非对称偏差下质量特性值分布评价

祝 伟 李元生

(中国矿业大学(北京) 管理学院, 北京 100083)

摘 要: 传统的统计过程控制以公差中心为基准研究质量问题,对基本尺寸未给予足够重视,导致公差为非对称偏差时产品质量测度方法缺乏完善性. 对此,以基本尺寸为基准,对非对称偏差下基于正态分布和切段正态分布假设的产品质量水平进行了分析,运用 Taguchi 质量损失函数对两类分布下产品价值的期望进行比较. 结果表明,质量特性值服从切段正态分布的产品质量水平较优,产品价值的期望较高.

关 键 词: 公差分析; 质量控制; 基本尺寸; 正态分布

中图分类号: TG 806; C 931.1

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2006)09-1121-04

Evaluation on distribution of measured characteristic with asymmetric tolerances

Zhu Wei Li Yuansheng

(Management School, China University of Mining &Technology (Beijing), Beijing 100083, China)

Abstract: The quality of a process or product was studied based on the center of the specification interval in the conventional SPC but on target value, which led to inadequate measure of the quality under the condition of asymmetrical tolerances. In terms of this problem, the quality of a process or product was analyzed based on target value when the process was characterized by normal distribution or piecewise normal distribution. Taguchi quality loss function was applied to describe product value. To compare the process- and product-quality for the measured characteristic with the above two distributions, the expected value of product value was given. Results demonstrate that the quality of a process or product for the measured characteristic with piecewise normal distribution is better than that with normal distribution.

Key words: tolerance analysis; quality control; target value; normal distribution

1 问题的提出

在公差理论中,设计时确定的尺寸称为基本尺寸 L 或 l,它是确定偏差的起始尺寸,本文记基本尺寸为 L. 以 L 为基准,依技术标准可得最大极限尺寸 T_U 和最小极限尺寸 T_L. $T=T_U-T_L$ 称为尺寸公差,简称公差. T_U 和 T_L 的平均值 T_M 称为公差中心. 称 $d_U=T_U-L$ 为上偏差,$d_L=T_L-L$ 为下偏差. 显然有 $d_U\geqslant 0$,$d_L\leqslant 0$,$d_U-d_L=T$. 当 $L=T_M$ 时,$d_U+d_L=0$,称为对称偏差;当 $L\neq T_M$ 时,$d_U+d_L\neq 0$,称为非对称偏差.

传统的计量型质量控制以产品质量特性值服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 为前提[1],以该前提为基础的质量技术标准以公差中心 T_M 为基准研究过程能力指数 C_p,当分布中心 μ 与 T_M 偏离时将 C_p 修正为 C_{PK}[2-3]. 产品力求达到的理想尺寸是 L,而不是 T_M. 文献[4]研究以 L 为基准的过程能力指数,研究结果表明:当 μ 对于 T_M 的相对偏离超过 15.33% 时,不存在满足著名的 3σ 原则(产品合格的概率达到 99.73%)的正态分布.

随着生产制造技术的进步,特别是应用先进制造技术实现了对制造过程的实时控制[5]. 针对

收稿日期: 2005-10-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70372064)

作者简介: 祝 伟(1979-),男,江苏丰县人,博士生, wwwpd123@163.com.

产品技术标准的非对称偏差要求,以基本尺寸 L 为基准,能够对大于 L 的部分和小于 L 的部分实施不同的宽严约束,使得质量特性值分布呈现出非对称特征. 文献[6-8]应用非对称的切段正态分布 $N(L,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$ 对该特征下的有关问题进行了研究,本文以之为基础,对 $N(\mu,\sigma^2)$ 和 $N(L,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$ 两类质量分布反映的产品质量水平进行比较分析,并运用 Taguchi 质量损失函数对非对称偏差下不同产品质量分布假设的产品价值期望进行测度.

2 产品质量水平的比较

2.1 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 下的产品质量水平

设总体质量特性值 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$,密度函数为

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1)$$

式中,$-\infty<x<+\infty$;$-\infty<\mu<+\infty$;$\sigma>0$. 设公差 $T=6\sigma$,在非对称偏差下,基本尺寸可表示为

$$L=T_{\mathrm{M}}+k\sigma \quad (2)$$

式中,$-3<k<3$,相应地,技术标准为 $L^{+(3-k)\sigma}_{-(3+k)\sigma}$. 依 3σ 原则,产品合格率为 0.9973.

2.2 切段正态分布 $N(L,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$ 下的产品质量水平

以基本尺寸 L 为基准,针对产品技术标准的非对称偏差要求,对大于 L 的部分和小于 L 的部分实施不同的宽严约束,设该质量特性值 X 服从切段正态分布 $N(L,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$ 密度函数为

$$f(x;L,\sigma_1^2,\sigma_2^2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\dfrac{(x-L)^2}{2\sigma_1^2}\right] & x\leqslant L\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[-\dfrac{(x-L)^2}{2\sigma_2^2}\right] & x>L\end{cases} \quad (3)$$

式中,$-\infty<x<+\infty$;$-\infty<L<+\infty$;$\sigma_1>0$;$\sigma_2>0$.

针对技术标准 $L^{+(3-k)\sigma}_{-(3+k)\sigma}$,服从该分布的参数为

$$\sigma_1=(L-T_{\mathrm{L}})/3=(3+k)\sigma/3 \quad (4)$$

$$\sigma_2=(T_{\mathrm{U}}-L)/3=(3-k)\sigma/3 \quad (5)$$

由切段正态分布性质,依 3σ 原则,质量特性值落在公差下限外和公差上限外的概率均为 0.00135,产品合格率为 0.9973.

2.3 两类分布下产品质量水平比较(以 $k=1$ 为例)

当 $k=1$ 时,产品的技术标准为 $L^{+2\sigma}_{-4\sigma}$. 在产品公差范围内,不同区间代表的质量水平不同,依实际质量控制情形,可取 $T_{\mathrm{L}}>0$,如图 1 所示,区间 $[L-4\sigma/3,L+2\sigma/3]$ 定义为 A 区域,质量特性值 X 落在 A 区域的产品定为 A 级品;区间 $[L-8\sigma/3,L-4\sigma/3)$ 或 $(L+2\sigma/3,L+4\sigma/3]$ 定义为 B 区域,质量特性值 X 落在 B 区域的产品定为 B 级品;区间 $[L-4\sigma,L-8\sigma/3)$ 或 $(L+4\sigma/3,L+2\sigma]$ 定义为 C 区域,质量特性值 X 落在 C 区域的产品定为 C 级品. 显然,A 级品质量优于 B 级品,B 级品质量优于 C 级品.

经计算,当产品质量特性值 X 服从上述正态分布且 μ 与 T_{M} 重合时,产品为 A 级品的概率为 0.5828,B 级品的概率为 0.3596,C 级品的概率为 0.0549;当产品质量特性 X 值服从切段正态分布时,产品为 A 级品的概率为 0.6827,B 级品的概率为 0.2718,C 级品的概率为 0.0428. 当 $k=1$ 时,在两类不同分布下,尽管产品合格率相同,但产品的实际质量水平却明显不同,切段正态分布下的产品质量水平优于正态分布下的产品质量水平. 而当 k 在区间 $(-3,3)$ 变化时,需要引入 Taguchi 质量损失函数对两类分布下的产品质量水平进行定量描述.

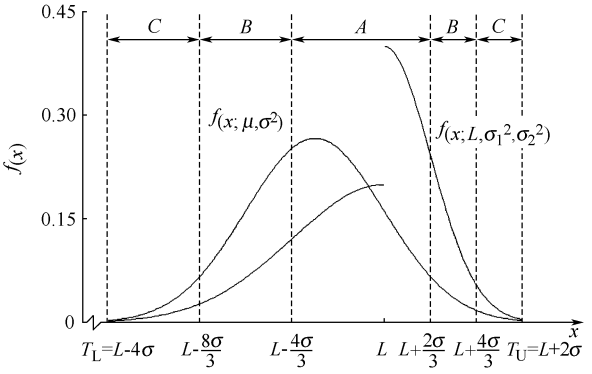


图 1 公差范围内产品质量区域划分及两类分布曲线

3 $T_{\mathrm{L}}<L<T_{\mathrm{U}}$ 时产品价值的测度

3.1 产品价值测度公式

由 Taguchi 质量损失函数,与产品质量相联系的产品价值可表示为[9]

$$W(X)=W_{\mathrm{L}}-R(X-L)^2 \quad (6)$$

式中,R 表示质量损失系数;W_{L} 表示 $X=L$ 时的产品价值. 依技术标准,$X<T_{\mathrm{L}}$ 或 $X>T_{\mathrm{U}}$ 时 $W(X)=0$. 由 $W(X)$ 在 $X=T_{\mathrm{L}}$ 处的连续性,定义 $W(T_{\mathrm{L}})=0$,故当 $T_{\mathrm{L}}<X\leqslant L$ 时 $R=W_{\mathrm{L}}/(L-T_{\mathrm{L}})^2$;类似地,由 $W(X)$ 在 $X=T_{\mathrm{U}}$ 处的连续性,定义 $W(T_{\mathrm{U}})=0$,故当 $L<X<T_{\mathrm{U}}$ 时,$R=W_{\mathrm{L}}/(T_{\mathrm{U}}-L)^2$. 式(6)可化为

$$W(X)=$$

$$\begin{cases} W_{\mathrm{L}} - \dfrac{W_{\mathrm{L}}}{(L-T_{\mathrm{L}})^2}(X-L)^2 & T_{\mathrm{L}} < X \leqslant L \\ W_{\mathrm{L}} - \dfrac{W_{\mathrm{L}}}{(T_{\mathrm{U}}-L)^2}(X-L)^2 & L < X < T_{\mathrm{U}} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{7}$$

3.2 正态分布和切段正态分布下的产品价值期望

正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 下产品价值期望 $E_1[W(X)]$ 为

$$E_1[W(X)] = \int_{T_{\mathrm{L}}}^{L}\left[W_{\mathrm{L}} - \frac{W_{\mathrm{L}}}{(L-T_{\mathrm{L}})^2}(x-L)^2\right]\cdot f(x;\mu,\sigma^2)\,\mathrm{d}x + \int_{L}^{T_{\mathrm{U}}}\left[W_{\mathrm{L}} - \frac{W_{\mathrm{L}}}{(T_{\mathrm{U}}-L)^2}(x-L)^2\right]f(x;\mu,\sigma^2)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

设公差 $T=6\sigma$,依式(2),$\mu=T_{\mathrm{M}}=L-k\sigma$($-3<k<3$).由式(8)可得

$$E_1[W(X)] = g(k)W_{\mathrm{L}} \tag{9}$$

式中,$g(k)$为 k 的函数.

切段正态分布 $N(L,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$ 下产品价值期望记为 $E_2[W(X)]$,表达式为

$$E_2[W(X)] = \int_{T_{\mathrm{L}}}^{L}\left[W_{\mathrm{L}} - \frac{W_{\mathrm{L}}}{(L-T_{\mathrm{L}})^2}(x-L)^2\right]\cdot f(x;L,\sigma_1^2,\sigma_2^2)\,\mathrm{d}x + \int_{L}^{T_{\mathrm{U}}}\left[W_{\mathrm{L}} - \frac{W_{\mathrm{L}}}{(T_{\mathrm{U}}-L)^2}(x-L)^2\right]f(x;L,\sigma_1^2,\sigma_2^2)\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

对式(10)进行数值积分得

$$E_2[W(X)] = 0.8894W_{\mathrm{L}} \tag{11}$$

3.3 两类分布下产品价值期望的比较

式(11)说明非对称偏差技术标准下质量特性值服从切段正态分布的产品价值期望 $E_2[W(X)]$ 为最优产品价值 W_{L} 的常数倍.相比之下,式(9)中的 $g(k)$ 反映产品质量特性值服从正态分布下产品价值期望的变化特征,即反映由分布中心对于基本尺寸的偏离程度变化引起的质量水平的变化,对式(9)进行数值积分得出的结果如表 1 所示.

表 1　正态分布下不同 k 值的产品价值期望 $E_1[W(X)]$

k	$E_1[W(X)]$	k	$E_1[W(X)]$
−2.5	$0.7581W_{\mathrm{L}}$	0.5	$0.8821W_{\mathrm{L}}$
−2	$0.7956W_{\mathrm{L}}$	1	$0.8615W_{\mathrm{L}}$
−1.5	$0.8313W_{\mathrm{L}}$	1.5	$0.8313W_{\mathrm{L}}$
−1	$0.8615W_{\mathrm{L}}$	2	$0.7956W_{\mathrm{L}}$
−0.5	$0.8821W_{\mathrm{L}}$	2.5	$0.7581W_{\mathrm{L}}$
0	$0.8894W_{\mathrm{L}}$		

比较表 1 和式(11)可以得出:

1) 切段正态分布以基本尺寸 L 为基准,在切段正态分布下产品价值的期望并不随 k 值的变化而变化,产品价值的数学期望不变.

2) 正态分布下产品价值期望的变化有两个特点:一是产品价值期望反映正态分布中心 μ 相对于基本尺寸 L 偏离时质量水平的状况,当 μ 对于 L 左偏或右偏相同距离时,产品价值期望值相同;二是随着 k 的绝对值趋于 0(即 μ 与 L 的差距趋于 0),产品价值期望趋于 $0.8894W_{\mathrm{L}}$.

3) 运用 Taguchi 质量损失函数可对两种分布下质量水平给出定量描述. $E_2[W(X)] \geqslant E_1[W(X)]$ 表明当技术标准呈非对称偏差形式时,切段正态分布下产品质量水平优于正态分布下产品质量水平.

3.4 切段正态分布下关于超公差工件的讨论

需要注意的是,在加工过程中,工件的工艺尺寸有可能超出公差范围,当超公差工件仍有足够的加工余量时,通过修改其后续工艺路线及工艺尺寸,仍有可能将其加工成合格品[10]. 在非对称偏差情形下,对于质量特性值服从切段正态分布 $N(L,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$ 的工件,由于分布的非对称性,加工者对方差小的一侧的关注程度往往高于方差大的一侧. 因此,方差大的一侧形成超公差工件的可能性要大一些. 对于这类超公差工件是否需要修改后续工艺路线及工艺尺寸应结合产品价值和生产成本等因素考虑.

4 $L=T_{\mathrm{U}}$ 或 $L=T_{\mathrm{L}}$ 时质量水平的测度

当 $L=T_{\mathrm{U}}$ 或 $L=T_{\mathrm{L}}$ 时,若仍以基本尺寸 L 为基准,必然导致产品不合格率大于 50%. 因此需要寻求新的基准.

对于 $L=T_{\mathrm{U}}$ 的情形,仍设公差 $T=6\sigma$,取 $\mu_0=L-a\sigma$,a 为变动系数,$a>0$ 且 a 较小,对质量特性值 X 大于 μ_0 的部分和小于 μ_0 的部分实施不同的宽严约束,使得质量特性值分布呈现出非对称特征,进一步假设 X 服从切段正态分布 $N(\mu_0,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$,其中

$$\sigma_1 = (\mu_0 - T_{\mathrm{L}})/3 = (6-a)\sigma/3 \tag{12}$$

$$\sigma_2 = (T_{\mathrm{U}} - \mu_0)/3 = a\sigma/3 \tag{13}$$

分布的密度函数为

$$f(x;\mu_0,\sigma_1^2,\sigma_2^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\dfrac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_1^2}\right] & x \leqslant \mu_0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[-\dfrac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_2^2}\right] & x > \mu_0 \end{cases} \tag{14}$$

当 $L=T_U$ 时,产品价值函数表示为

$$W(X)=\begin{cases}W_L-\dfrac{W_L}{(L-T_L)^2}(X-L)^2 & T_L\leqslant X\leqslant L\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \tag{15}$$

计算产品价值期望为

$$E[W(X)]=\int_{T_L}^{L}\left[W_L-\frac{W_L}{(L-T_L)^2}(x-L)^2\right]f(x)\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

式中,$f(x)=f(x;\mu_0,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$. 对式(16)积分得

$$E[W(X)]=(0.9434-0.0259a-0.0161a^2)W_L \tag{17}$$

式(17)要求 $a>0$,因为 $\mu_0=L-a\sigma$,所以 μ_0 相对于 L 的位置决定 $E[W(X)]$ 的大小. a 越小,μ_0 越接近 L,产品价值的期望越高,同时产品的加工工艺要求越高,生产成本将上升. 反之,当 μ_0 与 L 的距离越远,即 a 越大时,产品价值的期望越低,产品加工工艺的要求降低,生产成本降低. 因此 μ_0 的选取必须综合考虑生产成本的变化与产品价值的变化两方面的影响.

类似地,对于 $L=T_L$ 的情形,取 $\mu_0=L+a\sigma$,$a>0$且 a 较小,上述结果同样成立.

5 结 论

1) 在 3σ 原则下,切段正态分布下的质量水平要优于正态分布下的质量水平;

2) 在 3σ 原则下,当 $T_L<L<T_U$ 时,应用 Taguchi 质量损失函数计算得出,切段正态分布下产品价值的期望不小于正态分布下产品价值的期望;

3) 当 $L=T_U$ 或 $L=T_L$ 时,以 L 为基准进行产品质量水平的测度是不合适的,必须选取新的基准 μ_0.

参考文献 (References)

[1] 王梓坤. 概率论基础及其应用[M]. 北京:科学出版社,1979:57-59
Wang Zikun. Probability base and application[M]. Beijing: Science Press, 1979:57-59(in Chinese)

[2] ISO 8258:1991, Shewhart Control Charts[S]

[3] GB/T 4091-2001, 常规控制图[S]
GB/T 4091-2001, Shewhart Control Charts [S]

[4] 李元生,孙静. 广义过程能力指数[J]. 科学技术与工程,2002, 2(5): 70-71
Li Yuansheng, Sun Jing. Process capability index in naive sense [J]. Science Technology and Engineering, 2002, 2(5): 70-71(in Chinese)

[5] 杨叔子,吴波. 先进制造技术及其发展趋势[J]. 机械工程学报,2003, 39(10): 73-78
Yang Shuzi, Wu Bo. Trends in the development of advanced manufacturing technology[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2003, 39(10): 73-78(in Chinese)

[6] 李元生,孙静,祝伟. 一类基于非对称偏差的过程能力指数[J]. 数理统计与管理,2005, 24(2): 35-39
Li Yuansheng, Sun Jing, Zhu Wei. A class of process capability indices based on asymmetric tolerances[J]. Application of Statistics and Management, 2005, 24(2): 35-39(in Chinese)

[7] Zhu Wei, Li Yuansheng. Quality characteristics distribution and its simulation based on asymmetric tolerances[J]. Journal of China University Mining & Technology (English Edition), 2003, 13(2): 223-225

[8] Zhu Wei, Li Yuansheng and Liu Feng. Extensive Taguchi's quality loss function based on asymmetric tolerances[J]. Journal of China University Mining and Technology (English Edition), 2004, 14(2): 252-254

[9] Johnson T. The relation of C_{pm} to squared error loss[J]. Journal of Quality Technology, 1992, 24(4):211-215

[10] 陈志同. 动态工艺尺寸设计方法研究[J]. 北京航空航天大学学报,1999, 25(1): 68-71
Chen Zhitong. Research planning approach of dynamic technology dimension[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1999, 25(1): 68-71(in Chinese)

(责任编辑:张 婧)