随θ变化情况(宽厚比1∶0.5)

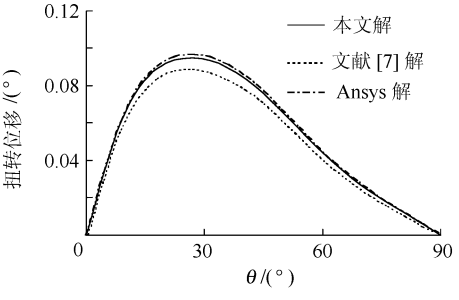

图9 扭转位移随θ变化情况(宽厚比1∶1)

4 结 论

在假设应变沿薄壁厚度方向呈二次曲线形式变化基础上,用平面单元模拟复杂薄壁截面,体单元模拟翘曲变形,在Hamilton原理基础上,用非线性有限元理论,采用T.L.法,将位移等状态量写成增量形式后,推导出了任意复杂截面薄壁复合材料梁考虑剪切翘曲变形的几何刚度矩阵,建立了一个新的任意复合材料薄壁截面梁几何非线性分析模型,并进行了算例验证.算例表明,所建立的模型正确,能够进行复合材料薄壁截面梁的几何非线性分析;翘曲变形对薄壁复合材料梁不同铺层角的影响程度不同,本文算例最大达到29.6%;与相关文献及软件计算结果比较,说明了本文模型对于计算宽厚比较大复合材料梁,仍然具有较好的准确性.

参考文献(References)

[1] Jung S N, Nagaraj V T, Chopra I. Assessment of composite rotor blade modeling techniques [J]. JAHS, 1999,44(3):188-205

[2] 王元丰,诸德超. 复合材料薄壁旋转梁的研究进展[J]. 力学进展, 1996,26(2):179-185
Wang Yuanfeng, Zhu Dechao. The development of study on composite thin-walled rotating beams [J]. Advances in Mechanics,1996,26(2):179-185(in Chinese)

[3] Seong MinJeon, Maeng HyoCho, Lee In. Static and dynamic analysis of composite box beams using large deflection theory [J]. Computer and Structure, 1995,57(4):635-642

[4] Minguet P J, Duguudji J. Experiments and analysis for composite blades under large deflection[J]. AIAA,1990,28(5):1580-1588

[5] 向锦武.大变形复合材料柔性梁静、动特性分析与试验[D].南京:南京航空航天大学航空宇航学院,1995
Xiang Jinwu. The static and dynamic analysis and experiment of composite large deformation flex beams [D]. Nanjing: College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,1995(in Chinese)

[6] Stemple A D, Lee S W. A finite element model for composite beams with arbitrary cross-sectional warping [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987,24(12):304-313

[7] Stemple A D, Lee S W. A finite element model for composite beams undergoing large deflection with arbitrary cross-sectional warping [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1989,28(7):2143-2160

[8] 邓忠民,诸德超.复合材料薄壁梁限制扭转特性分析[J].北京航空航天大学学报,2000,26(1):75-78
Deng Zhongmin, Zhu Dechao. Characteristic analysis of composite thin-walled beams under constrained torsion[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2000,26(1):75-78(in Chinese)

[9] 刘兵山,燕瑛,钱卫,等.复合材料机翼盒段的设计模态分析盒试验[J].北京航空航天大学学报,2003,29(11):1026-1028
Liu Bingshan, Yan Ying, Qian wei, et al. Design modal analysis and tests of composites wing box [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2003, 29(11):1026-1028(in Chinese)

[10] Kane T R, Likins P W, Levinson D A. Spacecraft dynamics [M]. New York: McGraw-Hill Inc, 1983

[11] Bathe K J. Finite element procedures in engineering analysis [M]. New York: Preatice-Hill Enlewood Cliffs NJ, 1982

[12] 蒋咏秋. 复合材料力学[M]. 西安:西安交通大学出版社,1990
Jiang Yongqiu. Composite material mechanics [M]. Xi′an: Xi′an Jiao Tong University Press,1990(in Chinese)

(责任编辑:刘登敏)