四元数在弹射座椅性能仿真中的应用

封文春 林贵平

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100083)

摘 要: 针对弹射座椅性能仿真中欧拉角速率方程在大幅度姿态运动时存在奇异性,以及四元数法由于姿态角的有界性而出现跳跃、难以实现全姿态角的问题,提出了四元数与欧拉角相结合的方法. 阐述了四元数的定义、几何意义及四元数表示的运动学方程. 通过四元数到欧拉角的转换,给出了仿真中四元数的积分初值计算公式;分析了弹射仿真中姿态角的跳跃和间断问题. 以某型号座椅为例进行了仿真计算,通过对比仿真结果和试验数据,确认了仿真的有效性;与采用单一四元数法的仿真结果进行对比表明,该方法充分结合了四元数与欧拉角速率方程的优点,有效解决了欧拉角速率方程的奇异性和弹射仿真中全姿态角的实现.

关 键 词: 弹射座椅; 弹射仿真; 欧拉角; 全姿态角; 四元数

中图分类号: V 244.21^{+}2

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2006)08-0881-04

Application of quaternion in ejection seat performance simulation

Feng Wenchun Lin Guiping

(School of Aeronautic Science and Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: A new method of combined quaternion and Euler angle was proposed to solve the singularity problem of Euler angle velocity equation at large extent attitude movement and all-attitude angles and jumping problems for the limitary of attitude angle using quaternion method in ejection seat performance simulation. Quaternion definition and geometry meaning were described and quaternion movement equation was introduced. Calculation formula of quaternion integral initial values in simulation was put forward through quaternion to Euler angle conversion. The problem of attitude angle jumping and discontinuous in simulation was analyzed. Simulation based on certain seat model was executed. Compared simulation result with experiment data and compared the result with another simulation using single quaternion method, it was shown that this method combined the virtue of quaternion and Euler angle velocity equation could efficiently resolve the singularity of Euler angle velocity equation and could realize all-attitude angle in simulation.

Key words: ejection seat; ejection simulation; Euler angle; all-attitude angle; quaternion

弹射座椅性能仿真需要求解用欧拉角表示的速率方程,在通常条件下一般没有问题,但是在高速弹射条件下俯仰角可能等于 90°,速率方程中就会出现奇异点,使得仿真中断.

解决欧拉角速率方程奇异性的方法有多种,如方向余弦法、九参数法等,但这些方法参数多,求解复杂. 利用四元数代替欧拉角,解决方程的奇异性,在飞行器仿真中得到了广泛应用[1]. 四元数法只有 4 个参数、1 个联系方程,对任何参数值都不退化. 但是,在仿真结果中用四元数表示座椅姿态的变化并不直观,也没有明显的几何意义,而且其它方程中仍然可能要用到欧拉角,因此还需要将四元数转换为欧拉角,这就存在一个姿态角的定义域问题. 由于弹射座椅的特殊性,3 个姿态角不能简单地确定为 [- 90°, + 90°][2] 或是 [-180°,180°][3],尤其在高速飞行条件下,虽然座椅具有一定的稳定性,但座椅仍可能绕 3 个轴发生旋转. 如果限定姿态角的定义域,仿真中姿态

收稿日期: 2005-09-30

作者简介: 封文春(1972-),男,河南南阳人,博士生, chunfeng@ase.buaa.edu.cn.

曲线将是不连续的,在某些点会发生跳跃. 由于座椅的轨迹与姿态有关,姿态角的跳跃将影响轨迹仿真的正确性. 并且,由于弹射条件复杂多变,很难通过简单的判断条件扩展姿态角的定义域.

文献[4-5]提供了一种双欧拉角方法解决全姿态角和方程奇异性问题. 此方法基于正反欧拉方程组之间精华区和奇异区的倒挂关系交替运算,避免了求解单组欧拉方程的奇异性困境和全姿态角问题. 与四元数法相比,此方法在精度和稳定性方面具有较大的优越性,但是存在计算复杂效率低的缺陷. 利用欧拉角和四元数的结合可以有效地解决这一问题,既避免了姿态角的跳跃,又解决了运动方程的奇异性.

1 四元数

四元数由哈密顿在1843年提出创建,近年来由于计算机和航空航天领域的飞速发展而得到广泛应用. 四元数是由1个实数单位1和3个虚数单位 i_1, i_2, i_3 组成的包含4个实元的超复数,其表达式为

$$\Lambda = q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3 \tag{1}$$

其中,q_0, q_1, q_2, q_3 均为实数;q_0 称为四元数的实数部分或标量部分;如果 $q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=1$ 则称为单位四元数. 四元数的几何意义可由图1[2]表示,即单位四元数等价于一个圆心角 σ 或球面上的一段圆弧 AB;另一方面,由刚体的定点运动可知,球面上的一段圆弧表示刚体的某一位置. 因此,对于定点运动刚体的每一位置都可以找到与之对应的四元数,这样就可以用单位四元数来确定刚体的位置,也即刚体从一个位置到另一个位置的转动可以由绕某一轴作一次转动的四元数变换来实现,从而可以避免欧拉参数描述的旋转运动方程中出现的奇异性.

旋转四元数可以表示为

$$Q = \cos(\sigma/2) + \xi\sin(\sigma/2) \tag{2}$$

其中,σ 表示旋转角度;ξ 表示旋转轴. 其几何意义是以 ξ 为转轴,使垂直于转轴平面内的一个矢量按右手螺旋方向转过 σ 角.

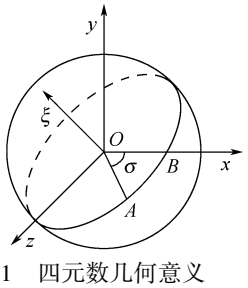


图1 四元数几何意义

用四元数描述刚体旋转运动方程的优点是:对任何参数值都不退化,而且只有4个参数,1个联系方程,能够以唯一形式表示2个表征刚体运动的重要物理量,即角速度(刚体转动特性)和有限转动矢量(刚体位置特征性)[1].

2 积分初值

在弹射座椅中,动坐标系为体轴坐标系,根据四元数的几何表示式(2),可以推得用四元数表示的运动学方程如式(3)[1]所示.

$$\left.\begin{aligned}
\dot{q}_0 &= (-\omega_{x2}q_1 - \omega_{y2}q_2 - \omega_{z2}q_3)/2\\
\dot{q}_1 &= (\omega_{x2}q_0 - \omega_{y2}q_3 + \omega_{z2}q_2)/2\\
\dot{q}_2 &= (\omega_{x2}q_3 + \omega_{y2}q_0 - \omega_{z2}q_1)/2\\
\dot{q}_3 &= (-\omega_{x2}q_2 + \omega_{y2}q_1 + \omega_{z2}q_0)/2
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中 $\omega_{x2}, \omega_{y2}, \omega_{z2}$ 分别为绕3个体坐标轴的旋转角速度.

需要用到的一个联系方程为

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \tag{4}$$

欧拉角表示的速率方程如式(5)[6]所示.

$$\begin{bmatrix}\dot{\vartheta}\\ \dot{\psi}\\ \dot{\gamma}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \sin\gamma & \cos\gamma\\ 0 & \dfrac{\cos\gamma}{\cos\vartheta} & -\dfrac{\sin\gamma}{\cos\vartheta}\\ 1 & -\dfrac{\cos\gamma\sin\vartheta}{\cos\vartheta} & \dfrac{\sin\gamma\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\omega_{x2}\\ \omega_{y2}\\ \omega_{z2}\end{bmatrix} \tag{5}$$

其中 ψ, ϑ, γ 分别为偏航角、俯仰角和横滚角.

用式(3)和联系方程(4)替代用欧拉角表示的速率方程(5),再结合六自由度方程就可以实现弹射座椅的性能仿真,在仿真中可以避免奇异点的出现.

仿真中四元数初始值的确定可以由欧拉角到四元数的转换来确定. 根据弹射座椅六自由度方程中坐标系和姿态角的定义[6],按 y-z-x 转动顺序旋转:先绕 y 轴旋转角度 ψ,再绕 z 轴旋转角度 ϑ,最后绕 x 轴旋转角度 γ. 每次旋转均可以用1个四元数表示,即

$$\left.\begin{aligned}
Q_1 &= \cos\frac{\psi}{2} + j\sin\frac{\psi}{2}\\
Q_2 &= \cos\frac{\vartheta}{2} + k\sin\frac{\vartheta}{2}\\
Q_3 &= \cos\frac{\gamma}{2} + i\sin\frac{\gamma}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

由四元数的运算法则可知,这3个四元数相乘仍为四元数,所得四元数可以表示坐标系的3次旋转,如式(7)所示.

$$Q^* = \left(\cos\frac{\psi}{2} + j\sin\frac{\psi}{2}\right)\circ$$

$$\left(\cos\frac{\vartheta}{2}+k\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\circ\left(\cos\frac{\gamma}{2}+i\sin\frac{\gamma}{2}\right) \tag{7}$$

根据四元数的乘法定义,展开式(7)可得用姿态角表示的四元数,如式(8)所示.

$$\begin{bmatrix}q_0\\q_1\\q_2\\q_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\\\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{r}{2}\\\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{r}{2}+\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\\\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\end{bmatrix} \tag{8}$$

对于不利姿态条件下的弹射,出舱后人椅系统的 ψ 和 γ 都不为 0,将出舱后人椅系统的姿态角初始值代入式(8)即可确定四元数的积分初值.

作为特殊情况,对于匀速直线飞行,出舱后人椅系统的姿态角初始值为 $\vartheta=\vartheta_0,\psi=\gamma=0$,则四元数的积分初值为

$$\begin{bmatrix}q_{00}\\q_{10}\\q_{20}\\q_{30}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\vartheta_0/2)\\0\\0\\\sin(\vartheta_0/2)\end{bmatrix} \tag{9}$$

3　姿态角跳跃问题

用四元数虽然可以成功解决用欧拉角表示的速率方程(5)的奇异性,但是在六自由度方程中仍要用到欧拉角,而且在仿真结果中用四元数表示欧拉角并不直观,不具有明显的几何意义,所以仍需将四元数转换为欧拉角.

四元数与欧拉角之间的转换通过比较坐标变换矩阵得到. 四元数坐标变换的理论依据如下:

设 M 和 R 为非标量四元数,如果令

$$M=N\left(\cos\frac{\theta}{2}+\xi\sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{10}$$

则

$$R'=M\circ R\circ M^{-1} \tag{11}$$

也为四元数,其范数和标量部分等于四元数 R 的范数和标量部分[1].

依据这个定理,用四元数表示的坐标系之间的转换矩阵见式(12)[1],转动顺序为 *y-z-x*.

$$\boldsymbol{L}_1=\begin{bmatrix}a_{11}&2(q_1q_2+q_0q_3)&2(q_1q_3-q_0q_2)\\2(q_1q_2-q_0q_3)&a_{22}&2(q_0q_1+q_2q_3)\\2(q_1q_3+q_0q_2)&2(q_2q_3-q_0q_1)&a_{33}\end{bmatrix} \tag{12}$$

其中,$a_{11}=q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2$;$a_{22}=q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2$;$a_{33}=q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2$.

按 *y-z-x* 转动顺序,用方向余弦表示的坐标系转换矩阵[7]为

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\cos\psi\cos\vartheta&\sin\vartheta&-\sin\psi\cos\vartheta\\b_{21}&\cos\vartheta\cos\gamma&b_{23}\\b_{31}&-\cos\vartheta\sin\gamma&b_{33}\end{bmatrix} \tag{13}$$

其中,$b_{21}=\sin\psi\sin\gamma-\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma$;$b_{23}=\cos\psi\sin\gamma+\sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma$;$b_{31}=\sin\psi\cos\gamma+\cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma$;$b_{33}=\cos\psi\cos\gamma-\sin\psi\sin\vartheta\sin\gamma$.

用四元数表示的转换矩阵和用方向余弦表示的转换矩阵是相等的,因此通过比较 2 个转换矩阵即可求得四元数到欧拉角的转换,如式(14)~式(16)所示.

$$\sin\vartheta=2(q_1q_2+q_0q_3) \tag{14}$$

$$\tan\psi=\frac{-2(q_1q_3-q_0q_2)}{q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2} \tag{15}$$

$$\tan\gamma=\frac{-2(q_2q_3-q_0q_1)}{q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2} \tag{16}$$

在仿真中要将姿态用欧拉角表示出来,就需要求解反三角函数,这样就存在一个姿态角的定义域问题. 由式(14)~式(16)所确定的姿态角区间均在[-90°,90°]. 文献[3]提供了一种方法,可以将 3 个姿态角的定义域扩展到[-180°,180°]. 但是由于弹射座椅的特殊性,虽然座椅具有一定的稳定性能,但在高速弹射或处于不利姿态条件下弹射时仍可能绕 3 个轴旋转,也即姿态角的定义域为实数域. 同时,弹射条件复杂多变,很难在仿真中通过判断来扩展姿态角的定义域.

观察用欧拉角表示的速率运动方程(5),只有在 $\vartheta=n\times360°\pm90°$($n$ 为整数,表示所旋转的圈数)时,ψ 和 γ 表示的速率方程出现奇异性,ψ 和 γ 没有定义. 因此在仿真中,将欧拉角和四元数相结合,姿态角的求解仍然采用欧拉角表示的速率方程,只是用四元数表示的欧拉角来替代速率方程(5)中的 $\cos\vartheta$ 和 $\sin\vartheta$.

4　仿真结果

一般只有在高速弹射条件或不利姿态下,欧拉角表示的运动方程才可能会出现奇异性. 仿真是以我国某型号座椅为模型,乘员为第 95 百分位,速度 850 km/h 的地面滑车试验状态为仿真条件. 表 1 是仿真结果与试验数据在几个特征点上的对比,采用的是欧拉角与四元数相结合的方法.

考虑到测量误差及难度以及仿真中经验系数的选取,仿真结果比较接近试验值,在允许的误差范围内,说明仿真结果是有效的.

表1 仿真结果与试验数据

特征点序号	时间/s		轨迹高度/m		速度/(m·s^{-1})	
	试验值	仿真值	试验值	仿真值	试验值	仿真值
①	0.838	0.85	18.6	18.9	171.7	173.9
②	1.178	1.07	25.6	24.9	134.8	148.0
③	1.88	1.91	30.4	33.1	46.0	15.4
④	2.52	2.47	27.7	32.0	11.6	7.2

表1中4个特征点分别为:①射救生伞箱;②救生伞拉直瞬间;③轨迹最高点;④救生伞充气张满瞬间.

为了比较2种方法,分别以单一四元数和欧拉角与四元数相结合的方法进行仿真,图2~图5是仿真结果. 采用四元数法时姿态角的定义域利用文献[3]所提供的方法,即3个姿态角定义在[-180°,+180°]. 图中实线表示用四元数与欧拉角相结合得到的仿真曲线,虚线表示单用四元数法得到的仿真曲线.

图2为轨迹高度仿真曲线,2种方法在弹射出舱和自由飞阶段的轨迹曲线基本重合,仅在降落伞拉直和张满阶段有小的误差. 为了显示二者之间的误差,图2中仅显示弹射后半段,采用欧拉角和四元数相结合的方法所得的仿真结果更接近试验值. 图3~图5分别是 ϑ,ψ 和 γ 的仿真曲线图.

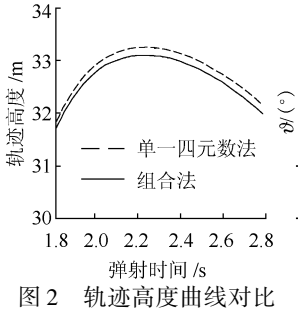


图2 轨迹高度曲线对比

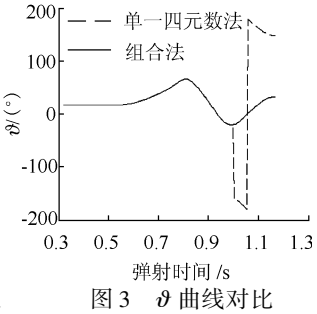


图3 ϑ 曲线对比

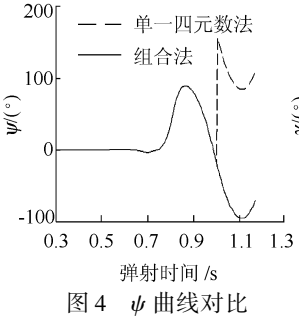


图4 ψ 曲线对比

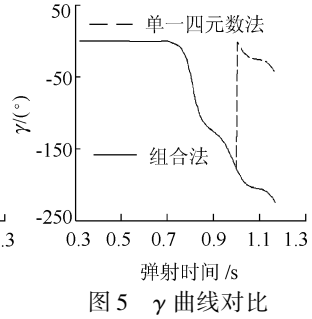


图5 γ 曲线对比

仿真结果可见,在仿真中利用欧拉角和四元数的结合可以很好地解决姿态角定义域的限制问题,使仿真得到的姿态曲线没有跳跃点,能够更真实地反映弹射过程中人椅系统姿态的变化.

5 结束语

四元数在飞行器性能仿真中得到了广泛应用,能够很好地解决欧拉角速率方程的奇异性. 但是求解姿态角时需要求解反三角函数,这就限制了仿真中姿态角的定义域,而且弹射条件复杂多变,很难在仿真中通过条件判断拓展姿态角定义域. 本文提出的四元数与欧拉角相结合的方法有效地利用了四元数和欧拉角的特点,既避免了欧拉角速率方程出现奇异性,又解决了姿态角跳跃问题. 通过实例仿真表明,该方法简单易用,计算效率较高.

参考文献(References)

[1] 袁子怀,钱杏芳. 有控飞行力学与计算机仿真[M]. 北京:国防工业出版社,2001
Yuan Zihuai, Qian Xingfang. Conrtol flight mechanics and computer simulation[M]. Beijing: National Defence Press, 2001 (in Chinese)

[2] 许配珍,董长虹. 四元数在战斗机飞行仿真中的应用[J]. 北京航空航天大学学报,1997,23(4):487-491
Xu Peizhen, Dong Changhong. Application of quaternion in fighter aircraft flight simulation[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1997, 23(4): 487-491 (in Chinese)

[3] 张帆, 曹喜滨,邹经湘. 一种新的全角度四元数与欧拉角的转换算法[J]. 南京理工大学学报,2002,26(4):376-380
Zhang Fan, Cao Xibin, Zou Jingxiang. A new large-scale transformation algorithm of quaternion to Euler angle[J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology, 2002, 26(4): 376-380 (in Chinese)

[4] Huang Xueqiao. A dual-Euler method for solving all-attitude angles of the aircraft[R]. AIAA Paper 1993-3589, 1993

[5] Shin S, Yoon S. A comparison of real-time solutions to all-attitude angles of an aircraft [R]. AIAA Paper 1997-3731, 1997

[6] 《飞机设计手册》总编委会. 飞机设计手册第15册[M]. 北京:航空工业出版社,1999
Compile Committee of Airplane Design Manual. Airplane design manual: No. 15 [M]. Beijing: China Aviation Press, 1999 (in Chinese)

[7] 7210任务办公室. 航空气动力手册第1册[M]. 北京:国防工业出版社,1975
Office of 7210 Duty. Aerodynamics manual: No. 1[M]. Beijing: National Defence Press, 1975 (in Chinese)

(责任编辑:文丽芳)