多学科设计优化中的不确定性建模

韩明红 邓家提

(北京航空航天大学 机械工程及自动化学院，北京 100083)

摘 要：不确定性因素对复杂工程系统设计的影响贯穿整个设计过程.对多学科设计优化(MDO,Multidisciplinary Design Optimization)中不确定性的来源进行了总结和归类；建立了包含2个耦合学科的MDO系统分析输出结果的不确定性与设计变量输入数据误差和模型误差之间关系的数学模型,用于计算各种不确定性对系统性能的影响.算例分析结果和实验结果吻合,表明该数学模型有效可靠.经过扩展可用于估算包含多个耦合学科的MDO系统分析输出结果的不确定性,为鲁棒多学科设计优化方法的构建提供理论基础.

关 键 词：优化；计算机辅助设计；数学模型；产品设计；多学科设计优化

中图分类号：TP 391.7

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2007)01-0115-04

Uncertainty modeling in multidisciplinary design optimization

Han Minghong Deng Jiati

(School of Mechanical Engineering and Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Uncertainty is pervasive throughout the design process of complex engineering system. The sources of uncertainty in multidisciplinary design optimization(MDO) were summarized and classified into three categories: requirement error, input data error and model error. A mathematical model was built up for the estimation of propagated uncertainty in MDO system that contained two coupled disciplines(subsystems), which represented the relationship between input data error, model error and uncertainty in results of MDO system analysis to evaluate the influence of uncertainties for system performance. The agreement of the final computation results with the experimental data indicates this model is effective and reliable. Having extended, this model could be used to estimate the uncertainty in results of MDO system analysis, which contains more coupled disciplines(subsystems). The research is useful for the development of robust MDO methods.

Key words: optimization; computer aided design; mathematical model; product design; multidisciplinary design optimization

多学科设计优化(MDO,Multidisciplinary Design Optimization)是复杂工程系统的重要设计方法之一,尤其在航空航天领域得到了广泛应用.MDO通过将有相互影响的多个学科综合起来进行设计优化,利用学科之间的协同机制,在保证系统总体最优的前提下,达到提高性能、降低成本的目的[1].但是由于设计条件和数学模型准确性等不确定性因素的存在,任何工程系统的设计都存在不确定性的影响.

不确定性的来源有很多,这些不确定性因素对工程系统设计的影响贯穿整个设计过程.通常,概念设计阶段的不确定性对设计结果有着最重要的影响[2].目前,工业界和许多学术组织对不确定性的研究,主要集中在不确定性对工程设计的影响方面[3].虽然MDO在飞机、舰艇、汽车、航天等领域得到了广泛的应用,但是作为一门新兴学科,

收稿日期：2006-01-19

基金项目：国家自然科学基金资助项目(50275005)；国防基础科研资助项目(K1203010804)

作者简介：韩明红(1974—),男,河南新乡人,博士后,hanminghong@163.com.

MDO中的不确定性还没被引起足够的重视，只有少量文献对此进行了初步的探讨[4-5]. 本文对MDO中不确定性的建模进行了研究，辅助设计人员获得鲁棒的最优解.

1 MDO中不确定性的来源

1.1 单学科不确定性的来源

单学科不确定性的来源是研究多学科系统分析输出结果不确定性的基础. 目前，仿真分析代码和分析工具在计算机辅助设计过程中得到了广泛应用，其分析结果的不确定性主要源于3方面：①用户需求的不确定性造成的误差，本文定义为需求误差；②与仿真分析代码和工具、模型相关的不确定性造成的误差，包括理论误差、近似误差、方法误差、舍入误差等，本文定义为模型误差；③设计变量的精度误差、概率误差，本文定义为输入数据误差. 单学科不确定性来源示意图见图1.

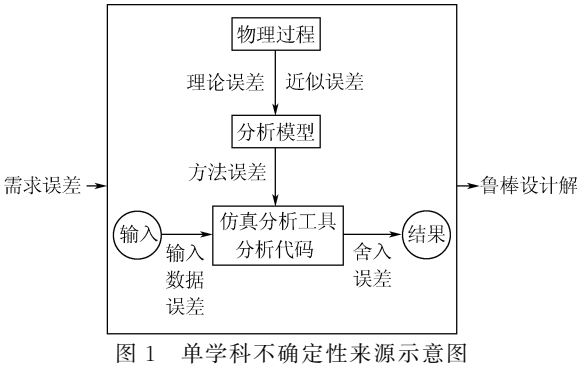

图1 单学科不确定性来源示意图

1.2 多学科系统不确定性的来源

复杂工程系统的设计通常涉及多个学科. 大多数工程系统的模型都是使用专用的学科设计、建模工具来完成的，这些工具都具有一定的不确定性. 多学科系统模型一般都是高度耦合的，一个学科的输出可能是另一个学科的输入.

图2是包含3个学科的多学科系统分析示意图，每个学科都有专用的学科仿真分析工具. 学科不确定性主要是设计变量的输入数据误差 $\Delta \boldsymbol{x}$ 和仿真分析工具的模型误差引起的. 系统的输出性能误差 $\Delta \boldsymbol{y}$ 是多学科多种类不确定性影响的综合结果.

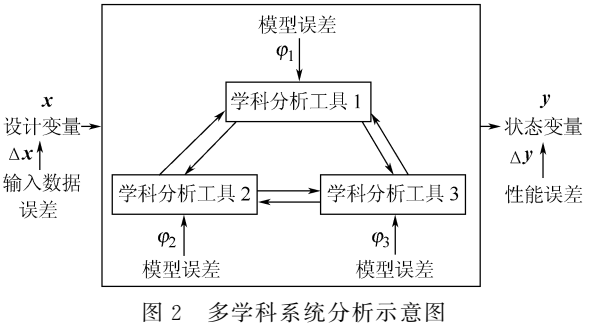

图2 多学科系统分析示意图

2 MDO中不确定性的建模

为了得到各种不确定性对系统性能的影响，在对多学科系统分析中的不确定性建模时，需满足如下假设条件：

1) 对于同一个仿真分析工具，同样的输入得到同样的输出，且输出结果中的模型误差相同；

2) 模型误差是仿真分析工具输入的函数；

3) 在执行敏感性分析中，仿真分析工具输入微小变化时，模型误差变化微小，忽略不计；

4) 在进行多学科设计优化的过程中，学科仿真分析工具不变，且仿真分析工具的模型误差已知；

5) 仿真分析工具对多学科设计优化过程收敛能力的影响忽略不计；

6) 需求误差忽略不计.

包含2个耦合学科的MDO系统分析可以用式(1)表示：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1 &= F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)\\ \boldsymbol{y}_2 &= F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$ 分别为2个学科仿真分析工具的输出状态矢量；$\boldsymbol{x}$ 为输入矢量.

假定设计变量矢量 $\boldsymbol{x}$ 的输入数据误差为 $\Delta \boldsymbol{x}$；仿真分析工具的模型误差分别为 ΔF_1，ΔF_2，那么仿真分析工具的输入真值 $\boldsymbol{x}^*$ 为

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x} \tag{2}$$

仿真分析工具不存在模型误差时的理论输出 F_1^*，F_2^* 分别为

$$\left.\begin{aligned}F_1^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2) &= F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2) + \Delta F_1\\ F_2^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1) &= F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1) + \Delta F_2\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

假定仿真分析工具的理想状态输出 $\boldsymbol{y}_1^*$，$\boldsymbol{y}_2^*$ 分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1^* &= \boldsymbol{y}_1 + \Delta \boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2^* &= \boldsymbol{y}_2 + \Delta \boldsymbol{y}_2\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

根据条件2)，模型误差是仿真分析工具输入的函数，因此有

$$\left.\begin{aligned}\Delta F_1 &= \varphi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)\\ \Delta F_2 &= \varphi_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

将式(5)代入式(3)可得

$$\left.\begin{aligned}F_1^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2) &= F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2) + \varphi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)\\ F_2^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1) &= F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1) + \varphi_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

因此可得

$$\left.\begin{aligned}F_1^*(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}_2^*) &= F_1(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}_2^*) + \varphi_1(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}_2^*)\\ F_2^*(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}_1^*) &= F_2(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}_1^*) + \varphi_2(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}_1^*)\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

根据条件 2)可知

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1^* &= F_1^*(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_2^*)\\ \boldsymbol{y}_2^* &= F_2^*(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_1^*)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

将式(7)代入式(8)可得

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1^* &= F_1(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_2^*) + \varphi_1(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_2^*)\\ \boldsymbol{y}_2^* &= F_2(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_1^*) + \varphi_2(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_1^*)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$F_1(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_2^*)$的泰勒序列展开式为

$$F_1(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_2^*) = F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) + \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}) + \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{y}_2}(\boldsymbol{y}_2^* - \boldsymbol{y}_2) = F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) + \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \Delta \boldsymbol{x} + \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{y}_2} \cdot \Delta \boldsymbol{y}_2 \tag{10}$$

将式(4)、式(1)和式(10)代入式(9)可得

$$\Delta \boldsymbol{y}_1 = \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \Delta \boldsymbol{x} + \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{y}_2} \cdot \Delta \boldsymbol{y}_2 + \varphi_1(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_2^*) \tag{11}$$

由条件 3)可知,$\varphi_1(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}_2^*) \approx \varphi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$,代入式(11)并调整可得

$$\Delta \boldsymbol{y}_1 - \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{y}_2} \cdot \Delta \boldsymbol{y}_2 = \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \Delta \boldsymbol{x} + \varphi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) \tag{12}$$

同理可得

$$\Delta \boldsymbol{y}_2 - \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{y}_1} \cdot \Delta \boldsymbol{y}_1 = \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \Delta \boldsymbol{x} + \varphi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) \tag{13}$$

将式(12)、式(13)联立为方程组,并变换得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 & -\dfrac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{y}_2} \\ -\dfrac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{y}_1} & \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{y}_1 \\ \Delta \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \Delta \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \varphi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) \\ \varphi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) \end{bmatrix} \tag{14}$$

从文献[6]关于全局敏感性方程的推导可知

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 & -\dfrac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{y}_2} \\ -\dfrac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{y}_1} & \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_1}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_2}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \tag{15}$$

将式(15)代入式(14),并左乘全局敏感性矩阵的逆矩阵可得

$$\begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{y}_1 \\ \Delta \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_1}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_2}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \Delta \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 & -\dfrac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{y}_2} \\ -\dfrac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{y}_1} & \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) \\ \varphi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) \end{bmatrix} \tag{16}$$

这样就得到了包含 2 个耦合学科的 MDO 系统分析输出结果的不确定性 $\Delta \boldsymbol{y}_1, \Delta \boldsymbol{y}_2$ 与设计变量输入数据误差 $\Delta \boldsymbol{x}$ 和模型误差 φ_1, φ_2 之间关系的数学模型.同理可以扩展推导出多个耦合学科 MDO 系统分析输出结果不确定性的数学模型.

3　算例分析和实验验证

本文选取一个多学科优化问题进行多学科系统分析计算,验证所建数学模型的有效性.优化问题描述如下:

$$\begin{aligned}&\min z_1\\ &\text{s. t. } z_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2} z_2\\ &\qquad z_2 = x_1 + x_4 - z_1^2\end{aligned}$$

该优化问题可以分解为包含 2 个耦合学科的 MDO 问题,按照多学科可行法(MDF,MultiDisciplinary Feasible)分解后的 MDO 模型如图 3 所示.

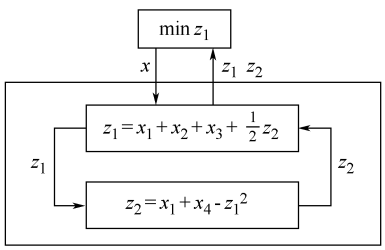

图 3　优化问题的 MDF 模型

3.1　算例分析

为简单起见,假定输入数据误差和模型误差均为正态分布.对于正态分布,分布在 $\pm 3\sigma$ 范围内的概率为 99.73%,因此可取设计变量的误差范围近似为 $\pm 3\sigma$,如表 1 所示.不同仿真分析工具模型误差差别较大,依据经验通常小于 10%,本例中由于没有使用专用仿真分析工具,故模型误差近似为 0.

表 1　输入数据误差

变量	均值 μ	标准偏差 σ	误差范围
x_1	2	0.05	±0.15
x_2	1	0.03	±0.09
x_3	5	0.08	±0.24
x_4	6	0.10	±0.30

将理论最优解 $z_1 = 4, z_2 = -8$ 和表 1 中已知条件代入式(16)即可得 z_1 和 z_2 的误差范围:$|\Delta z_1| = 0.48$,$|\Delta z_2| = 0.45$.即 2 个分析学科输出结果 z_1 和 z_2 的不确定性最大分别为 $\Delta z_1 = \pm 0.48$ 和 $\Delta z_2 = \pm 0.45$.

3.2　实验验证

本文使用蒙特卡罗仿真方法对该实例进行实验验证,实验在系统设计优化平台 SDOF[7] 中进行.只要得到输出结果 z_1 和 z_2 的不确定性最大

值不超过 $\Delta z_1=\pm 0.48$ 和 $\Delta z_2=\pm 0.45$，或 $\sigma_{z_1}\leqslant 0.16$，$\sigma_{z_2}\leqslant 0.15$ 就证明了式(16)的有效性和可靠性.

蒙特卡罗仿真次数为 1 001 次，实验结果如图 4～图 6 所示. 其中，n 为仿真次数，$\sigma_{z_1}=0.021\,178\,3$，$\sigma_{z_2}=0.136\,163$.

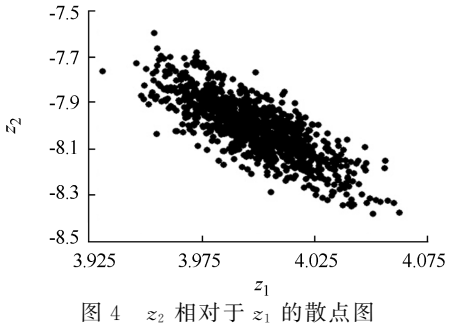

图 4 z_2 相对于 z_1 的散点图

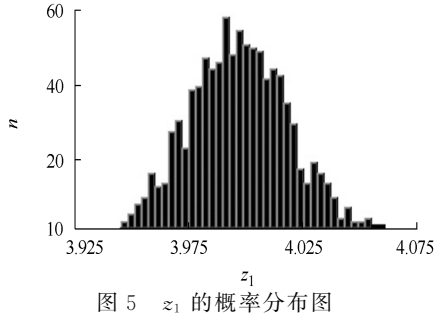

图 5 z_1 的概率分布图

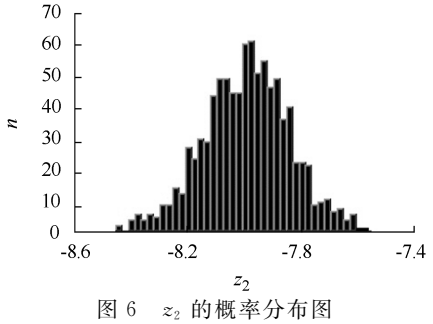

图 6 z_2 的概率分布图

实验结果可见，z_1 和 z_2 的不确定性最大值没有超出 $\Delta z_1=\pm 0.48$ 和 $\Delta z_2=\pm 0.45$ 的范围，同时也满足 σ_{z_1}，σ_{z_2} 的要求. 实验结果验证了本文建立的 MDO 系统分析输出结果的不确定性与设计变量输入数据误差和模型误差之间关系的数学模型是正确、有效和可靠的，能够很好地估算多学科系统分析结果的不确定性.

4 结束语

不确定性因素对工程系统设计的影响贯穿整个设计过程，只有在 MDO 过程中考虑不确定性带来的影响才能获得鲁棒的设计结果. 本文将 MDO 和不确定性统一起来进行研究，首先对 MDO 中不确定性的来源进行了分析、总结；其次，通过数学推导建立了 MDO 系统分析输出结果的不确定性与设计变量输入数据误差和模型误差之间关系的数学模型；最后，通过实验对数学模型的有效性和可靠性进行了验证. 该数学模型经过推广，可应用于估算包含多个耦合学科的 MDO 系统分析输出结果的不确定性.

参考文献（References）

[1] Han Minghong, Deng Jiati. Multidisciplinary design optimization methods for complex engineering systems[C]//Yang H C. Proceedings of the International Conference on Agile Manufacturing. Beijing: China Machine Press, 2003: 347－354

[2] Delaurentis D A, Mavris D N. Uncertainty modeling and management in multidisciplinary analysis and synthesis[R]. AIAA-2000-0422, 2000

[3] Chen W, Yuan C. A probabilistic-based design model for achieving flexibility in design[J]. Journal of Mechanical Design, 2000, 121(3): 77－83

[4] Du X P, Wang Y J, Chen W. Methods for robust multidisciplinary design[R]. AIAA-2000-1785, 2000

[5] Mavris D V, Bandte O, Mavris D A. Robust design simulation: a probabilistic approach to multidisciplinary design[J]. Journal of Aircraft, 1999, 36(1): 298－397

[6] Sobieszczanski-Sobieski J, Agte J S, Sandusky R R Jr. Bi-level integrated system synthesis(BLISS)[R]. NASA/TM-1998-208715, 1998

[7] 韩明红，邓家褆. 复杂工程系统多学科设计优化集成环境研究[J]. 机械工程学报，2004，40(9)：100－105
Han Minghong, Deng Jiati. Study on integrated framework of multidisciplinary design optimization for complex engineering system[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(9): 100－105(in Chinese)

（责任编辑：文丽芳）