复合材料层合梁自由振动的区间分析

邱志平 邱 薇 王晓军

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100083)

摘 要: 利用区间数学研究了具有有界不确定结构参数的复合材料层合梁自由振动问题. 将不确定结构参数用区间向量进行定量化,结合区间数学与 Taylor 级数,提出了求解具有不确定结构参数的复合材料层合梁自由振动问题的区间分析法. 与传统的概率分析方法相比,它只需不确定参数所在范围的界限,而不需要其它任何概率统计信息来确定结构振动固有频率的变化区间. 通过数值算例,将非概率区间分析法和概率分析方法进行了比较,可看出由区间分析方法得到的固有频率区间包含由概率方法得到的固有频率区间,即概率方法得到的区间宽度比区间分析方法得到的区间宽度要"紧",表明了区间分析方法的可行性和有效性.

关 键 词: 复合材料; 自由振动; 不确定参数; 区间分析

中图分类号: O 324

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2006)07-0838-05

Interval analysis for free vibration of composite laminated beams

Qiu Zhiping Qiu Wei Wang Xiaojun

(School of Aeronautic Science and Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: A new method named interval analysis method, which solves the free vibration of composite laminated beams with uncertain parameters, was presented. Based on interval mathematics and Taylor series expansion, uncertain parameters were described by interval numbers. Instead of conventional probabilistic approach, interval analysis method could get the variation intervals of the natural frequencies of structure, in which the bounds on the magnitude of uncertain parameters were only required, not necessarily knowing other information of statistics. From the comparison between the non-probabilistic interval analysis method and the probabilistic approach in the numerical examples, it could be seen that the region of the natural frequency of structures with uncertain parameters obtained by the interval analysis method contained that produced by the probabilistic approach. In other words, the width of the maximum or upper and minimum or lower bounds on the natural frequency yielded by the probabilistic approach was tighter than that produced by the interval analysis method. The result illustrates the feasibility and the efficiency of the interval analysis method.

Key words: composite materials; free vibration; uncertain parameters; interval analysis

近年来,复合材料层合结构在飞行器结构中的需求越来越多,主要是由于复合材料具有比强度、比刚度高的优点,且疲劳寿命长、损伤容限大、阻尼高,又可模压成型,并且材料本身具有可设计性. 然而,复合材料的属性经常存在很大的分散性[1],包括几何特征(铺层角度和尺寸)、材料特性(弹性模量、剪切模量、泊松比以及材料的密度)和外部属性(热效应和载荷的影响),以此具有不确定性的参数为基础所求得的结构固有频率也将具有某种程度的不确定性. 因此,如能给出这种不精确固有频率的一种有用的估计,无论在理论上还是在实际应用上都是有意义的.

收稿日期: 2005-07-22

基金项目: 航天支撑技术基金资助项目(20032.2BH03); 国家杰出青年科学基金资助项目(10425208); 国家自然科学基金委与中国工程物理研究院联合基金资助项目(10376002)

作者简介: 邱志平(1962-),男,吉林长春人,教授, zpqiu@buaa.edu.cn.

本文以基于一阶剪切变形梁理论的 16 自由度梁单元为基础[2],结合最近在处理不确定性问题上表现出极大优势的区间分析方法[3-11]来研究具有不确定参数层合梁的固有振动频率问题. 这种非概率区间分析法不需要知道不确定参数的概率统计特性,只要知道其所在范围,即不确定参数的上界和下界,就可以确定结构振动频率的变化区间.

1　复合材料层合梁有限元分析

设参考坐标系的 x 轴是梁长度的方向,z 轴是梁中心横向位移的方向. 假设 xz 平面将横梁截成 2 个相同的部分,即材料的几何形状和载荷关于 xz 平面对称. 当考虑梁的扭转变形而忽略 xy 面内的弯曲变形时,根据一阶剪切变形理论[2]可以得到在参考坐标系下的位移量为

$$\left.\begin{aligned} U(x,y,z) &= u(x) + z\phi(x) \\ V(x,y,z) &= -z\tau(x) \\ W(x,y,z) &= w(x) + y\tau(x) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

每个节点有 8 个自由度:轴向位移 u,横向挠度 w,横向转角 ϕ,扭转角 τ 以及它们关于 x 的导数 u',w',ϕ'和 τ',从而节点的广义位移列向量可以表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_{\mathrm{t}} = \big[&u_1,u_1',w_1,w_1',\tau_1,\tau_1',\phi_1,\phi_1', \\ &u_2,u_2',w_2,w_2',\tau_2,\tau_2',\phi_2,\phi_2'\big]^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{2}$$

一阶剪切变形梁理论考虑了梁横向扭转角的影响,梁单元中各位移的容许位移函数可近似为

$$\left.\begin{aligned} u(x) &= N_1u_1 + N_2u_1' + N_3u_2 + N_4u_2' \\ w(x) &= N_1w_1 + N_2w_1' + N_3w_2 + N_4w_2' \\ \tau(x) &= N_1\tau_1 + N_2\tau_1' + N_3\tau_2 + N_4\tau_2' \\ \phi(x) &= N_1\phi_1 + N_2\phi_1' + N_3\phi_2 + N_4\phi_2' \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中形函数 N_i 是 Hermitian 插值多项式,是关于 x 的函数. 式(3)可简写为

$$\boldsymbol{q}(x) = \boldsymbol{N}\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}} \tag{4}$$

非零应变与位移的关系为

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= \varepsilon_{xx} + \kappa_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ 2e_{xz} &= \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial \tau}{\partial x} + \phi \\ 2e_{xy} &= \kappa_{xy} = z\left(-\frac{\partial \tau}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

以向量形式表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\gamma_{xy},\kappa_{xx},\kappa_{yy},\kappa_{xy},\gamma_{xz}]^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

联立式(2),式(3)和式(6),应变-位移关系可表示如下:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{sd}}\boldsymbol{q}_{\mathrm{t}} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{sd}}$为应变矩阵.

由于在层合梁中,每一层有不同的铺设角度,因此经过转换的平面应力折减刚度系数表示为 $\overline{Q}_{ij}$,则非材料主向单层梁应力-应变关系为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} & 0 \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} & 0 \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \\ 2e_{xz} \end{bmatrix} \tag{8}$$

面内刚度矩阵 $\boldsymbol{A}$、耦合刚度矩阵 $\boldsymbol{B}$、弯曲-刚度矩阵 $\boldsymbol{D}$ 定义为

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{lam}}} \overline{Q}_{ij}(z_{k+1} - z_k) \quad i,j = 1,2,5,6 \tag{9}$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{lam}}} \overline{Q}_{ij}\left(\frac{z_{k+2}^2 - z_k^2}{2}\right) \quad i,j = 1,2,6 \tag{10}$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{lam}}} \overline{Q}_{ij}\left(\frac{z_{k+1}^2 - z_k^2}{3}\right) \quad i,j = 1,2,6 \tag{11}$$

其中 N_{lam}为层合梁的总层数.

基本的结构关系式为

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{12}$$

其中,$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{s}} = \big[N_{xx},N_{yy},N_{xy},M_{xx},M_{yy},M_{xy},Q_x\big]^{\mathrm{T}}$ 为应力与力矩的合成向量;$\boldsymbol{C}$ 为弯曲-刚度矩阵;$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变向量.

在一维梁单元的分析中,合力 N_{yy}与挠矩 M_{yy}为 0,即

$$M_{yy} = N_{yy} = 0 \tag{13}$$

此外,应变场 $e_{yy}=0$,$\gamma_{xy}=0$,则式(12)可写为

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ M_{xy} \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{c11} & D_{c12} & D_{c13} & 0 \\ D_{c12} & D_{c22} & D_{c23} & 0 \\ D_{c13} & D_{c23} & D_{c33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{c44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \tag{14}$$

与层合梁的弯曲-刚度矩阵 $\boldsymbol{C}$ 等价的一个矩阵 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{c}}$ 定义为

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} D_{c11} & D_{c12} & D_{c13} & 0 \\ D_{c12} & D_{c22} & D_{c23} & 0 \\ D_{c13} & D_{c23} & D_{c33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{c44} \end{bmatrix} \tag{15}$$

从而可得到梁单元的刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}} = \int_0^{l_{\mathrm{e}}} \int_{-b_0/2}^{b_0/2} \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \boldsymbol{B}_{\mathrm{sd}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{sd}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{16}$$

其中,h_0 是横梁的厚度;b_0 是横梁的宽度;l_{e} 是梁单元的长度;$\boldsymbol{D}_{\mathrm{c}}$ 是弯曲-刚度矩阵的等价矩阵. 类似地,梁单元的质量矩阵为

$$\boldsymbol{M}_e = \int_0^{l_e} \boldsymbol{N}^T m \boldsymbol{N} \mathrm{d}x \tag{17}$$

其中,m 为质量密度;$\boldsymbol{N}$ 为形函数矩阵.

2 非概率区间 Taylor 级数法

n 自由度梁自由振动的特征值方程为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi} = \lambda \boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi} \tag{18}$$

通过有限元分析,知道质量矩阵 $\boldsymbol{M}$、刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$、特征值 λ 和特征向量 $\boldsymbol{\varphi}$ 都由结构参数矢量 $\boldsymbol{a}=(a_i)$ 来确定,并且可以表示成不确定结构参数向量 $\boldsymbol{a}=(a_i)$ 的函数形式,如式(19)所示:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}) \\ \boldsymbol{K} &= \boldsymbol{K}(\boldsymbol{a}) \\ \lambda &= \lambda(\boldsymbol{a}) \\ \boldsymbol{\varphi} &= \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{a}=(a_i)$ 是一个 m 维向量. 因此,式(18)可重写为

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}) = \lambda(\boldsymbol{a})\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}) \tag{20}$$

假定不确定结构参数向量 $\boldsymbol{a}=(a_i)$ 属于一个凸集区间向量:

$$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{a}^I = [\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}] = (a_i^I) \quad i = 1,2,\cdots,m \tag{21}$$

其中 $\overline{\boldsymbol{a}}=(\overline{a_i})$ 和 $\underline{\boldsymbol{a}}=(\underline{a_i})$ 分别是不确定结构参数 $\boldsymbol{a}=(a_i)$ 的上界和下界.

下面将求解满足区间向量 $\boldsymbol{a}^I=(a_i^I)$ 约束下的各阶特征值 $\lambda_j(j=1,\cdots,n)$ 所在的区间集合:

$$\lambda_j^I(\boldsymbol{a}) = [\underline{\lambda}_j(\boldsymbol{a}), \overline{\lambda}_j(\boldsymbol{a})] \tag{22}$$

其中 $\overline{\lambda}_j(\boldsymbol{a})$ 和 $\underline{\lambda}_j(\boldsymbol{a})$ 分别为各阶特征值的上界和下界.

根据式(21),可以定义区间向量 $\boldsymbol{a}^I$ 的均值向量或中点向量如下:

$$\boldsymbol{a}^c = (a_i^c) = m(\boldsymbol{a}^I) = (\overline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{a}})/2 \tag{23}$$

区间向量 $\boldsymbol{a}^I$ 的偏差幅度向量或不确定量向量可以定义如下:

$$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{a}} = (\Delta_{a_i}) = \mathrm{rad}(\boldsymbol{a}^I) = (\overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}})/2 \tag{24}$$

因此,根据区间数学[3-4],区间向量 $\boldsymbol{a}^I$ 可以分解为均值向量与偏差向量之和的形式:

$$\boldsymbol{a}^I = \boldsymbol{a}^c + \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\Delta}} \tag{25}$$

式(23)~式(25)中,$\overline{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}^c + \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{a}}$;$\underline{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}^c - \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{a}}$,$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{a}}^I = [-\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{a}}]$;$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\Delta}} = [-1,1]$.

区间结构参数向量 $\boldsymbol{a}$ 可表示成如下形式:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^c + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{a}} \qquad |\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{a}}| \leqslant \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{a}} \tag{26a}$$

或用分量形式表示为

$$\begin{aligned} a_i &= a_i^I + \delta_{a_i} \\ |\delta_{a_i}| &\leqslant \Delta_{a_i} \qquad i = 1,2,\cdots,m \end{aligned} \tag{26b}$$

把特征值 $\lambda_j(\boldsymbol{a})$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 在 $\boldsymbol{a}^c$ 处用一阶 Taylor 级数展开

$$\lambda_j(\boldsymbol{a}) = \lambda_j(\boldsymbol{a}^c + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{a}}) = \lambda_j(\boldsymbol{a}^c) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \lambda_j(\boldsymbol{a}^c)}{\partial a_i} \delta_{a_i} \tag{27}$$

其中

$$\delta_{a_i} \in \Delta_{a_i}^I = [-\Delta_{a_i}, \Delta_{a_i}] \quad i = 1,2,\cdots,m \tag{28}$$

通过区间数学中的区间自然扩张,可得到特征值区间

$$\lambda_j^I(\boldsymbol{a}) = \lambda_j(\boldsymbol{a}^c + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{a}}) = \lambda_j(\boldsymbol{a}^c) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \lambda_j(\boldsymbol{a}^c)}{\partial a_i} \Delta_{a_j}^I \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{29}$$

经区间运算后,可以得到特征值区间的上界和下界分别为

$$\overline{\lambda}_j(\boldsymbol{a}) = \lambda_j(\boldsymbol{a}^c) + \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial \lambda_j(\boldsymbol{a}^c)}{\partial a_i} \right| \Delta_{a_i} \tag{30}$$

其中 $j=1,2,\cdots,n$.

$$\underline{\lambda}_j(\boldsymbol{a}) = \lambda_j(\boldsymbol{a}^c) - \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial \lambda_j(\boldsymbol{a}^c)}{\partial a_i} \right| \Delta_{a_i} \tag{31}$$

其中 $j=1,2,\cdots,n$.

从而,由式(30)和式(31)便可确定出具有不确定结构参数层合梁的特征值的区间界限.

3 概率分析方法

假设 m 维的不确定结构参数向量 $\boldsymbol{a}=(a_i)$ 是随机变量,那么特征值 $\lambda(\boldsymbol{a})$ 也为随机的. 如果将随机参数向量 $\boldsymbol{a}$ 的期望值或平均值表示为

$$E(\boldsymbol{a}) = (E(a_i)) = \boldsymbol{a}^E = (a_i^E) \tag{32}$$

那么,式(27)就可解释为特征值 $\lambda(\boldsymbol{a}^E + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{a}})$ 在 $\boldsymbol{a}^E$ 关于参数向量 $\boldsymbol{a}=(a_i)$ 的一阶 Taylor 展开式.

对于随机参数向量 $\boldsymbol{a}=(a_i)$,其方差可以定义如下:

$$D(\boldsymbol{a}) = (D(a_i)) \tag{33}$$

则随机参数向量 $\boldsymbol{a}=(a_i)$ 的标准方差为

$$\sigma(\boldsymbol{a}) = (\sigma(a_i)) = \sqrt{D(\boldsymbol{a})} = (\sqrt{D(a_i)}) \tag{34}$$

随机特征值的均值或期望值可通过对式(27)两边取期望值而获得

$$E(\lambda_j(\boldsymbol{a})) = E(\lambda_j(\boldsymbol{a}^E)) + E\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \lambda_j(\boldsymbol{a}^E)}{\partial a_i} \delta_{a_i} \right) = \lambda_j(\boldsymbol{a}^E) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \lambda_j(\boldsymbol{a}^E)}{\partial a_i} E(a_i - a_i^E) \tag{35}$$

其中 $j=1,2,\cdots,n$. 并且由于 $E(\delta_{a_i}) = E(a_i - a_i^E) = 0$,可得到

$$E(\lambda_j(\boldsymbol{a})) = \lambda_j(\boldsymbol{a}^E) \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{36}$$

对于特征值 $\lambda_j(\boldsymbol{a})$ 的方差,可以用相似的方

法得到

$$D(\lambda_j(\boldsymbol{a})) = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\lambda_j(\boldsymbol{a}^{\mathrm{E}})}{\partial a_i}\right)^2 D(a_i) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\lambda_j(\boldsymbol{a}^{\mathrm{E}})}{\partial a_k}\frac{\partial\lambda_j(\boldsymbol{a}^{\mathrm{E}})}{\partial a_l}\mathrm{cov}(a_k,a_l) \quad (37)$$

其中 $\mathrm{cov}(a_k,a_l)$ 是随机参数变量 $\boldsymbol{a}$ 的协方差,定义为

$$\mathrm{cov}(a_k,a_l) = E([a_k - E(a_k)][a_l - E(a_l)]) \quad (38)$$

从而,特征值的标准方差 $\sigma(\lambda_j(a))$ 就为

$$\sigma(\lambda_j(\boldsymbol{a})) = \sqrt{D(\lambda_j(\boldsymbol{a}))} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\lambda_j(\boldsymbol{a}^{\mathrm{E}})}{\partial a_i}\sigma_i\right)^2} \quad (39)$$

设 k 为一实整数,则各阶特征值期望值的 k 倍标准差的概率上界和概率下界分别为

$$\overline{\lambda}_j(\boldsymbol{a}) = \lambda_j(\boldsymbol{a}^{\mathrm{E}}) + k\sigma(\lambda_j(\boldsymbol{a})) = \lambda_j(\boldsymbol{a}^{\mathrm{E}}) + k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\lambda_j(\boldsymbol{a}^{\mathrm{E}})}{\partial a_i}\right)^2} \quad j=1,2,\cdots,n \quad (40)$$

$$\underline{\lambda}_j(\boldsymbol{a}) = \lambda_j(\boldsymbol{a}^{\mathrm{E}}) - k\sigma(\lambda_j(\boldsymbol{a})) = \lambda_j(\boldsymbol{a}^{\mathrm{E}}) - k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\lambda_j(\boldsymbol{a}^{\mathrm{E}})}{\partial a_i}\right)^2} \quad j=1,2,\cdots,n \quad (41)$$

根据 Tchebycheff 不等式,随机变量落在 k 倍标准差范围内的概率至少是 $(1-1/k^2)$,并且这个边界与随机变量的分布无关,只要求它有一个有限的方差. 在实际计算中,只要 k 足够大,当用概率法来估计结构响应的上下界时,在式(40)和式(41)中的 k 次标准差就可看作一个常数项.

4　算　例

考虑如图 1 所示的碳纤维增强环氧树脂复合材料悬臂梁,特性参数为

$$E_{xx}/E_{yy} = 13.75 \qquad G_{xy}/E_{yy} = 0.55$$
$$G_{yz}/E_{yy} = 0.25 \qquad G_{xz}/E_{yy} = 0.25$$
$$E_{yy} = 9.43\ \mathrm{GPa} \qquad v_{xy} = 0.30$$
$$h_0/b_0 = 0.5 \qquad L_0/h_0 = 30.0$$
$$b_0 = 0.1\ \mathrm{m}$$

考虑对称铺层和非对称铺层 2 种不同情况的层合梁,并且由于制造原因等,层合梁的每一铺层

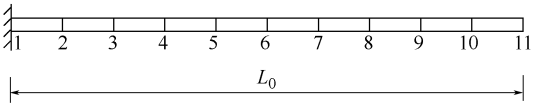


图 1　10 单元复合材料悬臂梁

角度 α 都具有有界不确定性,假设铺设误差 $[-\Delta\alpha,\Delta\alpha]=[-1.5°,1.5°]$. 通过区间分析方法和概率分析方法分别确定梁自由振动频率区间,并对结果进行比较.

图 2 所示为 4 层对称铺层复合材料悬臂梁结构,铺层角度[90°/-45°/-45°/90°].

图 3 所示为 4 层非对称铺层复合材料悬臂梁结构,铺层角度[90°/-45°/0/25°].

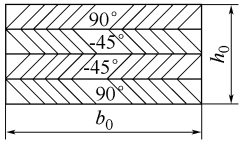


图 2　4 层对称铺层复合材料悬臂梁横截面

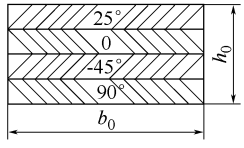
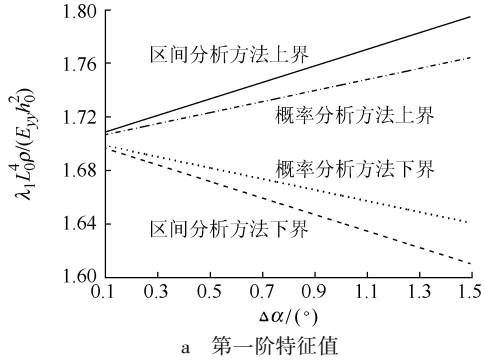
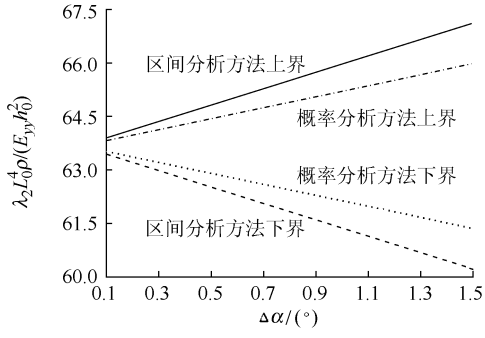


图 3　4 层非对称铺层复合材料悬臂梁横截面

图 4、图 5 分别给出了用区间分析方法和概率分析方法得到的对称及非对称铺层这 2 种不同的复合材料层合梁的前二阶无量纲化特征值随铺设角度不确定性的变化情况的比较曲线.



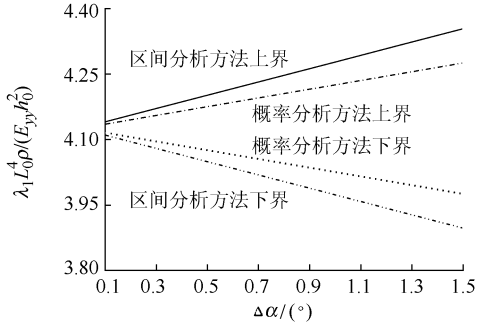
a　第一阶特征值



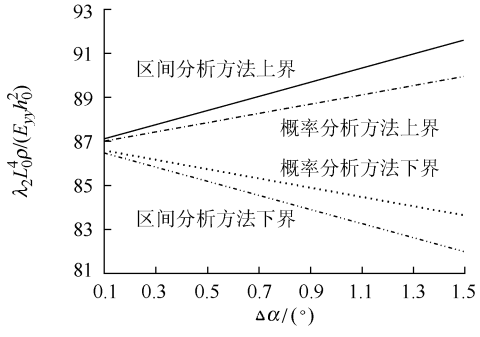
b　第二阶特征值

图 4　对称铺层复合材料悬臂梁前二阶无量纲化特征值随铺设角度不确定性的变化曲线

以上 2 个算例中,在对悬臂梁结构分析时都假设梁的机械特性和几何形状是一致的,并且把整个梁分为 10 个梁单元进行有限元分析. 针对对称铺层和非对称铺层 2 种不同的悬臂复合材料层合梁,均使用区间法和概率法 2 种模型进行了不确定性计算,结果表明当铺层角度在 ±1.5° 的范



a 第一阶特征值



b 第二阶特征值

图5 非对称铺层复合材料悬臂梁前二阶无量纲化特征值随铺设角度不确定性的变化曲线

围内变化时其不确定性对对称和非对称层合梁低阶特征值影响很小. 使用区间法计算出的特征值的变化趋势与用概率法所得到的结果基本一致.

从图4、图5可以看出在通过概率信息得到不确定参数的区间向量的条件下,用区间分析法得到的具有不确定结构参数的复合材料层合梁的固有振动频率范围包含了用概率法得到的范围. 也就是说,区间分析法能得到更大的区间边界,即区间分析法得到的下界比概率法得到的要小,而同时用区间分析法得到的上界比概率法得到的要大. 这正是所希望的结论,因为根据区间分析法和概率法的定义,区间分析法所确定的范围要包含概率法所确定的范围.

5 结 束 语

利用区间数学对具有有界不确定性结构参数的复合材料层合梁进行建模,提出了估计梁固有振动频率范围的区间分析方法. 通过数值算例与概率分析方法进行了比较. 结果表明区间分析的结果包含概率分析方法的结果,这样的结果是与概率理论和区间数学理论相一致的,显示了区间分析方法是有效可行的.

参考文献 (References)

[1] Tewary V K. Mechanics of fiber composites[M]. New York: Wiley, 1978

[2] Kapania R K, Raciti S. Nonlinear vibrations of unsymmetrically laminated beams[J]. AIAA Journal, 1989, 27(2): 201-210

[3] Moore R E. Methods and applications of interval analysis[M]. London: Prentice-Hall Inc, 1979

[4] Alefeld G, Herzberger J. Introductions to interval computations [M]. New York: Academic Press, 1983

[5] Qiu Zhiping, Wang Xiaojun, Friswell M I. Eigenvalue bounds of structures with uncertain-but-bounded parameters[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 282(1-2): 297-312

[6] Qiu Zhiping, Wang Xiaojun. Comparison of dynamic response of structures with uncertain-but-bounded parameters using non-probabilistic interval analysis method and probabilistic approach [J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40 (20): 5423-5439

[7] 邱志平,马一,王晓军. 含不确定参数的复合材料板振动的区间分析法[J]. 北京航空航天大学学报, 2004, 30(7): 682-685

Qiu Zhiping, Ma Yi, Wang Xiaojun. Interval analysis method for vibration of composite laminate with uncertain parameters[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2004, 30(7): 682-685(in Chinese)

[8] 邱志平,王晓军,马一. 结构复固有频率区域的区间摄动法[J]. 北京航空航天大学学报, 2003, 29(5): 406-409

Qiu Zhiping, Wang Xiaojun, Ma Yi. Interval perturbation method for computing regions containing complex natural frequencies of structures[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2003, 29(5): 406-409(in Chinese)

[9] 王晓军,邱志平. 结构振动的鲁棒可靠性[J]. 北京航空航天大学学报, 2003, 29(11): 1006-1010

Wang Xiaojun, Qiu Zhiping. Robust reliability of structural vibration[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2003, 29(11): 1006-1010(in Chinese)

[10] 仝宗凯,王寿梅,邱志平. 不确定初缺陷简支梁非线性屈曲载荷的确定[J]. 北京航空航天大学学报, 2000, 26(4): 424-427

Tong Zongkai, Wang Shoumei, Qiu Zhiping. Determination of non-linear buckling load for simple supported beam with bounded initial imperfection[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2000, 26(4): 424-427(in Chinese)

[11] 仝宗凯,王寿梅,邱志平. 用区间牛顿法跟踪结构的后屈曲路径[J]. 北京航空航天大学学报, 2000, 26(5): 535-538

Tong Zongkai, Wang Shoumei, Qiu Zhiping. Application of nonlinear interval iteration method to post-buckling analysis of structures[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2000, 26(5): 535-538(in Chinese)

(责任编辑:文丽芳)