# 光纤陀螺随机误差模型分析

王新龙 杜 宇 丁杨斌

(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100083)

**摘 要**: 陀螺仪的工作精度决定着惯性参考系统的精度,为了减小陀螺仪的误差并提高其精度,需要对陀螺仪误差进行估计与精确建模. 提出应用 ARMA,Allan 方差分析法及功率谱密度 PSD(Power Spectrum Density)分析法联合对光纤陀螺 FOG(Fiber Optic Gyroscope)的误差特性及建模技术进行了研究. 利用 Allan 方差及 PSD 分析法对光纤陀螺输出信号的分析,有效地分离并确定影响光纤陀螺输出性能的几种主要随机误差源,并对所建立的光纤陀螺 ARMA 模型和 AR 模型的精度进行了评估. 对光纤陀螺实测数据的分析表明 Allan 方差分析法与 PSD 分析法对光纤陀螺噪声分析结果具有一致性,时序 ARMA 模型是建立光纤陀螺随机误差模型的一种有效方法.

**关 键 词**: 光纤传感器; 随机误差; 误差统计; 模型分析

**中图分类号**: V 241.5$^+$9

**文献标识码**: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2006)07-0769-04

# Investigation of random error model for fiber optic gyroscope

Wang Xinlong Du Yu Ding Yangbin

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract**: The performance of gyroscope decides the accuracy of inertial reference system. In order to diminish the error of the gyroscope and to improve its precision, the gyroscope's error model was accurately founded. Methods of PSD(power spectrum density), ARMA, and Allan variance were federally used to study of the error speciality and modeling technology of the FOG(fiber optic gyroscope). The Allan variance and PSD were utilized to analyze the output of the FOG, and some main noise of the fiber optic gyroscope could be extracted and confirmed, then the performance of ARMA and AR of the FOG was evaluated. By analyzing the practical data of the FOG, it is shown that Allan variance and PSD are identical with analyzing the error of the fiber optic gyroscope, and ARMA is an effective method to found the random error model for the fiber optic gyroscope.

**Key words**: fiber optic sensors; random errors; error statistics; model analysis

作为新一代光学陀螺仪,光纤陀螺 FOG(Fiber Optic Gyroscope)具有其它陀螺无法比拟的优点,在航空、航天、航海、机器人控制、石油钻井等领域得了广泛应用.

FOG 的误差测试与建模技术是研制与应用 FOG 及其导航系统的关键技术之一. 在对 FOG 随机误差模型的分析方法中,有时序 ARMA 模型分析法、功率谱密度 PSD(Power Spectrum Density)分析法及 Allan 方差分析法. ARMA 模型分析法是一种时域分析方法,它是直接利用随机时间序列来建立差分方程,把一个高度相关的平稳随机时间序列表示成一种数字递推的形式. Allan 方差分析是在时域上对频率稳定性进行分析的一种通用方法,然而 Allan 方差不足之处是对高频段噪声及低频段随机速率斜坡与振动角加速度特性确定的不确定性. PSD 是分析、定性数据和随机建模强有力的工具,PSD 分析比其他方法更适合分析周期或非周期信号[1]. 近年来,国内外研究人员

**收稿日期**: 2005-08-17

**基金项目**: 航天支撑技术基金资助项目(044.107);国防科技资金资助项目(51448020105HK0101)

**作者简介**: 王新龙(1969-), 男, 陕西渭南人,副教授, xlwang@buaa.edu.cn.

在此方面进行了相应的研究,这些文献[2-4]分别采用不同模型或方法对FOG的有关误差问题进行了研究,而系统性地研究FOG建模方法却很少.

本文采用时序ARMA模型分析法、PSD分析法及Allan方差分析法联合对FOG的随机误差进行了分析,建立了一种处理、分析与评估FOG性能的有效方法,所得结论为FOG在导航系统中的应用奠定了基础.

## 1 时序建模方法及Allan方差原理

### 1.1 时序建模方法

时间序列分析法是一种时域分析法,它不仅研究过程的确定性变化,而且更着重于研究过程的随机性变化.随机漂移率是衡量陀螺精度的最重要指标,它指在某一均值水平上随时间作无规律变化的随机变量[5].在飞行器导航、制导系统中,可以利用卡尔曼滤波降低陀螺随机漂移对系统精度的影响,但首先应建立陀螺随机漂移数学模型,步骤如下:①对陀螺漂移测试所得到的样本数据序列进行统计检验.首先进行平稳性检验,然后进行周期性检验,最后对去除了趋势项和潜周期分量的残差序列进行正态性检验.②如果经过检验的陀螺漂移数据的残差序列是平稳时间序列,则可利用平稳时间法建立其误差模型.首先确定所要拟和的线性模型的类别和阶数,其次估计模型参数并进行适用性检验,最后对残差序列进行正态性检验.③当残差序列仍然是非平稳时间序列时,则应进行差分处理,使之成为平稳时间序列,然后再利用平稳时间法建立其误差模型.④对所建立的数学模型进行变换,使之成为连续性微分方程.

研究表明[6],陀螺漂移数据模型通常由平稳随机过程(如白噪声或马尔柯夫噪声)与非平稳过程(如随机游动或斜坡)组合而成.测量数据中同时出现高频和低频噪声结构的一种模型是一个二阶自回归和一阶滑动平均过程,即ARMA(2,1)模型或单独的二阶自回归模型AR(2).

根据以上步骤,可以建立FOG漂移数据的时间序列模型.由此,便可得到应用卡尔曼滤波器处理的系统模型的状态方程和量测方程.

### 1.2 Allan方差原理

Allan方差的特点是利用它能确定产生数据噪声的基本随机过程的特性,也可以用于分析识别给定噪声项的来源.其基本原理[2]如下:

假设测得采样间隔为 $t_0$ 的 $n$ 个初始样本 $\Omega_i$ $(i=1,\cdots,n)$.对这 $n$ 个初始样本进行二次采样,采样时间 $\tau=kt_0$,则组数 $m=n/k$.分别取 $\tau$ 等于 $t_0,2t_0,\cdots,kt_0(k<n/2)$,则每一时间长度 $\tau$ 的数组平均值为

$$\overline{\Omega}_p(\tau)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\Omega_{(j-1)k+i}(t_0)\quad j=1,\cdots,m \tag{1}$$

定义相邻数组平均值之差的随机变量集合 $A=\{\overline{\Omega}_{p+1}(\tau)-\overline{\Omega}_p(\tau),p=1,\cdots,m-1\}$,求集合 $A$ 的方差,则得到Allan方差时域表达式为

$$\sigma_{\mathrm{A}}^2(\tau)=\frac{1}{2(m-1)}\sum_{j=1}^{m-1}A^2 \tag{2}$$

对于不同的采样时间 $\tau$,可求得相应的Allan方差.

在频域上,Allan方差与信号双边PSD之间的关系为

$$\sigma_{\mathrm{A}}^2(\tau)=4\int_0^{\infty}S_{\omega}(f)\frac{\sin^4(\pi f\tau)}{(\pi f\tau)^2}\mathrm{d}f \tag{3}$$

式中,$\tau$ 为样本组相关时间;$S_{\omega}(f)$ 为随机过程的PSD.

## 2 PSD噪声特性

### 2.1 PSD噪声特性

由于PSD的光强变化、热效应、光子的自发散射、采样量化、电路结构、工作环境等因素的影响,使FOG的输出数据中可能包含角随机游走(ARW)、偏差不稳定性(BI)、速率随机游走(RRW)、速率斜坡(RR)、量化噪声(QN)、正弦噪声(SN)以及指数互相关噪声(MN)等[2-3].这些基本噪声源特性为:

1) ARW.此随机过程的特征是具有角速率白噪声功率谱.$N$ 表示角随机游走系数,则其Allan方差表达式为

$$\sigma_{\mathrm{ARW}}^2(\tau)=\frac{N^2}{\tau} \tag{4}$$

2) BI.其Allan方差表达式为

$$\sigma_{\mathrm{BI}}^2(t)=\frac{2B}{\pi}\left\{\ln 2-\frac{\sin^3(\pi f_0\tau)}{(\pi f_0\tau)^2}\cdot\left[\sin(\pi f_0\tau)+4\pi f_0\tau\cos(\pi f_0\tau)\right]+C_i(2\pi f_0\tau)-C_i(4\pi f_0\tau)\right\} \tag{5}$$

其中,$B$ 为偏差不稳定性系数;$f_0$ 为剪切频率.

3) RRW.其Allan方差($K$ 为速率随机游走系数)为

$$\sigma_{\mathrm{RRW}}^2(\tau)=\frac{K^2}{3}\tau \tag{6}$$

4) RR. 其 Allan 方差表达式($R$ 为速率斜坡系数)为

$$\sigma_{\mathrm{RR}}^2(\tau)=\frac{R^2}{2}\tau^2 \tag{7}$$

5) QN. 其 Allan 方差表达式为($Q$ 为量化噪声系数)

$$\sigma_{\mathrm{N}}^2(\tau)=\frac{3Q^2}{\tau^2} \tag{8}$$

6) SN. 其 PSD 由几个不同频率表征,包含单一频率正弦噪声的速率 Allan 方差表达式为

$$\sigma_{\mathrm{SN}}^2(\tau)=\lambda_0^2\left[\frac{\sin^2(\pi f_0\tau)}{\pi f_0\tau}\right]^2 \tag{9}$$

式中,$\lambda_0$ 为速率幅度;$f_0$ 为噪声的频率.

7) MN. 指数互相关噪声是按指数规律衰减的有限相关时间函数,其 Allan 方差表达式为

$$\sigma_{\mathrm{MN}}^2(\tau)=\frac{(q_{\mathrm{c}}T_{\mathrm{c}})^2}{\tau}\left[1-\frac{T_{\mathrm{c}}}{2\tau}(3-4\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{T_{\mathrm{c}}}}+\mathrm{e}^{-\frac{2\tau}{T_{\mathrm{c}}}})\right] \tag{10}$$

式中,$q_{\mathrm{c}}$ 为噪声幅度;$T_{\mathrm{c}}$ 为相关时间.

### 2.2 PSD 噪声 Allan 方差表达式

在用 Allan 方差对 PSD 数据进行分析时,数据中可能存在各种成分的随机噪声. 根据典型的 Allan 方差特征图,不同的噪声项出现在不同的频段上[2]. 如果各噪声统计独立, 则计算的 Allan 方差是各类型误差的平方和,即

$$\sigma_{\mathrm{total}}^2(\tau)=\sigma_{\mathrm{ARW}}^2(\tau)+\sigma_{\mathrm{BI}}^2(\tau)+\sigma_{\mathrm{RRW}}^2(\tau)+\sigma_{\mathrm{QN}}^2+\sigma_{\mathrm{RR}}^2(\tau)+\sigma_{\mathrm{SN}}^2(\tau)+\sigma_{\mathrm{MN}}^2(\tau) \tag{11}$$

依据 PSD 的噪声特性,各噪声可表示为 $\tau$ 的 $-2\sim+2$ 次幂的系数表达式,故式(11)可简化为

$$\sigma^2(\tau)=\sum_{n=-2}^{2}A_n\tau^n \tag{12}$$

其中,$A_n$ 分别对应与 QN, ARW, BI, RRW, RR 各噪声相关的拟合多项式系数($n=-2,\cdots,2$).

由不同采样时间 $\tau$ 对应的 Allan 方差,对式(12)式进行最小二乘拟合,可得到拟合时各噪声源系数

$$\sigma_{\mathrm{A}}(\tau)=\sum_{n=-2}^{2}C_n\tau^{n/2} \tag{13}$$

由 PSD 有关噪声源系数及 Allan 标准差的表达式,可得噪声源系数与 Allan 标准差的关系.

## 3　实测数据分析

对 PSD 实测数据及滤波器输出数据进行 Allan 方差分析,步骤如下:

1) 总的采样个数为 7 000,将其分组,每组 $k$ 个点,共得到 $m$ 组,对应每组平均时间为 $\tau$,$\tau=kt_0$,$t_0$ 为陀螺采样时间,由式(1)对 $m$ 组数据分别求其均值,然后由式(2)计算其 Allan 方差,开方后得 Allan 标准差.

2) 通过改变每组数据的点数 $k$,得到不同组的相关时间 $\tau$. 绘制"Allan 标准差 $\sigma_{\mathrm{A}}(\tau)$-相关时间 $\tau$ 双对数曲线",通过分析曲线各部分的斜率,来分离和辨识各项随机误差.

由图 1 和图 2 可以看出,在 1 s 相关时间时,曲线的斜率约为-1,主要表现为 QN. 在 2 ~ 400 s 组相关时间范围内,Allan 标准差表现出明显的指数相关(Markov)噪声特性,斜率约为-1/2,主要表现为 ARW. 在 400 ~ 800 s 组相关时间范围内,其斜率约为 0,曲线趋于平缓,主要表现为 BI. 在 800 s 以上组相关时间范围内,其斜率约为-1/2 或 1,主要表现为 RRW 或 RR.

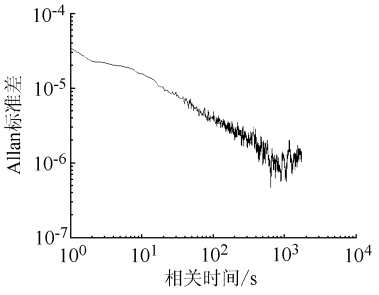



图 1　基于 AR 模型的 Allan 标准差/相关时间曲线

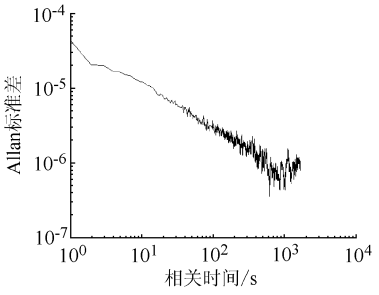



图 2 基于 ARMA 模型的 Allan 标准差/相关时间曲线

可见,QN 分布在高频,ARW 分布在略低的频段,BI 在更低的频段,RRW 和 RR 坡频段最低. 在该陀螺的输出数据中不含正弦噪声和指数互相关噪声.

3) 绘制 PSD 曲线,定性分析滤波效果. PSD 反映了随机信号的平均功率相对频率的分布情况,由傅里叶变换所得的随机信号谱是对称分布在正、负频率轴上的双边谱. 在实际应用中,由于负频率没有实际的物理意义,只取其正频率部分的谱,为保持功率不变,将正频率部分的谱值乘以 2,称为单边谱. 这里图 3 ~ 图 5 即为单边谱. 可见,原始数据中含有较大的低频(RRW 和 RR)和高频(QN)噪声,而且相比之下高频量化噪声更大(即为主要噪声).

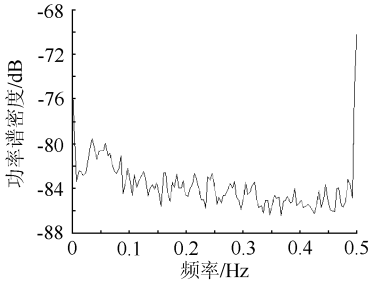



图3 原始数据功率谱密度曲线

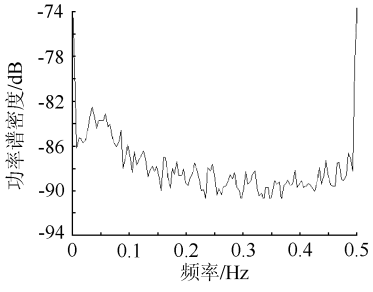



图4 基于AR模型的功率谱密度曲线

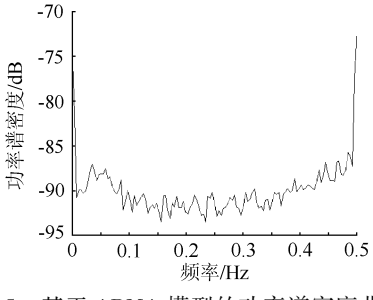



图5 基于ARMA模型的功率谱密度曲线

通过对建立的AR,ARMA模型进行Kalman滤波后,低频和高频噪声都得到了明显的降低,分别从-83 dB左右和-70 dB左右降到了-88 dB左右和-75 dB左右.而中频段内原始数据的噪声也从-84 dB左右降到了-90 dB左右.因此,应用Kalman滤波可以使整个频段内的噪声都得到一定程度的抑制.

4) 用得到的Allan标准差,由式(13)得到拟合后的系数 $C_{-2}$, $C_{-1}$, $C_0$, $C_1$, $C_2$. 然后分别计算噪声项系数 $Q$,$N$,$B$,$K$,$R$ 的值.比较其大小,可得其主要噪声,并可由滤波前后系数的比较,定量分析滤波效果.

由表1可知,该陀螺的主要噪声为QN,其次为RRW和RR.这与PSD分析的结论相同.

同时,可以看出,通过对建立的AR模型进行卡尔曼滤波,可以使噪声项系数普遍下降.而基于ARMA模型的卡尔曼滤波,不仅可以使噪声项系数普遍下降(下降程度较AR模型大),而且对主要噪声(即QN)的滤波效果尤其突出,因此更具实用性.

**表1 噪声源误差系数** $10^{-5}$

| 噪声名称 | 零漂多项式系数 | AR模型滤波输出噪声系数 | ARMA模型滤波输出噪声系数 |
|---|---|---|---|
| 速率斜坡 $R$ | 1.25 | 0.671 | 0.366 |
| 随机游走 $K$ | 2.38 | 1.28 | 0.674 |
| 偏差不稳定 $B$ | 0.943 | 0.508 | 0.254 |
| 角随机游走 $N$ | 0.191 | 0.107 | 0.0663 |
| 量化噪声 $Q$ | 12.3 | 8.34 | 0.144 |

## 4 结束语

利用Allan方差及PSD分析法对FOG输出数据进行分析,能够有效地分离各主要随机误差源,可以精确确定各项误差系数的大小.与国内外目前的测试方法[1-2]相比,PSD分析法与Allan方差分析法相结合,能够克服高频和部分低频随机噪声对PSD测试结果的影响,提高误差建模的精度及评价方法的可靠性.应用PSD实测数据研究表明,时序ARMA模型是建立光纤陀螺仪随机误差模型的一种有效方法.

## 参考文献 (References)

[1] IEEE Std 952-1997, IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros[S]

[2] GJB2426A-2004K, 光纤陀螺测试方法[S]
GJB2426A-2004K, Testing Method of the Fiber Optical Gyroscope[S](in Chinese)

[3] 柳贵福,张树侠. 光纤陀螺零漂数据滤波方法的研究[J]. 中国惯性技术学报,2001, 9(4): 66-69
Liu Guifu, Zhang Shuxia. Investigation on filter methods of fiber optic gyro drift data[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2001, 9(4): 66-69(in Chinese)

[4] 王海,陈家斌,黄威,等. 光纤陀螺随机漂移测试及分析[J]. 光学技术,2004,30(5):623-627
Wang Hai, Chen Jiabin, Huang Wei, et al. Detection and analysis of the fiber optic gyroscope's random drift[J]. Optical Technique, 2004, 30(5):623-627(in Chinese)

[5] 万俊,潘鸿飞,杨柏军. 陀螺仪随机漂移的测取和数学模型的确立[J]. 微计算机信息,2003,19(2):17-18
Wan Jun, Pan Hongfei, Yang Baijun. Measurement of random drift of gyro and establishment of mathematical model[J]. Mini Computer Technique, 2003, 19(2): 17-18(in Chinese)

[6] Reddy P B, Dushman A. Development of long-term stability models for ring laser gyros[J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1992, 28(1): 92-96

(责任编辑:张 婧)