基于置信分布的系统可靠度评估蒙特卡罗方法

张 艳 黄 敏 赵 宇 于 丹

(北京航空航天大学 工程系统工程系, 北京 100083) (中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100080)

摘 要: 大型系统、复杂系统的可靠度的求解问题是可靠性工程中一个热点和难点的问题,针对这个问题,提出了一种基于蒙特卡罗模拟仿真的系统可靠度求解方法. 通过利用系统的各个单元产品的可靠度置信分布和系统可靠度函数进行蒙特卡罗仿真,评估出系统可靠度. 本方法克服了以往的蒙特卡罗仿真方法处理离散分布时抽取时间样本的困难,并且对系统的结构和复杂程度没有要求. 最后,给出计算实例对比说明了该方法的正确性和可用性.

关 键 词: 蒙特卡罗方法; 可靠性; 评估

中图分类号: V 241.01

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2006)09-1023-03

Monte Carlo method for system reliability evaluation using reliability confidence distribution

Zhang Yan Huang Min Zhao Yu

(Dept. of System Engineering of Engineering Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Yu Dan

(Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: A Monte Carlo method was presented to ravel out the system reliability estimation problem of large and complex system's reliability, which is a hot and difficult spot in the reliability engineering field. The reliability samples of system's units from their reliability confidence distribution and system's reliability estimation equation were combined in the method to simulate system running and get the system's reliability. The difficult problem that no solution to get time samples from the discontinuous distributions is resolved by this method. Further more, the method has little limitation to the system's structure and complexity that will expand its utilization. An instance was given to illustrate the method's accuracy and availability in the estimation in a complex and large system through comparison with other reliability estimation methods which were generally use in the reliability engineering field.

Key words: Monte Carlo methods; reliability; evaluation

大型系统问题、非线性问题和瞬态问题是当前可靠性工程中关注的热点和难点问题,而传统方法在解决这些问题上都有一定的困难. 蒙特卡罗方法因为对问题的维数不敏感,对求解系统的复杂程度没有具体要求,因而在大型系统、复杂系统可靠度分析中成为重要的研究方向和解决问题的手段.

目前的各种蒙特卡罗方法基本是基于时间样本的抽样,然而离散分布单元的抽样只能得到失效次数,因而传统的蒙特卡罗仿真方法无法处理含有离散分布单元的系统. 另外,传统的蒙特卡罗方法往往通过增加仿真次数和改进抽样方法以减小样本方差来提高计算的效率,但是对于高可靠系统,无论 N 取多大,仍会产生 0.01 到 0.001 的误差,因此在进行高可靠系统的评估时,可能产生令人怀疑的结果.

收稿日期: 2005-11-29

作者简介: 张 艳(1981-),女,山东聊城人,硕士生, laxity@sina.com.

本文提出的基于单元产品可靠度置信分布的系统蒙特卡罗仿真方法,其基本思路是:利用单元产品研制阶段或使用阶段的数据,得到其可靠度置信分布,然后针对可靠度置信分布进行抽样,根据系统可靠度模型计算得到系统可靠度. 该方法克服了以往仿真方法在处理离散分布抽样的困难,真正做到了对系统的结构及复杂程度没有要求,而且在效率上和精度上也高于传统方法.

1 单元产品可靠度置信分布

Fisher 在 1930 年推广了极大似然的想法,提出了 Fiducial 推断方法;在有了样本观察值后,就有了参数 θ 的一个分布,这个分布表示了由于所得样本观察值的信息及 θ 落在各个范围内的可信程度,Fisher 称这个分布为信仰分布(fiducial distribution)[1].

若产品所符合的分布只有一个参数,假设为 θ,按照 Fiducial 观点,θ 服从某个分布,即:$\theta \sim F(x)$,结合产品可靠度 R 与参数 θ 的关系:$R=f(\theta)$,则能得到产品可靠度 $R \sim F_R(x)$,称 $F_R(x)$ 为产品可靠度的置信分布.

多参数情况下,由于参数间可能相互不独立,所以对不同分布的可靠度置信分布要进行不同的讨论.

下面给出各类寿命分布的产品可靠度置信分布.

1.1 成败型产品可靠度置信分布

成败型部件假定进行的独立重复试验次数为 n,认为成功次数 X 是一个随机变量,X 实现值为 s,则失败 f 次,($s+f=n$). 其发生概率用参数为(n, p)的二项分布表示

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$
$$k=0,1,2,\cdots,n \tag{1}$$

R 的下限分布为[2]

$$F_1(R)=\beta(R \mid n-f, f+1) \tag{2}$$

R 的上限分布为[2]

$$F_u(R)=\beta(R \mid n-f+1, f) \tag{3}$$

则根据上述的分布,引进参数得到随机化的置信分布为

$$F(R)=u \cdot F_u(R)+(1-u) \cdot F_1(R) \tag{4}$$

其中 u 为(0,1)的均匀随机数. 这样就可以对一个二项分布的可靠度进行抽样:当 $f>0$ 时,可以直接从上述的 $F(R)$ 得到随机数;当 $f=0$ 时,由正则性规定可以得 R 的上限分布为 1,所以可从 $F(R)=u+(1-u) \cdot F_1(R)$ 中得到所要利用的随机数.

1.2 指数型产品可靠度置信分布

指数分布密度函数是

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t} \quad t \geqslant 0 \quad \lambda > 0 \tag{5}$$

样本量为 n,其中失效 m. 假定 m 个失效数据为无替换定时截尾,R 的置信分布为

$$R(t)=e^{-\lambda t} \sim e^{-\frac{\chi^2_{2m}}{2m}\lambda t} \tag{6}$$

1.3 正态型产品可靠度置信分布

正态分布密度函数是

$$f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2} \tag{7}$$

样本量为 n,且为完全样本,则关于参数 μ 和 σ 的极大似然估计为

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n}[t_1+t_2+\cdots+t_n] \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[t_i-\hat{\mu}]^2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

而 $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ 遵守自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布,即

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \tag{9}$$

又 $\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ 遵守标准正态分布,故

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2 &\sim \frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-1}} \\ \mu &\sim \hat{\mu}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot z \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

显然,σ^2 的抽样由 χ^2_{n-1} 的抽样值决定. μ 的抽样值由前一式的抽样得到,z 为 $N(0,1)$ 的抽样值.

令 $u=\frac{\mu-t}{\sigma}$,则 $R(t)$ 的抽样值为 $\Phi(\mu)$.

1.4 Weibull 型产品可靠度置信分布

Weibull 分布的密度函数为

$$f(t)=\frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1} e^{-(\frac{t}{\eta})^m}$$
$$m>0 \quad \eta>0 \quad t \geqslant 0 \tag{11}$$

位置参数 γ 为 0.

样本量为 n,其中失效 k,假定 k 个失效数据均为无替换定时截尾,R 的置信分布为

$$R(t) \sim e^{-\frac{\chi^2_{2k}}{2k}-(\frac{t}{\eta})^m} \tag{12}$$

1.5 Γ 型产品可靠度置信分布

Γ 分布密度函数为

$$f(t)=\frac{1}{\Gamma(k)}\beta^k t^{k-1} e^{(-\beta t)}$$
$$k>0 \quad \beta>0 \tag{13}$$

样本量为 n,且为完全样本.

当 k 为整数时,R 的置信分布为为

$$R(t) \sim \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!}\left(\frac{\hat{\beta}\chi^2_{2nk}}{2nk}t\right)^l \mathrm{e}^{-\frac{\hat{\beta}\chi^2_{2nk}}{2nk}} \qquad (14)$$

1.6　对数正态型产品可靠度置信分布

对于寿命分布服从对数正态分布的单元,可以通过对测试数据取自然对数转换成正态分布数据,然后按照正态分布的处理方法获得单元参数的分布.

1.7　其他分布型产品可靠度置信分布

用 β 分布来拟合可靠度增长、应力强度模型等的可靠度置信分布.

两点折合法

利用部件实验数据得到该部件可靠度置信度分别为 0.1,0.9 的置信下限 $R_{0.1}$,$R_{0.9}$. 假设该部件作了 n 次成败型试验,成功了 s 次,则有

$$\left.\begin{aligned} I_{R_{0.1}}(s,n-s+1) &= 0.1 \\ I_{R_{0.9}}(s,n-s+1) &= 0.9 \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

式中 $I(\cdot,\cdot)$ 为不完全贝塔函数,仅有 2 个未知数,解方程组可得 (n,s). 这样就将连续性或其他类型的试验数据折合为成败型的试验数据了. 具体算法参见文献[3]中的两点折合法.

2　系统可靠度评估的蒙特卡罗方法

2.1　几点说明

1) 关于单元的可靠度抽样

应用本方法,可由第一节内容,根据各单元的试验信息按照经典或其他方法得到其参数的点估计,再依据各个寿命分布的可靠度置信分布进行抽样得到各部件的可靠度抽样值;也可以根据两点折合方法将各类分布试验信息都折合为二项分布,再利用二项分布与 β 分布的关系,用 β 分布拟合其可靠度下限的置信分布,抽样得到各部件可靠度下限的抽样值. 此步骤中置信度为0.1和0.9的置信下限可用经典方法或参照其他方法求得.

2) 关于由单元可靠度求取系统可靠度,根据系统的结构信息可以得到.

3) 本方法仅利用了系统故障树的最底层单元的试验信息,实际应用本方法时,应当将系统、中间层部件、分系统的失效信息分到最底层单元,以保证充分利用试验信息.

2.2　蒙特卡罗方法仿真运行

在系统结构已知,各单元部件的寿命分布已知情况下,按照如下步骤进行仿真运行.

1) 按照单元可靠度服从的分布进行抽样,得到 N 组 M 个底层部件在 t 时刻的可靠度值为 R_1^i,$R_2^i,\cdots,R_M^i$,$i=1,2,\cdots,N$(具体抽取随机数的方法见文献[4]).

2) 代入系统可靠度计算公式,计算得到系统在 t 时刻的可靠度抽样值 N 个:

$$R_s^i(t) \qquad i=1,2,\cdots,N$$

3) 将 N 个 $R_s^i(t)$ 近似值由小到大排序

$$R_s^{(1)}(t) \leqslant R_s^{(2)}(t) \leqslant \cdots \leqslant R_s^{(N-1)}(t) \leqslant R_s^{(N)}(t)$$

显然

$$P(R_s(t) \geqslant R_s^{(k)}(t)) \approx 1-\frac{k}{K}$$

故 $R_s^{(k)}(t)$ 近似为 $R_s(t)$ 在置信水平为 $r=1-\frac{k}{N}$ 的置信下限.

3　仿真实例分析

某系统 S 的故障树如图 1. 其中系统最底层单元的寿命分布、根据试验信息计算得到的点估计和下限值参见表 1.

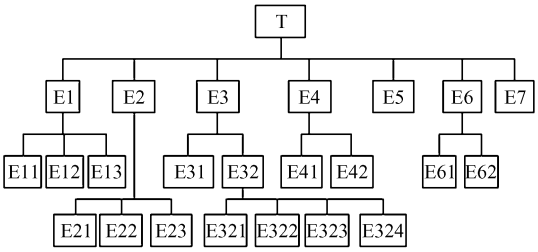

图 1　系统的故障树

表 1　系统底层单元寿命分布及评估结果

设备名称	分布类型	R 评估结果 $T=11$ min	R_L 评估结果 $\gamma=80\%$ $T=11$ min
E11	二项分布	0.999 98	0.999 67
E12	二项分布	0.999 92	0.999 41
E13	指数分布	0.997 86	0.997 08
E21	威布尔分布	0.956 4	0.926 9
E22	指数分布	0.995 63	0.993 62
E23	指数分布	0.996 01	0.994 89
E31	指数分布	0.966 59	0.959 87
E321	指数分布	0.996 82	0.995 89
E322	指数分布	0.992 04	0.990 39
E323	指数分布	0.991 55	0.989 44
E324	指数分布	0.995 76	0.994 22
E41	指数分布	0.994 66	0.993 52
E42	指数分布	0.991 77	0.99
E61	二项分布	0.963 19	0.944 8
E62	二项分布	0.999 93	0.999 24
E5	指数分布	0.977 65	0.972 11
E7	指数分布	0.994 45	0.993 26

(下转第 1082 页)