交通网络中用户均衡行为的效率损失上界

黄海军 欧阳恋群 刘天亮

(北京航空航天大学 经济管理学院, 北京 100083)

摘 要: 确定交通网络用户均衡行为效率损失的上界是当前国际上的一个研究热点. 深入分析了固定需求的交通网络中用户均衡与系统最优之间的关系, 通过引入一个与均衡流量相关的参数, 得到新用户均衡行为效率损失上界计算公式. 算例结果表明, 新的上界比目前文献报道的最低值还小. 得到一个具有普适性的结论, 即发现更小的用户均衡行为效率损失上界须涉及对象网络的所有特征, 包括路段阻抗函数的特性、网络结构和交通需求水平.

关 键 词: 用户均衡; 系统最优; 效率损失上界

中图分类号: U 491

文献标识码: A 文 章 编 号: 1001-5965(2006) 10-1215-05

Upper bounds of efficiency loss for user equilibrium behavior in traffic networks

Huang Haijun Ouyang Lianqun Liu Tianliang

(School of Economics and Management, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Determining the upper bounds of efficiency loss for user equilibrium behavior in traffic networks has become a hot topic. The relationship between user equilibrium and system optimum flow patterns was explored in traffic networks with fixed demands. New formulae for computing the upper bounds of efficiency loss caused by user equilibrium behavior were derived through introducing a parameter associated with the user equilibrium flow pattern. Numerical examples show that the new formulae can give lower values of the upper bounds than those reported in literature. It is also concluded that finding more accurate upper bounds has to be connected with all characteristics of the studied networks, including the link cost functions, the network configurations and the travel demands.

Key words: user equilibrium; system optimum; upper bounds of efficiency loss

人们出行的路径选择是一个博弈过程, 每个出行者都是博弈的个体, 总是追求自身利益的最大化, 在交通网络中总是选择时间与距离最短的路径或旅行代价最小的路径, 多人博弈的结果是用户均衡, 即没有人能够通过单方面改变路径进一步降低自身费用. 已有的研究结果表明, 非合作博弈造成的用户均衡相对于系统最优是不经济的, 然而, 实现系统最优的代价是高昂的. 城市交通网络由于路段的通行能力有限, 是一个资源受到约束的系统, Roughgarden发现当路段的阻抗函数为线性函数时, 用户均衡导致的效率损失最多为系统最优的 1/3, 说明用户均衡与系统最优之间的差距是有上界的[1], 这一发现引发人们对用户均衡与系统最优的关系进行重新思考. 之后, 学者们对 Roughgarden 的研究进行多方面的扩展[2-9]. 另一方面, 著名的计算科学家 Papadimitriou等人对博弈均衡的复杂性、最劣的均衡以及如何计算均衡做了深入研究[10-12].

是否存在比 Roughgarden等学者得到的效率损失上界值更低的上界是引发开展本研究的主要原因. 本文定量地分析用户均衡与系统最优之间的关系, 引入参数 $\theta(\bar{v})$. $\bar{v}$是用户均衡状态下的

收稿日期: 2006-04-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (70521001)

作者简介: 黄海军 (1964-), 男, 湖南望城人, 教授, haijunhuang@buaa.edu.cn

路段流量向量, 该参数考虑了所有影响效率损失上界的因素, 从而得到了更加精确的用户均衡行为效率损失上界.

1 基本模型

考虑一个城市交通网络 $G=(N, A)$, N 是所有节点的集合, A 是所有路段的集合, 用 r 和 s 分别表示出行的起节点 O(Origin)和讫节点 D(Destination), k 是连接起节点和讫节点的路径. d_{rs} 是从 r 到 s 的出行需求量; 向量 $\boldsymbol{d}=(\cdots, d_{rs}, \cdots)^{\mathrm{T}}$, v_a 是路段 a 上的流量, 向量 $\boldsymbol{v}=(\cdots, v_a, \cdots)^{\mathrm{T}}$, $t_a(v_a)$ 是路段 a 上的行驶时间或阻抗; f_k^{rs} 是 OD 对 (r, s) 之间路径 k 上的流量, $\delta_{ak}^{rs}=1$, 如果路段 a 在连接 OD 对 (r, s) 的路径 k 上, 否则为 0.

产生用户均衡 UE(User Equilibrium)流量分布的等价数学规划模型为[13]

$$\left.\begin{aligned}&\min_{v\in\Omega}\sum_{a\in A}\int_0^{v_a}t_a(w)\,\mathrm{d}w\\&\text{s.t.}\ \sum_k f_k^{rs}=d_{rs}\qquad(\forall r, s)\\&\qquad f_k^{rs}\geqslant 0\qquad(\forall k, r, s)\\&\qquad v_a=\sum_r\sum_s\sum_k f_k^{rs}\delta_{ak}^{rs}\qquad(\forall a)\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

上述约束条件构成的可行解空间为 Ω. 产生系统最优 SO(System Optimum)流量分布的等价数学规划模型为[13]

$$\min_{\boldsymbol{v}\in\Omega}C(\boldsymbol{v})=\sum_{a\in A}v_a t_a(v_a)\qquad(2)$$

设 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ 分别是上述 2 个模型的路段流量解, 令它们所对应的系统总成本分别为 $C(\bar{\boldsymbol{v}})=\sum_{a\in A}\bar{v}_a t_a(\bar{v}_a)$ 和 $C(\tilde{\boldsymbol{v}})=\sum_{a\in A}\tilde{v}_a t_a(\tilde{v}_a)$. 定义:

$$\rho=C(\bar{\boldsymbol{v}})/C(\tilde{\boldsymbol{v}})\qquad(3)$$

显然 $\rho\geqslant 1$, $\rho-1$ 就是用户均衡行为导致的效率损失. ρ 值越大, 效率损失越大, 反之越小. 本文通过确定 ρ 的最大值来讨论用户均衡行为的效率损失上界, 如果能得到更小的 ρ 极大值, 则说明找到了更精确的效率损失上界, 也就进一步支持了自由竞争的合理性(在交通问题中是 UE 的合理性). 如果所研究网络中存在多个 UE 解, 应使用对应的系统总成本最大的 UE 解来讨论 ρ 值[10].

为体现路段交通的拥挤效应, 设定 $t_a(v_a)$ 是非递减函数, $C(\boldsymbol{v})$ 是凸函数. 在下面的分析中, 所有 OD 对之间的出行需求是给定的、且固定不变.

2 用户均衡行为的效率损失上界

引入一个新函数 $\tilde{t}_a(v_a)=t_a(v_a)+v_a t'_a(v_a)$, 其中 $t'_a(v_a)=\mathrm{d}t_a(v_a)/\mathrm{d}v_a$.

定理 1 若存在常数 τ, 使得对于任意 x_a 和 y_a, $\forall a\in A$, 当 $y_a=\tau x_a$ 时, 有 $t_a(x_a)=\tilde{t}_a(y_a)$, 则如果 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 是出行需求 $\boldsymbol{d}$ 的 UE 解, 那么 $\tilde{\boldsymbol{v}}_\tau=\tau\bar{\boldsymbol{v}}$ 就是需求 $\tau\boldsymbol{d}$ 的 SO 解, 且 $0<\tau\leqslant 1$.

证明 若 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 为需求 $\boldsymbol{d}$ 的 UE 解, 由 UE 模型式(1)~式(4)的最优性条件, 有

$$\sum_{a\in A}t_a(\bar{v}_a)\delta_{ak}^{rs}=\mu_{rs}\qquad\bar{f}_k^{rs}>0\qquad(4)$$

$$\sum_{a\in A}t_a(\bar{v}_a)\delta_{ak}^{rs}\geqslant\mu_{rs}\qquad\bar{f}_k^{rs}=0\qquad(5)$$

式中, μ_{rs} 是对应于式(1)中的第 1 个约束条件的拉格朗日算子, 它就是 UE 状况下 OD 对 (r, s) 之间的最小行驶阻抗[10]. 将 $\tilde{t}_a(\tau\bar{v}_a)=t_a(\bar{v}_a)$, $\forall a\in A$, 代入式(4)~式(5), 且注意 $\tau>0$, 得

$$\sum_{a\in A}\tilde{t}_a(\tau\bar{v}_a)\delta_{ak}^{rs}=\mu_{rs}\qquad\tau\bar{f}_k^{rs}>0\qquad(6)$$

$$\sum_{a\in A}\tilde{t}_a(\tau\bar{v}_a)\delta_{ak}^{rs}\geqslant\mu_{rs}\qquad\tau\bar{f}_k^{rs}=0\qquad(7)$$

令 $\tilde{f}_k^{rs}=\tau\bar{f}_k^{rs}$, 考虑式(1)中约束条件, 有 $\sum_k\tilde{f}_k^{rs}=\tau d_{rs}$ 和 $\sum_r\sum_s\sum_k\tilde{f}_k^{rs}\delta_{ak}^{rs}=\tau\bar{v}_a$, 易知式(6)、式(7)是出行需求为 $\tau\boldsymbol{d}$ 时的 SO 模型的最优性条件. 令 $\tilde{\boldsymbol{v}}_\tau=\tau\bar{\boldsymbol{v}}$, 显然 $\tilde{\boldsymbol{v}}_\tau$ 就是需求 $\tau\boldsymbol{d}$ 的 SO 解. 由于 $t_a(\bar{v}_a)=\tilde{t}_a(\tau\bar{v}_a)=t_a(\tau\bar{v}_a)+\tau\bar{v}_a t'_a(\tau\bar{v}_a)$, 且 $t_a(v_a)$ 是非递减函数(其一阶导数为非负值), 易知 $\tau\leqslant 1$ 必然成立. 证毕

下面应用定理 1 来研究 2 个特殊的例子.

例 1 Roughgarden[1]在线性的路段阻抗函数下, 如果 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 是需求 $\boldsymbol{d}$ 的 UE 解, 则 $0.5\bar{\boldsymbol{v}}$ 为需求 $0.5\boldsymbol{d}$ 下的 SO 解. 这个结论很容易从定理 1 得到, 考虑线性函数 $t_a(v_a)=n_a+m_a v_a$, 其中 n_a 和 m_a 为常数, 有 $t_a(\tau\bar{v}_a)+\tau\bar{v}_a t'_a(\tau\bar{v}_a)=n_a+m_a\tau\bar{v}_a+\tau\bar{v}_a m_a$, 解方程 $n_a+2\tau\bar{v}_a m_a=n_a+m_a v_a$, 则 $\tau=0.5$, 从而得到 Roughgarden 的结论.

例 2 若路段阻抗函数呈多项式 $t_a(v_a)=n_a+m_a(v_a)^p$ 的形式, 应用定理 1 的前提条件, 即解方程 $n_a+m_a(\tau\bar{v}_a)^p+\tau\bar{v}_a m_a p(\tau\bar{v}_a)^{p-1}=n_a+m_a(v_a)^p$, 得 $\tau=1/(p+1)^{1/p}$. 所以, 如果 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 为需求 $\boldsymbol{d}$ 的 UE 解, 则 $\tilde{\boldsymbol{v}}=\bar{\boldsymbol{v}}/(p+1)^{1/p}$ 为需求 $\boldsymbol{d}/(p+1)^{1/p}$ 的 SO 解. 图 1 画出了曲线 $\tau=1/(p+1)^{1/p}$. 可见, 随着路段阻抗函数中表现拥挤程度的参数的上升, τ 趋近 1, UE 趋近 SO. 此外, 当 $p\to 0$ 时, 有 $\tau\to 1/\mathrm{e}$. 图 1 不能用于 $p=0$ 的情形, $p=0$ 对应固定路段阻抗的网络, UE 模型和 SO 模型的目标函数相同, UE 流量分布与 SO 流量分布也就相

同, 所以 $\tau = 1$.

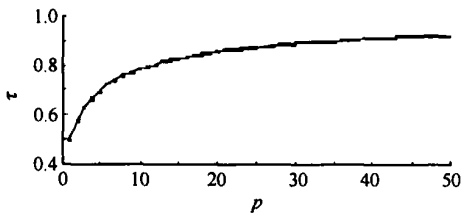


图 1　函数 $\tau = 1/(p+1)^{1/p}$

推论 **1**　若存在常数 τ, 使得对于任意 x_a 和 y_a, $\forall a \in A$, 当 $y_a = \tau x_a$ 时, 有 $t_a(x_a) = \tilde{t}_a(y_a)$, 则如果 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ 是出行需求 $\boldsymbol{d}$ 的 SO 解, 那么 $\bar{\boldsymbol{v}}_{1/\tau} = \tilde{\boldsymbol{v}}/\tau$ 就是需求 $\boldsymbol{d}/\tau$ 的 UE 解, 且 $0 < \tau \leqslant 1$.

使用证明定理 1的办法可得出推论 1. 下面不加证明地直接写出文献[2]得到的一个结果.

引理 **1**　若 $C(\boldsymbol{v})$ 为凸函数, $\tilde{\boldsymbol{v}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{v}}_\tau$ 分别是需求 $\boldsymbol{d}$ 和 $\tau\boldsymbol{d}$ 的 SO 解, $\tau \leqslant 1$, 则有[2]

$$C(\tilde{\boldsymbol{v}}) - C(\tilde{\boldsymbol{v}}_\tau) \geqslant \frac{1-\tau}{\tau}\sum_{a\in A}\tilde{t}_a(\tilde{v}_{a,\tau})\tilde{v}_{a,\tau} \quad (8)$$

定理 **2**　若存在小于 1的常数 τ, 使得对于任意 x_a 和 y_a, $\forall a \in A$, 当 $y_a = \tau x_a$ 时, 有 $t_a(x_a) = \tilde{t}_a(y_a)$, 则如果 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ 分别是需求 $\boldsymbol{d}$ 的 UE 解和 SO 解, 有

$$\frac{C(\bar{\boldsymbol{v}})}{C(\tilde{\boldsymbol{v}})} \leqslant \frac{1}{1+\tau(\theta-1)} \quad (9)$$

式中, θ 满足 $t_a(\tau\bar{v}_a) \geqslant \theta t_a(\bar{v}_a)$, $\forall a \in A$.

证明　设 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ 分别是需求 $\boldsymbol{d}$ 的 UE 解和 SO 解, 由定理 1, $\tilde{\boldsymbol{v}}_\tau = \tau\tilde{\boldsymbol{v}}$ 就是需求 $\tau\boldsymbol{d}$ 的 SO 解. 根据引理 1和本定理的前提条件, 有

$$C(\tilde{\boldsymbol{v}}) - C(\tilde{\boldsymbol{v}}_\tau) \geqslant \frac{1-\tau}{\tau}\sum_{a\in A}\tilde{t}_a(\tilde{v}_{a,\tau})\tilde{v}_{a,\tau} = \frac{1-\tau}{\tau}\sum_{a\in A}t_a(\bar{v}_a)\tau\bar{v}_a \quad (10)$$

详细列出式(10)左边第 2项的计算式, 有

$$C(\tilde{\boldsymbol{v}}_\tau) = \sum_{a\in A}\tilde{v}_{a,\tau}t_a(\tilde{v}_{a,\tau}) = \sum_{a\in A}\tau\bar{v}_a t_a(\tau\bar{v}_a) \quad (11)$$

将式(11)代入式(10), 得

$$C(\tilde{\boldsymbol{v}}) \geqslant \frac{1-\tau}{\tau}\sum_{a\in A}t_a(\bar{v}_a)\tau\bar{v}_a + \sum_{a\in A}\tau\bar{v}_a t_a(\tau\bar{v}_a) \quad (12)$$

若存在 θ 满足 $t_a(\tau\bar{v}_a) \geqslant \theta t_a(\bar{v}_a)$, $\forall a \in A$, 则式(12)变为

$$C(\tilde{\boldsymbol{v}}) \geqslant (1+\tau(\theta-1))\sum_{a\in A}t_a(\bar{v}_a)\bar{v}_a \quad (13)$$

根据 UE 状态总成本的定义, $C(\bar{\boldsymbol{v}}) = \sum_{a\in A}t_a(\bar{v}_a)\bar{v}_a$, 从式(13)直接得到式(9). 证毕

由于 $0 < \tau \leqslant 1$和路段阻抗函数是非递减的, 显然, 满足 $t_a(\tau\bar{v}_a) \geqslant \theta t_a(\bar{v}_a)$的 θ是小于 1的, 所以式(9)的右边项是大于 1的.

Roughgarden和 Tardos[11], 对于线性阻抗函数网络, 有 $C(\bar{\boldsymbol{v}})/C(\tilde{\boldsymbol{v}}) \leqslant 4/3$; Correa等[7]运用变分不等式的方法再次证明了这个结论. 下面对线性网络的特殊例子进行分析, 说明运用定理 2可以得到比 4/3更小的效率损失上界.

例 **3**　考虑一个由 2条路段连接一个 *OD* 对的简单网络, 设线性阻抗函数为 $t_1 = v_1 + 1$和 $t_2 = 2v_2 + 1$, *OD* 需求为 $d = 3$. 显然, UE 解是 $\bar{v}_1 = 2$和 $\bar{v}_2 = 1$. 这是一个线性网络, 所以有 $\tau = 0.5$ 满足 $t_1(0.5\times 2) \geqslant \theta t_1(2)$和 $t_2(0.5\times 1) \geqslant \theta t_2(1)$的 θ 是 $\theta \leqslant \frac{2}{3}$, 取 $\theta = \frac{2}{3}$代入式(9), 有 $C(\bar{\boldsymbol{v}})/C(\tilde{\boldsymbol{v}}) \leqslant 6/5$, $6/5 < 4/3$, 可见得到了更小的用户均衡效率损失上界. 事实上, 本网络的 SO 解是 $\tilde{v}_1 = 2$和 $\tilde{v}_2 = 1$, 所以 $C(\bar{\boldsymbol{v}})/C(\tilde{\boldsymbol{v}}) = 1$.

可见, 对于任何参数的线性网络 $t_a(v_a) = n_a + m_a v_a$, $a \in A$, 由于 $\tau = 0.5$ 满足 $t_a(\tau\bar{v}_a) \geqslant \theta t_a(\bar{v}_a)$的 θ总是大于 0.5的, 所以由式(9)确定的 UE行为效率损失上界总比 4/3小.

定理 2的前提假设是非常严格的, 要求网络中存一个取值唯一的常数 τ, 使得对于任意 x_a 和 y_a, $\forall a \in A$, 当 $y_a = \tau x_a$ 时, 有 $t_a(x_a) = \tilde{t}_a(y_a)$. 在非线性阻抗函数的网络中, 取值唯一的常数 τ往往不存在. 例如, 考虑一个由 2条路段连接一个 *OD* 对的简单网络, 设非线性的阻抗函数为 $t_1 = v_1^2 + v_1$ 和 $t_2 = 3v_2^2 + 3v_2$, 由定理 2的前提条件, τ应该是方程 $(3\tau^2 - 1)v_1 + (2\tau - 1) = 0$和 $(3\tau^2 - 1)v_2 + (2\tau - 1) = 0$的解, 所以不存在独立于流量分布的 τ值. 下面的定理 3放宽了对 τ的唯一取值要求.

定理 **3**　考虑一般结构的交通网络, 若存在小于 1的非负常数 τ_- 和 τ_+, 使得对于任意 x_a 和 y_a, $\forall a \in A$, 当 $\tau_- x_a \leqslant y_a \leqslant \tau_+ x_a$ 时, 有 $t_a(x_a) = \tilde{t}_a(y_a)$, 则如果 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ 分别是需求 $\boldsymbol{d}$ 的 UE 解和 SO 解, 有

$$\frac{C(\bar{\boldsymbol{v}})}{C(\tilde{\boldsymbol{v}})} \leqslant \frac{1}{1+\tau_+(\theta-1)} \quad (14)$$

式中, θ 满足 $t_a(\tau_-\bar{v}_a) \geqslant \theta t_a(\bar{v}_a)$, $\forall a \in A$.

证明　可以用向量表示路段阻抗, $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{v}) = (\cdots, t_a(v_a), \cdots)^{\mathrm{T}}$, 用变分不等式表示 UE, 即

$$\boldsymbol{t}(\bar{\boldsymbol{v}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v} - \bar{\boldsymbol{v}}) \geqslant 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \Omega \quad (15)$$

即

$$C(\bar{\boldsymbol{v}}) \leqslant \sum_{a\in A} t_a(\bar{v}_a)v_a = \sum_{a\in A} t_a(v_a)v_a + \sum_{a\in A}(t_a(\bar{v}_a) - t_a(v_a))v_a \tag{16}$$

改写上式, 有

$$\frac{\sum_{a\in A} t_a(v_a)v_a}{C(\bar{\boldsymbol{v}})} \geqslant 1 - \frac{\sum_{a\in A}(t_a(\bar{v}_a) - t_a(v_a))v_a}{C(\bar{\boldsymbol{v}})} \tag{17}$$

对于一个给定的路段流量 z_a 和一类路段阻抗函数 t_a, 定义

$$\left.\begin{aligned}&\phi_a(t_a, z_a) = \max_{v_a\geqslant 0}\frac{(t_a(z_a) - t_a(v_a))v_a}{t_a(z_a)z_a}\\ &\forall a \in A\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

极值问题式(18)的最优解 v_a^* 满足:

$$\left.\begin{aligned}&t_a(z_a) = t_a(v_a^*) + t'_a(v_a^*)v_a^* = \tilde{t}_a(v_a^*)\\ &\forall a\in A\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

由前提假设可知, 下列关系成立:

$$\left.\begin{aligned}&\tau_- z_a \leqslant v_a^* \leqslant \tau_+ z_a\\ &\forall a \in A\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

考虑到阻抗函数是非下降的, 把式(20)代入式(18)得

$$\phi_a(t_a, z_a) = \frac{(t_a(z_a) - t_a(v_a^*))v_a^*}{t_a(z_a)z_a} \leqslant \frac{(t_a(z_a) - t_a(\tau_- z_a))\tau_+ z_a}{t_a(z_a)z_a} \quad \forall a\in A \tag{21}$$

让 $\bar{v}_a$ 代替式(21)中的 z_a, 结合式(17), 得

$$\frac{\sum_{a\in A} t_a(v_a)v_a}{C(\bar{\boldsymbol{v}})} \geqslant 1 - \frac{\sum_{a\in A}\phi_a(t_a, \bar{v}_a)t_a(\bar{v}_a)\bar{v}_a}{C(\bar{\boldsymbol{v}})} \geqslant 1 - \frac{\sum_{a\in A}(t_a(\bar{v}_a) - t_a(\tau_-\bar{v}_a))\tau_+\bar{v}_a}{C(\bar{\boldsymbol{v}})} \tag{22}$$

式(22)对于任意 $\boldsymbol{v}\in\Omega$ 都成立. 利用 $t_a(\tau_-\bar{v}_a)\geqslant\theta t_a(\bar{v}_a)$, 并将式(22)左边的 v_a 换成 $\tilde{v}_a$, 则得到式(14). 证毕

尽管定理 3的前提条件比定理 2宽松, 但要求 τ_- 和 τ_+ 针对所有路段均是适用的. 如果为每条路段设置相应的 $\tau_{-,a}$ 和 $\tau_{+,a}$, 则可以获得更加精确的 UE行为效率损失上界.

定理 4 考虑一般结构的交通网络, 若存在 $T_- = (\cdots, \tau_{-,a}, \cdots)^{\mathrm{T}}$ 和 $T_+ = (\cdots, \tau_{+,a}, \cdots)^{\mathrm{T}}$, $0\leqslant\tau_{-,a}\leqslant 1$, $0\leqslant\tau_{+,a}\leqslant 1$, $\forall a\in A$, 使得对于任意 x_a 和 y_a, 当 $\tau_{-,a}x_a\leqslant y_a\leqslant\tau_{+,a}x_a$ 时, 有 $t_a(x_a) = \tilde{t}_a(y_a)$, 则如果 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ 分别是需求 $\boldsymbol{d}$ 的 UE解和 SO解, 有

$$\frac{C(\bar{\boldsymbol{v}})}{C(\tilde{\boldsymbol{v}})} \leqslant \frac{C(\bar{\boldsymbol{v}})}{\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}} \tag{23}$$

其中 $\boldsymbol{T} = (\cdots, t_a(\bar{v}_a)\bar{v}_a, \cdots)^{\mathrm{T}}$

$\alpha = (\cdots, 1 + \tau_{+,a}(\theta_a - 1), \cdots)^{\mathrm{T}}$

θ_a 满足 $t_a(\tau_{-,a}\bar{v}_a)\geqslant\theta_a t_a(\bar{v}_a)$, $a\in A$.

证明 使用与定理 3的证明过程类似的办法, 可以得到不等式:

$$\frac{\sum_{a\in A} t_a(v_a)v_a}{C(\bar{\boldsymbol{v}})} \geqslant 1 - \frac{\sum_{a\in A}(t_a(\bar{v}_a) - t_a(\tau_{-,a}\bar{v}_a))\tau_{+,a}\bar{v}_a}{C(\bar{\boldsymbol{v}})} \tag{24}$$

不等式(24)对于任意 $\boldsymbol{v}\in\Omega$ 都成立, 故可以将左边的 v_a 换成 $\tilde{v}_a$. 令 $\boldsymbol{T} = (\cdots, t_a(\bar{v}_a)\bar{v}_a, \cdots)^{\mathrm{T}}$, $\alpha = (\cdots, 1 + \tau_{+,a}(\theta_a - 1), \cdots)^{\mathrm{T}}$, 其中 θ_a 满足 $t_a(\tau_{-,a}\bar{v}_a)\geqslant\theta_a t_a(\bar{v}_a)$, $a\in A$. 根据这些关系重新整理式(24), 就得到式(23). 证毕

例 4 考虑前面提到的非线性阻抗函数网络, 阻抗函数为 $t_1 = v_1^2 + 4v_1 + 2$ 和 $t_2 = 3v_2^2 + 3v_2 + 1$, OD 需求为 $d = 2$ 唯一的 UE解是 $\bar{v}_1 = 1$, $\bar{v}_2 = 1$. 下面用文献中报道的方法和本文提出的定理 3和定理 4分别计算 UE行为的效率损失上界.

1) Roughgarden和 Tardos[1]的结果. 本算例的路段阻抗函数的最高幂次是 $p = 2$, 则

$$C(\bar{\boldsymbol{v}})/C(\tilde{\boldsymbol{v}}) \leqslant \left(1 - \left(\frac{p}{1+p}\right)\left(\frac{1}{1+p}\right)^{1/p}\right)^{-1} \approx 1.6258$$

2) Correa等[7]的结果. 该方法要求存在常数 η 使得 $t_a(0)\geqslant\eta t_a(\bar{v}_a)$, 本文 $t_a(0)$ 是路段 a 的自由流(或零流)阻抗. 对于本算例, 易知 $\eta = 1/7$, 所以有

$$C(\bar{\boldsymbol{v}})/C(\tilde{\boldsymbol{v}}) \leqslant \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)\left(\frac{p}{1+p}\right)\left(\frac{1}{1+p}\right)^{1/p}\right)^{-1} \approx 1.4923$$

3) 定理 3给出的结果. 首先根据定理 3的前提条件确定 τ_- 和 τ_+ 的具体取值, 即对于路段 1, 由方程 $x_1^2 + 4x_1 + 2 = 3y_1^2 + 8y_1 + 2$ 得到 $y_1 = \left(\sqrt{3x_1^2 + 12x_1 + 16} - 4\right)\backslash 3$, 其中 $0\leqslant x_1\leqslant 2$, 所以 $0.5\leqslant y_1/x_1\leqslant\left(\sqrt{13} - 2\right)\backslash 3\approx 0.5352$, 从对路段 2的分析同样得到 $0.5\leqslant y_2/x_2\leqslant\left(\sqrt{19} - 1\right)\backslash 6\approx 0.5598$, 则 $\tau_- = \min(0.5, 0.5) = 0.5$, $\tau_+ = \max(0.5352, 0.5598) = 0.5598$ 再寻找 θ的值, 将 $t_a(\tau_-\bar{v}_a)\geqslant\theta t_a(\bar{v}_a)$运用到 2条路段上, 有 $\theta\leqslant(\tau_-^2 + 4\tau_- + 2)/7 = 17/28$ 和 $\theta\leqslant(3\tau_-^2 + 3\tau_- + 1)/7 = 13/28$, 故 $\theta = 13/28$ 代入式(14)得

$$C(\bar{\boldsymbol{v}})/C(\tilde{\boldsymbol{v}}) \leqslant \frac{1}{1 + \tau_+(\theta - 1)} \approx 1.4284$$

4) 定理 4给出的结果. 先根据定理 4的前提条件确定 $\tau_{-,a}$和 $\tau_{+,a}$的具体取值, 与上面的分析过程类似, 有 $0.5 \leqslant y_1/x_1 \leqslant \left(\sqrt{13}-2\right)/3 \approx 0.5352$, 所以 $\tau_{-,1}=0.5$和 $\tau_{+,1}=\left(\sqrt{13}-2\right)/3$; 还有 $0.5 \leqslant y_2/x_2 \leqslant \left(\sqrt{19}-1\right)/6 \approx 0.5598$, 所以 $\tau_{-,2}=0.5$和 $\tau_{+,2}=\left(\sqrt{19}-1\right)/6$. 再寻找 2条路段的 θ_a值, 将 $t_a(\tau_{-,a}\bar{v}_a) \geqslant \theta_a t_a(\bar{v}_a)$ 运用到 2条路段上, 得到 $\theta_1 \leqslant (\tau_{-,1}^2+4\tau_{-,1}+2)/7 = 17/28$和 $\theta_2 \leqslant (3\tau_{-,2}^2+3\tau_{-,2}+1)/7 = 13/28$. 由 UE解, 有 $\boldsymbol{T}=(7, 7)^{\mathrm{T}}$和 $C(\bar{\boldsymbol{v}})=14$, 又 $\boldsymbol{a}=(0.7897, 0.7001)^{\mathrm{T}}$, 将这些代入式 (23) 得: $C(\bar{\boldsymbol{v}})/C(\tilde{\boldsymbol{v}}) \leqslant 1.3424$. 显然, 运用定理 3获得了比文献[1, 7]更加精确的 UE行为效率损失上界, 本算例上界值从文献[1]给出的 1.6258, 文献[7]给出的 1.4923进一步减少到 1.4284. 而运用定理 4又获得了比定理 3更好的结果, 上界值从 1.4284进一步减少到 1.3424.

仔细对比研究发现, 对多项式形式的阻抗函数网络而言, Roughgarden和 Tardos[1, 3]得到的 UE行为效率损失上界只考虑了阻抗函数的最高次幂, 对于最高次幂相同、低次幂项不同的 2个阻抗函数网络, 按照他们的方法得到的上界值是相同的, 这与现实不符. Correa等[7]通过引入参数 $\eta(\bar{\boldsymbol{v}})$, 进一步考虑了零流路段阻抗的影响, 得到了更精确的效率损失上界. 本文在定理 2、定理 3和定理 4中分别引入关系 $t_a(\tau\bar{v}_a) \geqslant \theta t_a(\bar{v})$, $t_a(\tau_-\bar{v}_a) \geqslant \theta t_a(\bar{v}_a)$和 $t_a(\tau_{-,a}\bar{v}_a) \geqslant \theta_a t_a(\bar{v}_a)$, 所确定的 θ和 θ_a值, 包含了多项式阻抗函数中所有因素对上界值的影响, 从而得到了较之前人更小的上界. 定理 4更是通过计算每条路段的 $T_{-,a}$和 $T_{+,a}$, 把确定效率损失上界的责任细分到每条路段上, 因而可以获得更加精确的上界值.

3 结束语

本文深入分析了交通网络中用户均衡解与系统最优解之间的关系, 得到了新的用户均衡行为效率损失上界计算公式. 文中定义的 τ只与路段阻抗函数的特性有关, 而与网络结构和 *OD* 需求无关, 但 T_-和 T_+与流量分布的极端结果相关, 而 $\theta(\bar{\boldsymbol{v}})$与用户均衡解相关, 自然就与路段阻抗函数、网络结构和 *OD* 需求相关. 所以, 发现更小的用户均衡行为效率损失上界离不开具体被研究网络的所有特征.

参考文献 (References)

[1] Roughgarden T, Tardos É. How bad is selfish routing[J]. Journal of the ACM, 2002, 49: 236-259

[2] Chau C K, Sim K M. The price of anarchy for nonatomic congestion games with symmetric cost maps and elastic demands [J]. Operations Research Letter, 2003, 31: 327-334

[3] Roughgarden T, Tardos É. Bounding the inefficiency of equilibria in nonatomic congestion games [J]. Games and Economic Behavior, 2004, 47: 389-403

[4] Perakis G. The price of anarchy under nonlinear and asymmetric costs [C] // Proceedings of the 10th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (Lecture Notes in Computer Science 3064). Berlin: Springer, 2004: 46-58

[5] Correa J R, Schulz S A, Stier-Moses N E. Selfish routing in capacitated networks [J]. Mathematics of Operations Research, 2004, 29(4): 961-976

[6] Yang H, Huang H J. Mathematical and economic theory of road pricing [M]. Oxford: Elsevier Ltd, 2005: 345-388

[7] Correa J R, Schulz A S, Stier-Moses N E. On the inefficiency of equilibria in congestion games [C] // Proceedings of the 11th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (Lecture Notes in Computer Science 3509). Berlin: Springer, 2005: 167-181

[8] Guo X L, Yang H. The price of anarchy of stochastic user equilibrium in traffic networks [C] // Proceedings of the 10th International Conference of Hong Kong Society for Transportation Studies (HKSTS). Hong Kong: HKSTS Ltd, 2005: 63-72

[9] Huang H J, Liu T L, Guo Xiaolei, et al. Efficiency loss of the mixed SUE with ATIS market penetration [C] // Proceedings of the Post-Conference Workshop of the 10th HKSTS: Behaviours in Networks. Hong Kong: HKSTS Ltd, 2005: 21-32

[10] Koutsoupias E, Papadimitriou C H. Worst-case equilibria [C] // Lecture Notes in Computer Science 1563. Berlin: Springer, 1999: 404-413

[11] Deng X, Papadimitriou C H, Safra S. On the complexity of equilibrium [J]. Journal of Computer and System Sciences, 2003, 67(2): 311-324

[12] Papadimitriou C H, Roughgarden T. Computing equilibria in multi-player games [C] // Proceedings of SODA. Berlin: Springer, 2005: 82-91

[13] 黄海军. 城市交通网络平衡分析——理论与实践 [M]. 北京: 人民交通出版社, 1994: 20-30
Huang Haijun. Urban transportation network equilibrium analysis: theory and practice [M]. Beijing: China Communications Press, 1994: 20-30 (in Chinese)