GA-A^3 DI-FDTD 的 PML 吸收边界数值反射分析

张 岩 吕善伟

(北京航空航天大学 电子信息工程学院, 北京 100083)

摘 要: 研究一种减小三维交替方向隐式时域有限差分法 ADI-FDTD(Alternating-Direction Implicit Finite-Difference Time-Domain)数值色散的新方法 GA-A^{3}DI-FDTD(Genetic Algorithm Artificial Anisotropy ADI-FDTD). 首先对添加人工各向异性介质后的三维 ADI-FDTD 迭代公式进行变形,得到新的数值色散关系,再利用自适应遗传算法 AGA(Adaptive Genetic Algorithm)得到需要添加的人工各向异性介质的相对介电常数. 并以空心波导作为数值算例,分析了由不同目标函数得到的人工各向异性介质对计算精度以及 PML(Perfectly Matched Layers)吸收边界数值反射产生的影响,同时分别与传统 ADI-FDTD 相比较. 结果表明通过正确选择目标函数,得到更加合适的人工各向异性介质,可以在减小三维 ADI-FDTD 数值色散的同时,有效地抑制由于人工各向异性介质的添加所造成的 PML 吸收边界数值反射的增强.

关 键 词: 时域分析; 有限差分法; 隐式交替方向; 各向异性介质; 数值色散; 吸收边界; 数值反射

中图分类号: O 441.4

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2006)09-1051-04

Numerical reflection analysis of PML absorbing boundary in 3-D GA-A^{3}DI-FDTD method

Zhang Yan Lü Shanwei

(School of Electronics and Information Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Attention was focused on a new method to reduce the numerical dispersion of the 3-D ADI-FDTD (three-dimensional alternating-direction implicit finite-difference time-domain) method through artificial anisotropy. First, the numerical formulations of the 3-D ADI-FDTD method were modified. Second, the new numerical dispersion relation was derived. And consequently the relative permittivity tensor of artificial anisotropy could be obtained by the AGA (adaptive genetic algorithm). In order to demonstrate the accuracy and efficiency of the 3-D GA-A^{3}DI-FDTD (genetic algorithm artificial anisotropy ADI-FDTD) method, a hollow waveguide was simulated as an example. Both the relative phase velocity and the numerical reflection of PML (perfectly matched layers) absorbing boundary were investigated for different objective functions of the AGA. And the numerical results of the proposed method were compared with those of the conventional 3-D ADI-FDTD method. It is found that this new method is more accurate and efficient.

Key words: time domain analysis; finite difference method; alternating-direction implicit (ADI); artificial anisotropy; numerical dispersion; absorbing boundary; numerical reflection

基于交替方向隐式技术 ADI(Alternating-Direction Implicit) 的交替方向隐式时域有限差分法 ADI-FDTD(ADI Finite-Difference Time-Domain)是非条件稳定的[1],时间步长不再受稳定条件的限制,而是由数值色散来确定. 但作为一种偏微分方程数值解法,必然会造成数值色散. 通常数值色散

收稿日期: 2005-10-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60271012)

作者简介: 张 岩(1980-),男,北京人,博士生,zhangyan _ buaa@ yahoo. com. cn.

仅指相速对频率依赖性;广义上,数值色散还包括相速对传播方向的依赖性. 目前有两种方法减小ADI-FDTD数值色散:一种方法是采用高阶空间差分近似代替2阶差分近似,但由于需要特别处理不连续边界,所以增加了计算复杂性,并且当阶数大于4时,色散误差减小的效果有限[2];另一种方法是添加人工各向异性介质,这种方法只需要对传统ADI-FDTD迭代公式进行简单变形.

近期Juntunen[3]研究了人工各向异性介质在二维和三维FDTD中的应用. 在文献[4]和文献[5]中,作者将人工各向异性介质应用于二维ADI-FDTD,都取得较好的效果,但人工各向异性介质在三维ADI-FDTD中的应用研究尚未报道. 本文提出一种新方法GA-A^{3}DI-FDTD(Genetic Algorithm Artificial Anisotropy ADI-FDTD),首先将传统三维ADI-FDTD迭代公式改写为添加人工各向异性介质的三维ADI-FDTD迭代公式,推导出相应的数值色散关系式,并采用Srinivas等提出的自适应遗传算法[6] AGA(Adaptive Genetic Algorithm),求解得到人工各向异性介质的相对介电常数. 以空心波导为数值算例,分别采用不同目标函数的AGA得到不同的相对介电常数,添加到波导内部后,仿真得到空心波导的相对相速值和PML(Perfectly Matched Layers)吸收边界的数值反射,并与Juntunen方法和传统ADI-FDTD二者得到的结果进行比较. 最后结果表明本文算法能够通过合理选择AGA的目标函数,得到需要添加的正确的人工各向异性介质,可以明显有效地减小数值色散,同时还可以抑制由于引入人工各向异性介质而造成的PML吸收边界数值反射的增加.

1 A^{3}DI-FDTD的数值色散

1.1 添加人工各向异性介质的三维ADI-FDTD迭代公式

在三维空间中添加一种简单的人工各向异性介质(相对介电常数$\boldsymbol{\varepsilon}_r=\mathrm{diag}(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z)$),将传统三维ADI-FDTD迭代公式作如下变形(以电场分量E_x为例):

1) 从第n步到第$(n+1/2)$步:

$$-\frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\varepsilon_x\varepsilon_y\mu\Delta z^2}E_x\Big|^{n+1/2}_{i+1/2,j,k-1}+\left(1+\frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\varepsilon_x\varepsilon_y\mu\Delta z^2}\right)E_x\Big|^{n+1/2}_{i+1/2,j,k}-\frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\varepsilon_x\varepsilon_y\mu\Delta z^2}E_x\Big|^{n+1/2}_{i+1/2,j,k+1}=E_x\Big|^{n}_{i+1/2,j,k}+$$
$$\frac{\Delta t}{2\varepsilon\varepsilon_x\varepsilon_z\Delta y}\left(H_z\Big|^{n}_{i+1/2,j+1/2,k}-H_z\Big|^{n}_{i+1/2,j-1/2,k}\right)-\frac{\Delta t}{2\varepsilon\varepsilon_x\varepsilon_y\Delta z}\left(H_y\Big|^{n}_{i+1/2,j,k+1/2}-H_y\Big|^{n}_{i+1/2,j,k-1/2}\right)+$$
$$\frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\varepsilon_x\varepsilon_y\mu\Delta x\Delta z}\left(E_z\Big|^{n}_{i+1,j,k-1/2}-E_z\Big|^{n}_{i,j,k-1/2}-E_z\Big|^{n}_{i+1,j,k+1/2}+E_z\Big|^{n}_{i,j,k+1/2}\right)\tag{1}$$

2) 从第$(n+1/2)$步到第$(n+1)$步:

$$-\frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\varepsilon_x\varepsilon_z\mu\Delta y^2}E_x\Big|^{n+1}_{i+1/2,j-1,k}+\left(1+\frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\varepsilon_x\varepsilon_z\mu\Delta y^2}\right)E_x\Big|^{n+1}_{i+1/2,j,k}-\frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\varepsilon_x\varepsilon_z\mu\Delta y^2}E_x\Big|^{n+1}_{i+1/2,j+1,k}=E_x\Big|^{n+1/2}_{i+1/2,j,k}+$$
$$\frac{\Delta t}{2\varepsilon\varepsilon_x\varepsilon_z\Delta y}\left(H_z\Big|^{n+1/2}_{i+1/2,j+1/2,k}-H_z\Big|^{n+1/2}_{i+1/2,j-1/2,k}\right)-\frac{\Delta t}{2\varepsilon\varepsilon_x\varepsilon_y\Delta z}\left(H_y\Big|^{n+1/2}_{i+1/2,j,k+1/2}-H_y\Big|^{n+1/2}_{i+1/2,j,k-1/2}\right)+$$
$$\frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\varepsilon_x\varepsilon_z\mu\Delta x\Delta y}\left(E_y\Big|^{n+1/2}_{i+1,j-1/2,k}-E_y\Big|^{n+1/2}_{i,j-1/2,k}-E_y\Big|^{n+1/2}_{i+1,j+1/2,k}+E_y\Big|^{n+1/2}_{i,j+1/2,k}\right)\tag{2}$$

电场分量E_y和E_z的求解方程与式(1)和式(2)类似;磁场分量的求解方程中不含介电常数项,所以无需变形.

1.2 新的数值色散关系式

根据文献[7]所述的传统三维ADI-FDTD数值色散关系式的推导方法,利用MATLAB求解符号方程,得到本文算法对应的数值色散关系简化表达式:

$$\tan^2(\omega\Delta t/2)=(r_x^2+r_y^2+r_z^2+r_x^2r_y^2+r_y^2r_z^2+r_z^2r_x^2)/(1+r_x^2r_y^2r_z^2)\tag{3}$$

其中
$$r_x=c\Delta t\sin(k_x\Delta x/2)/(\sqrt{\varepsilon_y\varepsilon_z}\Delta x)$$
$$r_y=c\Delta t\sin(k_y\Delta y/2)/(\sqrt{\varepsilon_z\varepsilon_x}\Delta y)$$
$$r_z=c\Delta t\sin(k_z\Delta z/2)/(\sqrt{\varepsilon_x\varepsilon_y}\Delta z)$$
$$k_x=k\sin\theta\cos\phi$$
$$k_y=k\sin\theta\sin\phi$$
$$k_z=k\cos\theta$$

ω为理论角频率;c为真空中光速;k为数值波数.

2 相对介电常数求解

根据推导出的新的数值色散关系式,采用AGA对人工各向异性介质的介电常数进行求解. 本文采用的遗传算法描述如下:

1) 交叉概率P_c和变异概率P_m随个体适应值

而改变,以保持群体的多样性并维持算法的收敛能力. 对于适应值高于群体平均适应值的个体,进行交叉和变异操作时,选用较低的 P_c 和 P_m,使该个体得以保护进入下一代;而低于平均适应值的个体,则对应较高的 P_c 和 P_m,使该个体被淘汰掉.

2) 编码方式采用实数编码,物理意义明确,节省遗传操作时间,同时具有较高精度.

3) 交叉操作采用 4 种交叉算子,分别为单点交叉、算术交叉、内插交叉和外推交叉,操作比例为 5∶5∶4∶6,用以拓展新的搜索空间,有效地克服早熟,达到改善算法性能的目的.

4) 变异操作结合使用均匀和高斯两种变异算子,操作比例为 2 3.

5) 为了保证最优个体不被遗传的随机性破坏并且不出现退化现象,采用最优保存策略.

6) 以人工各向异性介质的相对介电常数(ε_x, ε_y, ε_z)作为基因,这样每个染色体包含 3 个基因位.

7) 分别定义 2 个目标函数. 通过比较由 AGA 求解出的相对介电常数对三维 GA-A^{3}DI-FDTD 性能的影响,用以衡量不同目标函数的优劣.

第一个目标函数取 90°方向上的数值色散误差 E_{ND}之和的最小值,记为 AGA(1):

$$f_1 = \min \sum_{i=1}^{6} E_{ND}(i)$$

其中,$E_{ND}(i)$表示第 i 个方向上的数值色散误差. 6 个方向的具体角度(θ,ϕ)分别为(90°,0°),(90°,180°),(90°,90°),(90°,270°),(0°,φ_0)和(180°,φ_0). 其中 φ_0 为任意角度.

第二个目标函数取 90°方向和 45°方向上的 E_{ND}之和的最小值. 记为 AGA(2):

$$f_2 = \min \sum_{i=1}^{14} E_{ND}(i)$$

其中,14 个方向的具体角度(θ,ϕ)分别为(90°,0°),(90°,180°),(90°,90°),(90°,270°),(0°,φ_0),(180°,φ_0),(45°,45°),(45°,135°),(45°,225°),(45°,315°),(135°,45°),(135°,135°),(135°,225°)和(135°,315°).

3　数值算例

选用 WR-90 矩形波导作为数值算例. WR-90 波导内部截面尺寸为 $a \times b = 22.86\ \text{mm} \times 10.16\ \text{mm}$. 采用均匀网格划分,网格尺寸为 $\Delta x = 1.143\ \text{mm}$, $\Delta y = \Delta z = 1.016\ \text{mm}$. 时间步长比率($N_{CFL} = \Delta t / \Delta t_{CFL}$)取为 8,迭代 200 步. 研究波导主模传输(8 ~ 12 GHz),源面上场值呈主模分布,并采用软激励,激励波形选用调制高斯脉冲 $E(x,t) = \exp[-(t-t_0)^2/2T^2]\sin(\omega_m t)\sin(\pi x/a)$. 其中,$T = \sqrt{6}/[\pi(f_{max}-f_{min})]$;$t_0 = 4T$;$\omega_m = \pi(f_{max}+f_{min})$. 波导两端设置分裂式 PML 吸收边界,层数为 10 层,理论反射系数为 10^{-6},幂指数为 3.

3.1　相对介电常数

将 GA-A^{3}DI-FDTD(1)和 GA-A^{3}DI-FDTD(2)得到的相对介电常数与 Juntunen 提出的 J-A^{3}DI-FDTD 方法得到的介电常数作比较,并列于表 1. 其中 GA-A^{3}DI-FDTD(i)表示采用第 i 个目标函数 AGA(i). AGA 种群大小取为 200,最大进化代数取为1 000代.

表 1　3 种 A^{3}DI-FDTD 得到的相对介电常数
(频率为 8 GHz,N_{CFL} = 8)

算法	相对介电常数		
	ε_x	ε_y	ε_z
GA-A^{3}DI-FDTD(1)	0.972 73	0.968 93	0.972 14
GA-A^{3}DI-FDTD(2)	1.000 04	0.998 14	0.943 72
J-A^{3}DI-FDTD	0.978 42	0.978 10	0.978 10

3.2　相对相速值

采用 GRT 法[8]用来减小吸收边界的数值反射. 分别仿真两个子波导,其中一个子波导长 140Δy,源面置于 20Δy,参考面 1 置于 120Δy;另一个子波导长 130Δy,源面置于 20Δy,参考面 2 置于 110Δy.

比较 3 种 A^{3}DI-FDTD 对相速的影响,分别在波导内部添加 3 种 A^{3}DI-FDTD 方法对应的人工各向异性介质,仿真得到相速值,并由理想相速值归一化得到相对相速值,与传统 ADI-FDTD 仿真结果对比绘于图 1.

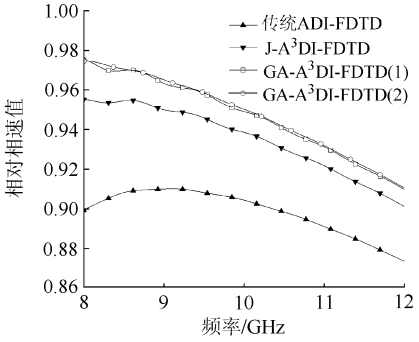


图 1　3 种 A^{3}DI-FDTD 的相对相速值与传统 ADI-FDTD 比较

由图 1 可看出,对于 N_{CFL} = 8,最大相速误差(相速误差 = |1 − 相对相速值| × 100%)出现在最大频率(12 GHz),通过计算分别得到 4 种方法的最大相速误差:传统 ADI-FDTD 的最大相速误差为 12.64%;J-A^{3}DI-FDTD 的最大相速误差为 9.88%;GA-

A^3DI-FDTD(1)的最大相速误差为9.02%；GA-A^3DI-FDTD(2)的最大相速误差为8.94%. 可见,4种方法中GA-A^3DI-FDTD(2)的计算精度最高.

3.3 PML吸收边界的数值反射

通过仿真两个空心波导,求解PML吸收边界的数值反射,从而比较3种A^3DI-FDTD对PML吸收边界的影响. 其中一个波导长2 000Δy,源面置于1 000Δy,参考面置于1 200Δy,由于参考面与PML吸收边界足够远(距离一端PML吸收边界800Δy,距离另一端PML吸收边界1 200Δy),使得由PML吸收边界造成的反射波在未到达参考面之前,仿真过程就已结束,这样就能保证参考面的场值(记为$E_z^{\mathrm{inc}}(t)$)中只含有入射场,而不含由PML吸收边界引起的反射场;另一个波导长1 220Δy,源面置于1 000Δy,参考面置于1 200Δy,由于参考面距离PML吸收边界很近(20Δy),所以参考面的场值(记为$E_z^{\mathrm{total}}(t)$)中既含有入射场也含有反射场. 这样,反射系数就可以表示为$\Gamma(t)=E_z^{\mathrm{ref}}(t)/E_z^{\mathrm{inc}}(t)=[E_z^{\mathrm{total}}(t)-E_z^{\mathrm{inc}}(t)]/E_z^{\mathrm{inc}}(t)$.

比较3种A^3DI-FDTD方法对PML吸收边界数值反射的影响,分别在波导内部添加3种A^3DI-FDTD方法对应的人工各向异性介质,仿真得到反射系数,并与传统ADI-FDTD仿真结果对比绘于图2.

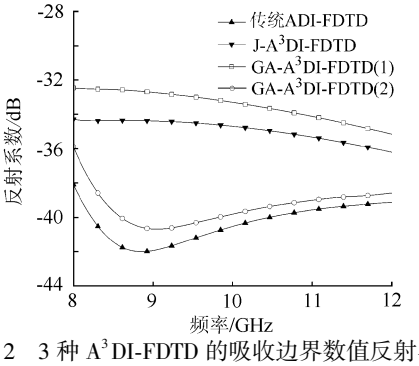


图2 3种A^3DI-FDTD的吸收边界数值反射与传统ADI-FDTD比较

由图2可看出,传统ADI-FDTD的最大反射系数为-38.09 dB;J-A^3DI-FDTD的最大反射系数为-34.29 dB;GA-A^3DI-FDTD(1)的最大反射系数为-32.47 dB;GA-A^3DI-FDTD(2)的最大反射系数为-35.89 dB.

可见,由于引入了人工各向异性介质,造成了比传统ADI-FDTD更强的PML吸收边界的数值反射. 虽然3种A^3DI-FDTD的数值反射都比传统ADI-FDTD的数值反射大,但GA-A^3DI-FDTD(2)的PML吸收边界数值反射是3种A^3DI-FDTD中最小的;同时由本文第3.2节看出,GA-A^3DI-FDTD(2)的计算精度又是最高的,所以GA-A^3DI-FDTD(2)应是ADI-FDTD的首选方法.

4 结束语

本文提出的GA-A^3DI-FDTD方法通过在三维空间中合理添加人工各向异性介质,使ADI-FDTD数值色散明显减小. 在采用AGA求解人工各向异性介质的相对介电常数时,不同的目标函数会得到不同的相对介电常数,它们减小数值色散的程度不同,并且对应的PML吸收边界的数值反射也不同,结果表明GA-A^3DI-FDTD(2)有较好的效果,既有最高的计算精度,又有较低的PML吸收边界数值反射.

参考文献(References)

[1] Namiki T. A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1999, 47(10): 2003-2007

[2] 张岩, 吕善伟. 空间高阶差分近似对三维ADI-FDTD数值色散的影响[J]. 北京航空航天大学学报, 2005, 31(6): 632-636
Zhang Yan, Lü Shanwei. Numerical dispersion analysis for 3-D ADI-FDTD method using higher-order spatial difference [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2005, 31(6): 632-636(in Chinese)

[3] Juntunen J S, Tsiboukis T D. Reduction of numerical dispersion in FDTD method through artificial anisotropy[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2000, 48(4): 582-588

[4] 刘波, 任武, 高本庆, 等. 一种有效减少ADI-FDTD数值色散的方法[J]. 微波学报, 2003, 19(2):19-23
Liu Bo, Ren Wu, Gao Benqing, et al. An efficient method to reduce the numerical dispersion in ADI-FDTD algorithm[J]. Journal of Microwaves, 2003, 19(2): 19-23(in Chinese)

[5] Zhao Anping. Improvement on the numerical dispersion of 2-D ADI-FDTD with artificial anisotropy [J]. IEEE Microwave and Wireless Components Letters, 2004, 14(6): 292-294

[6] Srinivas M, Patnaik L M. Adaptive probabilities of crossover and mutation in genetic algorithms[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1994, 24(4): 656-667

[7] Zheng Fenghua, Chen Zhizhang. Numerical dispersion analysis of the unconditionally stable 3-D ADI-FDTD method [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2001, 49(5):1006-1009

[8] 张岩, 吕善伟. ADI-FDTD+GRT在波导电路分析中的应用[J]. 电子学报, 2005, 33(9): 1688-1690
Zhang Yan, Lü Shanwei. Analysis of waveguide circuits using the ADI-FDTD+GRT method[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(9):1688-1690(in Chinese)

(责任编辑:张 婧)