B 样条曲面自适应拟合算法

陈国振 刘静华

(北京航空航天大学 机械工程及自动化学院，北京 100083)

摘 要：针对复杂曲面物体在虚拟环境中的再现问题，依据复杂曲面上提取的已知数据点，快速反算曲面的控制顶点；由控制顶点、节点矢量确定一条 B 样条曲面，即真实物体的拟合曲面. 由于提取的数据点存在噪声和摆动，拟合曲面与已知曲面会产生偏差. 通过误差判定条件找到偏差点，根据偏差点、偏差方向及偏差距离计算出曲面更真实的控制顶点；然后重置相应的控制顶点，达到自动修复拟合曲面的目的. 算法在 CAD(Computer Aided Design)/CAM(Computer Aided Manufacture)/VR(Virtual Reality)等工程实践中，能够满足对三维物体造型的不同精度要求.

关 键 词：计算机图形学；自适应拟合；B 样条

中图分类号：TP 391.7

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2007)02-0210-04

Auto-adapted fitting algorithm of B-spline surface objects

Chen Guozhen Liu Jinghua

(School of Mechanical Engineering and Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: In view of the reappearance of complex curved surface object in virtual environment, the control apexes of the surface were fast calculated based on the known points taken from the curved surface. The control apexes and pitch-point vector determined a B-spline curved surface, named the real object's fitting curved surface. Because the data points have noise and swings, the fitting curved surface may deviate to the known curved surface at some points. The points where the deviation happened could be found by the estimating error condition and the more real control apexes could be calculated according to the deviating points, the deviation direction and the offset distance, which aimed at automatically repairing the fitting curved surface. In practice, such as CAD(computer aided design), CAM(computer aided manufacture) and VR(virtual reality), the algorithm can meet the different requests of precision for the three-dimensional body modeling.

Key words: computer graphics; auto-adapted fitting; B-spline

随着当代科学技术的发展，虚拟现实、计算机仿真技术不仅在工程生产中获得了广泛的应用，而且在现代反恐武器装备、虚拟演练、地质勘探及采矿等领域中都获得了长足的发展. 在这些应用中，一个重要问题是实际物体如何真实地映射到计算机中，它涉及计算机辅助几何设计技术. 一般是测量物体表面得到已知数据点，采用拟合算法对已知数据点进行拟合.

1 B 样条曲线自适应拟合算法

目前曲面拟合的方法大致有 3 种：①最小二乘法；②非均匀无理 B 样条拟合法；③非均匀有理 B 样条拟合法. 方法①中最小二乘基函数次数难以确定；方法③中权值若选择不当，则会出现很差的拟合效果[1]. 由于给定的数据点可能存在噪声和摆动，会出现拟合误差，本文在方法②的基础上提出了 B 样条曲线曲面自适应拟合算法. 该算法可以满足不同拟合精度要求.

收稿日期：2006-03-21

作者简介：陈国振(1980—)，男，河南淮阳人，硕士生，guozhen_chen@me.buaa.edu.cn.

1.1　算法过程

使一条 k 次 B 样条曲线通过一组数据点 $q_i(i=0,1,\cdots,m)$,这些数据点从已存在的曲线上测量得到.拟合过程一般使曲线的首末端点分别与首末数据点一致,使曲线的分段连接点依次与 B 样条拟合曲线定义域内的节点一一对应.该 B 样条插值曲线将由 $n+1$ 个控制顶点 $\boldsymbol{d}_i(i=0,1,\cdots,n)$ 与节点矢量 $\boldsymbol{U}=[u_0,u_1,\cdots,u_{n+k-1}]$ 定义.其中,$n=m+k-1$,即控制顶点数目比数据点数目多出 $k-1$ 个,共有 $m+k$ 个未知顶点.由端点插值要求,应取 $k+1$ 重节点端点的固支条件,又取规范定义域,于是有 $u_0=u_1=\cdots=u_k=0$,$u_{n+1}=u_{n+2}=\cdots=u_{n+k+1}$.接着对数据点取规范积累弦长参数化得 $u'_i(i=0,1,\cdots,m)$,相应地可确定定义域内节点值 $u_{k+i}=u'_i(i=0,1,\cdots,m)$,即从 u_k 起的定义域内节点值依次等于 u'_0 起的数据点参数值.现在就可由插值条件给出以 $n+1$ 个控制顶点为未知矢量的 $m+1$ 个线性方程组成的线性方程组:

$$\boldsymbol{p}(u_i)=\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{d}_jN_{j,k}(u_i)=\sum_{j=i-k}^{i}\boldsymbol{d}_{j,k}(u_i)=\boldsymbol{q}_{i-k} \tag{1}$$

式中,$u\in[u_t,u_{t+1}]\subset[u_k,u_{n+1}]$,$t=k,k+1,\cdots,n$.

对于开曲线,方程数少于未知顶点数,还必须补充 $k-1$ 个由合适的边界条件给出的附加方程,才能联立求解[2].对于 C^{k-1} 连续的 B 样条闭曲线,定义域内节点同样可如此确定,但定义域外共 $2k$ 个节点就不应取成重节点端点的固支条件,而应根据构造 B 样条闭曲线的方法将节点数值取成 $u_0=u_{n-k+1}-1$,$u_1=u_{n-k+2}-1$,$\cdots$,$u_{n-k}=u_n-1$;$u_{n+2}=1+u_{k+1}$,$u_{n+3}=1+u_{k+2}$,$\cdots$,$u_{n+k+1}=1+u_{2k}$.这时由于首末数据点相重,$\boldsymbol{q}_0=\boldsymbol{q}_m$,方程减少一个.因生成的首末 k 个数据点一致,即 $\boldsymbol{d}_{n-k+1+i}=\boldsymbol{d}_i(i=0,1,\cdots,k-1)$.这样只剩下 m 个方程,可唯一求解.求解出的曲线控制顶点 $\boldsymbol{d}_i(i=0,1,\cdots,n)$ 和对控制顶点进行规范积累弦长参数化得到的节点矢量 $\boldsymbol{U}=[u_0,u_1,\cdots,u_{n+k+1}]$ 决定了一个 B 样条曲线.该 B 样条曲线与已存在的曲线一致,但由于数据点存在测量误差,若数据点过多时会存在噪声和摆动,逆运算过程得到的 B 样条曲线在某些点处会偏离所要拟合的曲线.这时给出判定条件,利用 B 样条曲线优良的局部性质,实时修改样条曲线形状,直至达到拟合满意的程度.

在实际构造 B 样条插值曲线时,广泛采用 C^2 连续的三次 B 样条曲线作为插值曲线.

该算法利用了 B 样条曲线的一系列优良性质,如局部性质、变差减少性质和凸包性质等,实现对样条曲线的局部形状控制,达到修复拟合误差的目的.算法实现了对已知空间数据点本身自适应的逼近拟合,它不需要人反复移动控制顶点去试探性地修改曲线形状.解决了在曲线上某一指定点沿指定方向移动某个距离反算出要移动的控制顶点新位置的问题.

由于拟合开曲线需要 2 个附加方程才能联立求解,因此选择合适的边界条件可以更好地拟合已知曲线,本文的例子采用切矢条件做为开曲线拟合的边界条件.

算法的总体流程图如图 1 所示.

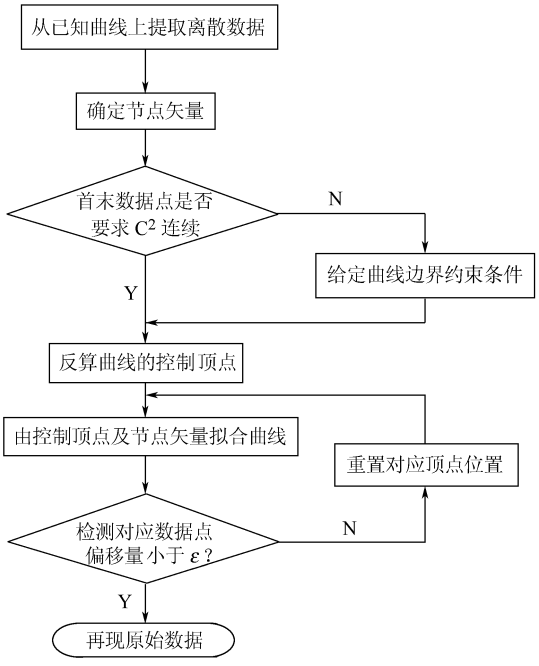

图 1　B 样条曲线自适应拟合算法流程图

1.2　自适应修复拟合偏离点

B 样条曲线具有的一系列优良性质,如局部性质,变差减少性质和凸包性质等,可以通过调整控制顶点而不是通过修改数据点实现对样条曲线的局部形状控制.根据已知数据点反求获得的 B 样条拟合曲线的控制顶点 $\boldsymbol{d}_i(i=0,1,\cdots,n)$ 及进行积累弦长参数化得到的节点矢量 $\boldsymbol{U}=[u_0,u_1,\cdots,u_{n+k+1}]$ 定义一条三次 B 样条拟合曲线,曲线方程表示如下:

$$\boldsymbol{p}(u)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{d}_iN_{i,3}(u) \tag{2}$$

若拟合曲线上对应已知数据点 $\boldsymbol{q}$ 参数为 u 的一点 $\boldsymbol{p}^*$ 处发生了偏离距离 s,那么方向 $\boldsymbol{p}^*-\boldsymbol{q}$ 就是拟合点的偏离方向,即为矢量 $\boldsymbol{r}$.这时需要移动对应

的控制顶点(设为 $\boldsymbol{d}_j$)到一个新的位置$\boldsymbol{d}_j^*$. 根据式(2)可知:

$$\boldsymbol{p}^* = \sum_{i\neq j=0}^{n} \boldsymbol{d}_i N_{i,3}(u) + (\boldsymbol{d}_j + \varphi\boldsymbol{r}) N_{j,3}(u)$$

由此可得

$$s = |\ \boldsymbol{p}^* - \boldsymbol{q}\ | = \varphi\ |\ \boldsymbol{r}\ |\ N_{j,3}(u)$$

于是有

$$\varphi = \frac{s}{|\ \boldsymbol{r}\ |\ N_{j,3}(u)}$$

则可得到新控制顶点

$$\boldsymbol{d}_j^* = \boldsymbol{d}_j + \varphi\boldsymbol{r} \tag{3}$$

这里存在一个应该移动哪个控制顶点 $\boldsymbol{d}_j$ 的问题. 如果选择不当,将达不到修改的目的. 拟合曲线上偏离点 $\boldsymbol{p}^*$ 点将至多仅与 $\boldsymbol{d}_{i-3}$,$\boldsymbol{d}_{i-2}$,$\boldsymbol{d}_{i-1}$,$\boldsymbol{d}_i$ 这4个控制顶点有关. 若移动其它控制顶点,将不会影响 $\boldsymbol{p}^*$ 点所在曲线段. 所以所选控制顶点 $\boldsymbol{d}_j$ 应是这4个控制顶点之一. 这4个顶点中必定存在1个对 $\boldsymbol{p}^*$ 点影响最大的控制顶点,因为该顶点对应参数值为 u 的点 $\boldsymbol{p}^*$ 处的一组基函数中存在一个最大值的基函数. 在实践中,选择给定数据点 $\boldsymbol{q}_i(i=0,1,\cdots,m)$,根据判定条件选定拟合曲线上对应各个已知数据点的偏离点 $\boldsymbol{p}_i(i=0,1,\cdots,m)$,即当$|\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{q}_i|>\delta$($\delta$ 为给定的误差值)时,由 $\boldsymbol{p}_i$ 对应的参数值 u 计算 u 所属的节点区间. 那么重置控制顶点的下标对应的就是节点区间下界值所含的下标值.

图2是已知曲线 a 上的数据点 $\boldsymbol{q}_i$ 与拟合曲线 b 上对应点 $\boldsymbol{p}_i$ 之间的偏差大于了给定的误差值,控制顶点 $\boldsymbol{d}_i$ 在$\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{q}_i$方向矢量上移动到新位置$\boldsymbol{d}_i^*$,由重置后的控制顶点确定的拟合曲线 c 更逼近于原始曲线 a.

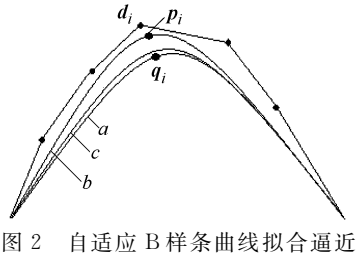

图2 自适应B样条曲线拟合逼近

2 B样条曲面自适应拟合算法

B样条曲面自适应拟合类似于B样条曲线自适应拟合,它是后者算法的一种推广. 在工程实践中,存在着许多表面复杂的物体,通过测量技术可以从物体表面上提取一系列数据点. 依据这些数据点,利用该算法就能在虚拟环境中精确表达现实复杂物体.

2.1 算法的一般过程

图3所示为B样条曲面自适应拟合算法的流程图.

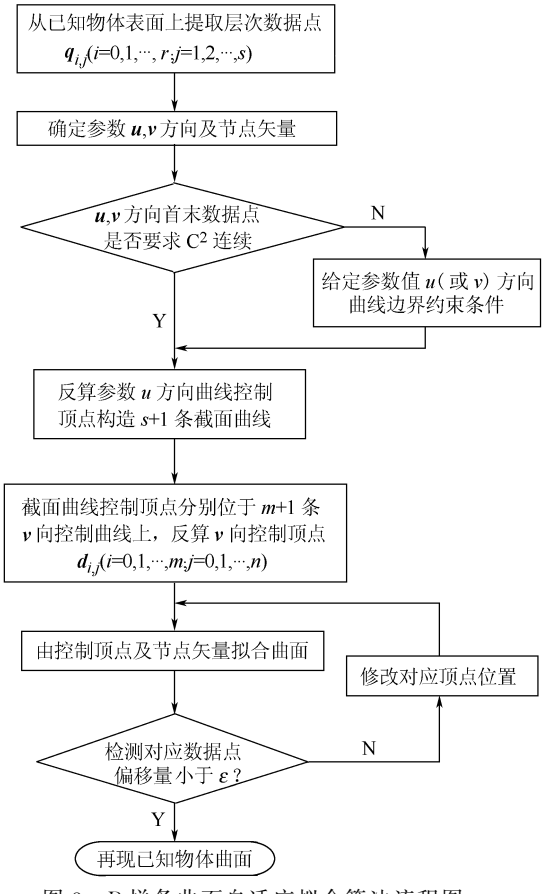

图3 B样条曲面自适应拟合算法流程图

算法过程中,曲面控制顶点反求是通过2个阶段曲线反算得到的[1]. 根据从复杂曲面上获得的呈矩形阵列的数据点 $\boldsymbol{p}_{i,j}(i=0,1,\cdots,r;j=0,1,\cdots,s)$[3],反求出 $\boldsymbol{d}_{i,j}(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n)$控制顶点和对数据点横、纵向进行平均规范积累弦长参数化得到的节点矢量,就确定了一条B样条拟合曲面. 该曲面逼近于已知的复杂曲面,但由于所取数据点的位置、数量及可能存在的噪声和摆动,计算出的拟合曲面在某些点处会偏离原有曲面. 这时根据误差判定条件,实时调整偏离点处对应的控制顶点以修改拟合曲面的局部形状,达到更好的拟合效果. 由于三次B样条曲面具有优良的局部特性,工程实践中常常使用双三次B样条曲面来拟合复杂曲面[4].

2.2 双三次B样条曲面自适应拟合算法

根据2.1节反求出复杂曲面的控制顶点 $\boldsymbol{d}_{i,j}(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n)$及进行规范积累弦长参数化得到2个节点矢量 $\boldsymbol{U}=[u_0,u_1,\cdots,u_{m+4}]$与 $\boldsymbol{V}=[v_0,v_1,\cdots,v_{n+4}]$,这样就定义了一条

B 样条拟合曲面. 理论上讲,该曲面应完全与已知复杂曲面重合,但由于数据点可能存在的噪声和摆动,拟合曲面在某些点处会偏离原曲面上对应的数据点. 现给出拟合曲面偏离的误差界 E. 令

$$\delta = |\boldsymbol{q}_{i,j} - \boldsymbol{p}(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j)|$$
$$i = 0,1,\cdots,r; j = 0,1,\cdots,s$$

当 $\delta > E$ 时,说明拟合曲面上对应参数 $(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j)$ 的点存在较大偏差. 接着对该曲面上对应的控制顶点 $\boldsymbol{d}_{i,j}$ 在点 $\boldsymbol{q}_{i,j}$ 与点 $\boldsymbol{p}(\tilde{u}_i, \tilde{v}_j)$ 连线方向 $\boldsymbol{c}$ 上移动到一个新的位置 $\boldsymbol{d}^*_{i,j}$,以使拟合曲面更好地拟合已知复杂曲面. 具体计算过程如下:

$$\boldsymbol{p}^*_{i,j} = \boldsymbol{d}_{0,0}N_{0,3}(u_0)N_{0,3}(v_0) + \cdots +$$
$$(\boldsymbol{d}_{i,j} + \alpha\boldsymbol{c})N_{i,3}(u_i)N_{j,3}(v_j) + \cdots +$$
$$\boldsymbol{d}_{m,n}N_{m,3}(u_m)N_{n,3}(v_n) =$$
$$\boldsymbol{p}_{i,j} + \alpha\boldsymbol{c}N_{i,3}(u_i)N_{j,3}(v_j)$$

由此得到

$$\alpha = \frac{\delta}{|\boldsymbol{c}|\,N_{i,3}(u_i)N_{j,3}(v_j)}$$

于是,新控制顶点 $\boldsymbol{d}^*_{i,j}$ 为

$$\boldsymbol{d}^*_{i,j} = \boldsymbol{d}_{i,j} + \alpha\boldsymbol{c}$$

3　试验结果

图 4 是已知现实空间中自由曲面 s. 图 5 是在给定误差 $E = 0.5$ mm,测定曲面上并经过点预处理的 8×8 个数据点,采用本文算法得到的拟合曲面与原已知自由曲面的比较.

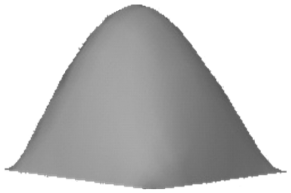

图 4　已知空间自由曲面 s

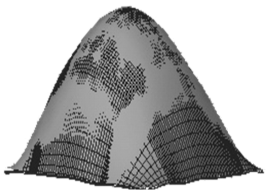

图 5　物体重现

表 1 是检测曲面 s 上 8 个已知型值点与拟合点的比较,可得拟合曲面在允许误差范围内精确地拟合了已知曲面,达到了物体再现的效果. 表 1 中 i 表示误差点标号.

表 1　拟合点与已知型值点误差比较　　mm

i	检测到的误差点						误差
	已知曲面上的型值点			拟合数据点			
	x	y	z	x	y	z	
1	316.559	500.000	−344.320	316.656	499.553	−346.720	0.470
2	−63.311	500.000	−352.590	−63.315	500.061	−352.450	0.155
3	316.559	357.140	−77.794	316.660	357.435	−78.670	0.318
4	63.312	214.286	261.560	63.363	214.125	261.455	0.192
5	−443.182	357.143	−346.675	−442.832	357.294	−346.440	0.443
6	−316.559	214.286	−75.646	−316.600	215.227	−75.002	0.084
7	−316.559	−357.143	−237.388	−316.614	−356.990	−237.190	0.254
8	−443.182	−357.143	−341.402	−443.074	−357.200	−341.580	0.221

由以上实例及比较可知,B 样条曲面精确拟合算法能够对现实世界中自由曲面物体进行快速精确的拟合,为虚拟装配提供了准确的数据基础,保证了装配的精度.

4　结 束 语

本文提出的 B 样条曲线曲面自适应拟合算法,弥补了原有算法对已知空间数据点进行拟合存在误差的不足. 该算法实现了对已知空间数据点本身自适应的逼近拟合,它不需要人反复移动控制顶点去试探性地修改曲线形状,解决了在曲线上任一指定点沿指定方向移动某个距离,并反算出要移动的控制顶点新位置的问题. 另外,通过对已知数据点的误差判定和对应控制顶点的修改,保证了计算速度,同时又能真实再现原有物体. 本文还具体给出了合适的边界条件,使该算法适合空间中任何曲面物体.

参考文献(References)

[1] 雷明涛,达飞鹏,谭小洪,等. 杂乱点云的快速曲线拟合算法研究[J]. 计算机工程与科学,2004,26(1):31−34
Lei Mingtao, Da Feipeng, Tan Xiaohong, et al. On the fast curve-fitting algorithms for unorganized point-clouds[J]. Computer Engineering and Science, 2004, 26(1): 31−34(in Chinese)

[2] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京:高等教育出版社,2001:80−83
Shi Fazhong. Computer aided geometric design and non-uniform rational B-spline[M]. Beijng: Higher Education Press, 2001:80−83(in Chinese)

[3] Piegl Les A, Tiller Wayne. Reducing control points in surface interpolation[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 2002, 23(5): 70−74

[4] Piegl Les A, Tiller Wayne. Approximating surfaces of revolution by nonrational B-splines[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 2003, 23(3): 46−51

(责任编辑:文丽芳)