DOI:10.13700/j.bh.1001-5965.2006.04.009
2006年 4月 北京航空航天大学学报 April 2006
第32卷 第4期 Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics Vol.32 No.4

正弦振动条件下原子钟的频率稳定度分析

曹 昱 吕善伟 冯克明

(北京航空航天大学 电子信息工程学院,北京 100083) (北京无线电计量测试研究所,北京 100854)

党 群

(北京航空航天大学 电子信息工程学院,北京 100083)

摘 要:振动对原子钟(原子频标)的影响可分为对原子谐振的影响、对伺服环路的影响和对晶体振荡器(晶振)的影响.在振动频率范围内,晶振的输出相位噪声只与晶振的加速度灵敏度、峰值加速度和振动频率有关,与静态相位噪声没有关系,但在振动频率范围之外,晶振的输出相位噪声就是其静态相位噪声.由原子钟的稳定性传递到输出晶振的频率稳定度公式,就可通过伺服环路把晶振的振动分析融入到原子钟的振动分析之中.利用相位噪声转换为阿仑方差的积分公式,根据留数定理推导出直接计算阿仑方差的解析表达式,得到增加伺服环路带宽可以有效抑制振动对原子钟频率稳定度影响的结论;分析了通过减振和选择加速度灵敏度较小的晶振这2种方法改善原子钟振动性能的问题.

关 键 词:原子钟;频率稳定度;带宽;相位噪声;阿仑方差;振动

中图分类号:TM 935.11

文献标识码:A **文 章 编 号**:1001-5965(2006)04-0407-05

Analysis of frequency stability of atomic clock under sinusoidal vibration

Cao Yu Lü Shanwei

(School of Electronics and Information Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Feng Keming

(Institute of Radio Metrology and Measurement, Beijing 100854, China)

Dang Qun

(School of Electronics and Information Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Vibration effects on the atomic clock (atomic frequency standard) could be divided into three parts: atomic resonance effects, crystal oscillator effects and servo-loop effects. Within the vibration frequency, the phase noise of crystal oscillator under sinusoidal vibration was only related to acceleration sensitivity, peak acceleration and vibration frequency, and it has no concern with the phase noise in the static state. But above the vibration frequency, the phase noise of crystal oscillator was the same with the value in the static state. By the frequency stability transfer formulas from the atomic clock to crystal oscillator, vibration effects on crystal oscillator was combined with vibration effects on the atomic clock through servo loop. For computing Allan variance directly from integral equation of phase noise, the several analysis formulas were derived by residue theorem. With increased servo loop bandwidth, vibration effects on frequency stability of the atomic clock can be controlled effectively. Two other methods are analyzed to improve the performance of the atomic clock under vibration: reducing vibration frequency and choosing crystal oscillator with smaller acceleration sensitivity.

Key words: atomic clock; frequency stability; bandwidth; phase noise; Allan variance; vibration

收稿日期:2005-03-03

作者简介:曹 昱(1972—),男,黑龙江大庆人,博士生,cayu@sohu.com.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

原子频标(简称为频标)是性能优良的时频标准,它在时间计量领域里又称为原子钟.原子钟的重要应用之一是做为星载钟或搬运钟.卫星有效载荷是导航定位卫星的核心部分,而星载原子钟又是整个有效载荷的心脏,一个卫星导航定位系统的精度在很大程度上取决于星载原子钟的技术水平.无论是星载钟还是搬运钟,振动对原子频标频率稳定度甚至是使用寿命的影响都是不可忽略的因素,文献[1]认为振动是所有环境因素中影响最严重的.

在星载钟和搬运钟使用过程中,由于工作条件和其它各种因素的影响,振动情况非常复杂,但在某些条件下振动具有周期性或类周期性,可近似看作正弦函数、余弦函数、方波函数、三角函数、锯齿波函数中的一种或几种的叠加,只是它们的振动频率和振动强度各不相同.为使问题尽量简化以利于分析,将振动简化为正弦振动进行研究.

原子频标一般是由物理部分、电路部分和晶振组成,所以振动对频标的影响可以分为对原子谐振的影响、对伺服环路的影响、对晶振的影响3个部分.因为原子的超精细结构能级之间的跃迁频率对振动等外界因素不敏感,所以只须分析振动对伺服环路和晶振的影响.

国内对原子频标的频率稳定度受振动影响还未见相关文献报导,国外的文献则主要集中在频标的振动测试上,理论分析较少[2,3],但对晶振受振动影响研究却一直在进行[4,5],这是因为石英晶体受到力、振动、加速度等作用时其谐振频率会无滞后地随所加力的大小线性地变化,这一现象称为石英晶体频率的力频效应(或称为压频效应、力敏效应).在此基础上,通过伺服环路就可以把晶振的振动分析融入到频标的振动分析之中.

频率稳定度有2种表征方法:频域表征和时域表征,即相位噪声和阿仑方差,相位噪声用相对频率起伏谱密度或单边带相位噪声表征.本文分别用2种表征的频率稳定度进行分析.

原子频标按照锁定方式的不同分为主动型和被动型2种,文中以被动型频标为例进行分析,主动型频标分析方法与之相同,不再赘述.

1 正弦振动条件下晶振的相位噪声

在振动条件下,晶振的输出频率随外界振动加速度发生变化,这种变化表现为振动加速度的变化频率对晶振输出信号进行边带调制,其调制度由晶振的加速度灵敏度和振动量级决定.

假定振动为正弦振动,加速度为

$$a = A\cos(2\pi f_v t) \tag{1}$$

式中 A 为峰值加速度;f_v 为振动频率;t 为时间.

在调制指数小于0.1时,大部分功率集中在载频上,少量集中在第一边带上,高阶边带可以忽略不计.由振动引起的单边带相位噪声$\mathcal{L}(f)$[6]为

$$\mathcal{L}(f) = \left(\frac{rAf_0}{2f_v}\right)^2 \tag{2}$$

式中 r 为晶振的加速度灵敏度;f_0 为晶振的输出频率(即为载频);f 为偏离载频频率.

在小调制指数时,$\mathcal{L}(f)$和相位起伏谱密度$S_\phi(f)$的关系为

$$\mathcal{L}(f) = S_\phi/2 \tag{3}$$

所以振动情况下晶振的相对频率起伏谱密度$S_y^v(f)$(上角标v表示振动)为

$$S_y^v(f) = \frac{f^2}{f_0^2}S_\phi(f) = \frac{(rAf)^2}{2f_v^2} \tag{4}$$

可以看出,在振动频率范围内,晶振的输出相位噪声只与r,A和f_v有关,与静态相位噪声没有关系.但在振动频率范围之外,晶振的输出相位噪声就是其静态相位噪声.所以晶振的相对频率起伏谱密度可表示为

$$S_y^{cr}(f) = \begin{cases} S_y^o(f) & f > f_v \\ S_y^v(f) & f \leqslant f_v \end{cases} \tag{5}$$

式中 上角标cr表示为晶振;$S_y^o(f)$为静态条件下晶振相对频率起伏谱密度;上角标o表示静态.

2 正弦振动条件下频标的相位噪声

对于被动型原子频标,频标物理部分的相对频率起伏谱密度$S_y^r(f)$(上角标r表示频标物理部分)通过伺服环路转换到晶振,使得晶振自由振荡时$S_y^{cr}(f)$最终被锁定为$S_y^L(f)$(上角标L表示被锁定的晶振)[7]:

$$S_y^L(f) = \frac{(f/f_n)^2}{1+(f/f_n)^2}S_y^{cr}(f) + \frac{1}{1+(f/f_n)^2}S_y^r(f) \tag{6}$$

式中 f_n是伺服环路带宽.

把(4)式、(5)式代入到(6)式,就可把晶振的振动分析融入到频标的振动分析之中,至此得到了振动情况下被动型原子频标的相对频率起伏谱密度.对于静止状态下晶振的谱密度和被动型铷原子频标的谱密度,文中计算引用表达式[7]:

$$S_y^o(f) = 7.9\times10^{-22}/f + 5.2\times10^{-26}f^2$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$S_y^r(f)=2.6\times10^{-23}+9.4\times10^{-26}/f$$

由(2)～(4)式可得,被原子频标锁定晶振的 $\mathfrak{L}^L(f)$ 为

$$\mathfrak{L}^L(f)=S_y^L(f)f_0^2/(2f^2) \tag{7}$$

由(6)式、(7)式可知,原子频标输出的相位噪声不仅与晶振本身有关,而且与伺服环路以及各种干扰有关.伺服环路对晶振噪声而言,相当于一个高通滤波器,则晶振本身的噪声称为高通型噪声;但相对于原子频标物理部分的噪声而言,则为一低通滤波器,且其截止频率值即为 f_n,此噪声称为低通型噪声.为有效地滤除低通型噪声,伺服环路的带宽越窄越好;反之,为滤除高通型噪声,则要求伺服环路带宽越宽越好,两者是相互矛盾的;从要求输出相位噪声最小的角度出发,存在着最佳伺服环路带宽选择问题.

由(5)式、(6)式可以得到振动噪声值在环路中以高通型噪声出现,所以降低振动噪声的办法之一就是增加伺服环路带宽 f_n.

假定 $f_0=10\ \mathrm{MHz}$, $r=3\times10^{-10}/g$, $A=5g$, $f_v=10\ \mathrm{Hz}$.根据(4)～(6)式代入到(7)式的结果,可得到 $\mathfrak{L}^L(f)$ 与 f_n 的关系.分别计算 f_n 为 20 Hz, 100 Hz 时原子频标的相位噪声,如图 1 所示,从图中可以看出,f_n 越大,相位噪声越小.

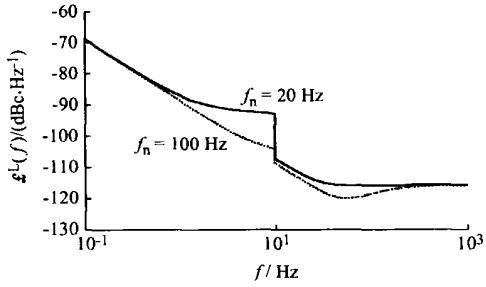


图 1　不同 f_n 下的 $\mathfrak{L}^L(f)$

3　正弦振动条件下频标的阿仑方差

频率稳定度的时域表征阿仑方差可通过下面的积分方程获得[7]:

$$\sigma_y^2(\tau)=2\int_0^\infty S_y^L(f)\frac{\sin^4(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)^2}\cdot\frac{1}{1+\left(f/f_c\right)^2}\mathrm{d}f \tag{8}$$

式中　f_c 为阿仑方差测量仪器内单极点低通滤波器的截止频率;τ 为取样时间.

把(4)～(6)式代入(8)式,就可求得正弦振动条件下被动型频标的阿仑方差.求解(8)式需要计算下面的积分方程:

$$A(\tau)=\int_0^\infty\frac{f^m}{1+(f/f_n)^2}\cdot\frac{\sin^4(\pi\tau f)}{1+(f/f_c)^2}\mathrm{d}f \tag{9}$$

其中　$m=-3,-2,-1,2.$

以 $m=2$ 为例,利用留数定理计算.

$$A(\tau)=f_n^2f_c^2\int_0^\infty\frac{f^2}{(f^2+f_n^2)(f^2+f_c^2)}\cdot\sin^4(\pi\tau f)\mathrm{d}f=A_1+A_2+A_3$$

其中 $A_1=\frac{3}{8}f_n^2f_c^2\int_0^\infty\frac{f^2}{(f^2+f_n^2)(f^2+f_c^2)}\mathrm{d}f$

$$A_2=-\frac{f_n^2f_c^2}{2}\int_0^\infty\frac{f^2\cos(2\pi\tau f)}{(f^2+f_n^2)(f^2+f_c^2)}\mathrm{d}f$$

$$A_3=\frac{f_n^2f_c^2}{8}\int_0^\infty\frac{f^2\cos(4\pi\tau f)}{(f^2+f_n^2)(f^2+f_c^2)}\mathrm{d}f$$

由于 A_1, A_2 和 A_3 3 个被积函数只在上半平面内有 2 个奇点:$f_n\mathrm{i}$ 和 $f_c\mathrm{i}$,且被积函数为偶函数,由留数定理有:

$$A_1=\frac{3\pi f_n^2f_c^2(f_c-f_n)}{16(f_c^2-f_n^2)}$$

$$A_2=\frac{\pi f_n^2f_c^2}{4(f_c^2-f_n^2)}\left(f_n\mathrm{e}^{-2\pi\tau f_n}-f_n\mathrm{e}^{-2\pi\tau f_c}\right)$$

$$A_3=\frac{\pi f_n^2f_c^2}{16(f_c^2-f_n^2)}\left(f_c\mathrm{e}^{-4\pi\tau f_c}-f_n\mathrm{e}^{-4\pi\tau f_n}\right)$$

所以当 $m=2$ 时有:

$$A(\tau)=\frac{\pi f_c^2f_n^2}{16(f_c^2-f_n^2)}\left[f_c(\mathrm{e}^{-4\pi\tau f_c}-4\mathrm{e}^{-2\pi\tau f_c}+3)-f_n(\mathrm{e}^{-4\pi\tau f_n}-4\mathrm{e}^{-2\pi\tau f_n}+3)\right]$$

m 为 −3, −2 和 −1 时(9)式的求解与上例类似,不再一一推导,本文给出最后的结果:

当 $m=-3$ 时:

$$A(\tau)=(\pi\tau)^2\ln2-\frac{1}{8f_n^2}[1.038+3\ln(2\pi\tau f_n)]+\frac{1}{f_n^2}\left\{\frac{3}{16}\ln2+\frac{1}{4}[\mathrm{e}^{2\pi\tau f_n}\mathrm{Ei}(-2\pi\tau f_n)+\mathrm{e}^{-2\pi\tau f_n}\mathrm{Ei}(2\pi\tau f_n)]-\frac{1}{16}[\mathrm{e}^{4\pi\tau f_n}\mathrm{Ei}(-4\pi\tau f_n)+\mathrm{e}^{-4\pi\tau f_n}\mathrm{Ei}(4\pi\tau f_n)]\right\}$$

当 $m=-2$ 时:

$$A(\tau)=\frac{\pi^2\tau}{4}-\frac{\pi}{16f_n}[\mathrm{e}^{-4\pi\tau f_n}-4\mathrm{e}^{-2\pi\tau f_n}+3]$$

当 $m=-1$ 时:

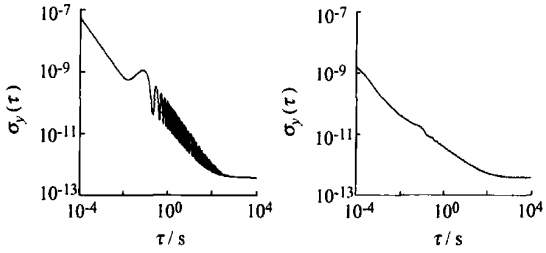
$$A(\tau)=\frac{1}{8}[1.038+3\ln(2\pi\tau f_n)]-\left\{\frac{3}{16}\ln2+\frac{1}{4}[\mathrm{e}^{2\pi\tau f_n}\mathrm{Ei}(-2\pi\tau f_n)+\mathrm{e}^{-2\pi\tau f_n}\mathrm{Ei}(2\pi\tau f_n)]-\frac{1}{16}[\mathrm{e}^{4\pi\tau f_n}\mathrm{Ei}(-4\pi\tau f_n)+\mathrm{e}^{-4\pi\tau f_n}\mathrm{Ei}(4\pi\tau f_n)]\right\}$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

各式中的 Ei(*)为指数积分.

上述计算公式的推导结果对计算静态条件下时域阿仑方差提供了方便、快捷的帮助,为振动状态下阿仑方差的计算提供了条件.

当 f_v 为 5 Hz,阿仑方差测量仪器内单极点低通滤波器的 f_c 为 1 kHz 时,由(8)式计算的正弦振动状态下阿仑方差结果如图 2 所示,图 2a、图 2b 分别代表 f_n 为 1 Hz,500 Hz 时,阿仑方差受正弦振动影响的曲线.



a $f_n=1$ Hz　　b $f_n=500$ Hz

图 2　振动状态下的阿仑方差

从图 2 可以看出,f_n 越大,阿仑方差受振动的影响就越小.这一结果与正弦振动条件下被动型频标的相位噪声所受伺服环路带宽的影响是一致的.

4　降低振动噪声的其它措施

前面讨论了增加 f_n 可以抑制振动对原子频标频率稳定度的影响,但并不能无限制地增加伺服环路带宽.在某些情况下,增加伺服环路带宽会使静态条件下的原子频标的相位噪声变差,如图 3 所示.因此,原子频标的伺服环路带宽的选择需要在振动和静止条件下折中考虑.

在振动环境下,降低相位噪声的主要措施应是减振.减振的目的是使振源与频标隔离,以此来提高频标的抗振动性能.图 4 为 f_n 为 500 Hz,f_c 为 1 kHz,f_v 分别为 5 Hz 和 50 Hz 时的阿仑方差,从图 4 可以看出,振动频率越低,振动对频标性能的影响就越小.

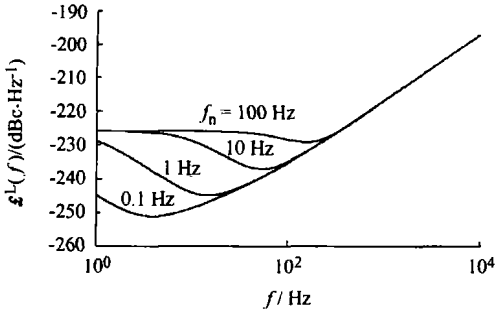


图 3　某被动型铷原子频标静止状态下 $\mathcal{L}(f)$ 随 f_n 变化曲线

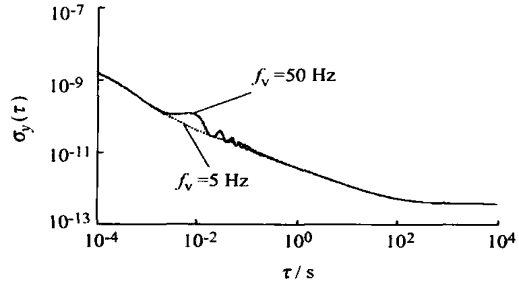


图 4　不同振动频率 f_v 下的阿仑方差

由于石英晶体具有力频效应,所以在原子频标的设计过程中,应选择加速度灵敏度较小的晶振或者在结构设计时使振动加速度尽量垂直于晶振的加速度灵敏度以降低振动对晶振的干扰.图 5 为 r 分别为 $3\times10^{-9}/g$ 和 $3\times10^{-10}/g$,f_n 为 500 Hz,f_v 为 5 Hz,f_c 为 1 kHz 时的阿仑方差.从图中可以看出,r 越低,频标所受振动影响就越小.

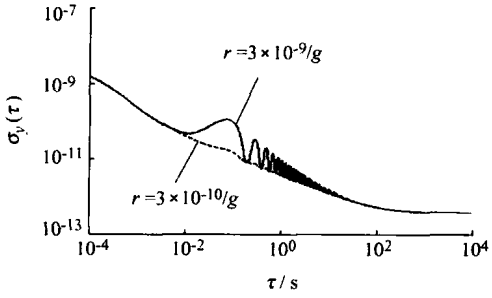


图 5　不同 r 时的阿仑方差

5　结　论

从以上的分析可以看到,当适当增加伺服环路带宽、采用合理的减振措施并使用加速度灵敏度较小的晶振后,被动型原子频标的相位噪声和阿仑方差可以控制在要求的指标内,为频标的实际应用提供了依据.

本文分析了正弦振动条件下被动型原子频标的频率稳定度,分别计算了正弦振动条件下原子频标的相位噪声与振动频率和环路带宽、阿仑方差与环路带宽的关系,得到增加伺服环路带宽可以有效抑制振动对原子频标频率稳定度的影响的结论,并对伺服环路带宽的选择进行了探讨,讨论了通过减振和选择加速度灵敏度较小的晶振改善频标振动性能的问题,为原子频标在振动条件下应用的可能性提供了理论依据,为原子频标在更多领域中的应用提供了参考.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

参考文献 (References)

[1] Stephen A N, Joseph W. Satellite application of a rubidium frequency standard[A]. IEEE Proc 28th Annual Frequency Control Symposium[C], 1974.401～405

[2] Stephen R C, Avinoam S, Michele J D, *et al*. Modification made to a COTS Rb STD for use under stressed operating conditions[A]. IEEE International Frequency Control Symposium[C], 1996.526～530

[3] Stockwell P, Mcneilage C, Green D M, *et al*. 3_axis vibration performance of a compact sapphire microwave oscillator[A]. IEEE International Frequency Control Symposium[C], 2001.695～698

[4] Labruzzo G, Polidoro P, Driscoll M. A VHF, quartz crystal oscillator exhibiting exceptional vibration immunity[A]. IEEE International Frequency Control Symposium[C], 1996.473～480

[5] Galliou S, Mourey M, Marionnet F. An oscillator for space[A]. IEEE International Frequency Control Symposium and PDA Exhibition Joinly with the 17th European Frequency and Time Forum[C], 2003.430～434

[6] Filler R L. The acceleration sensitivity of quartz crystal oscillators: a review[J]. IEEE Trans on Ultrasonics, Ferroelectronics and Frequency Control, 1988, 35(3):297～305

[7] Vanier J, Tetu M. Transfer of frequency stability from an atomic frequency reference to a quartz crystal oscillator[A]. IEEE International Frequency Control Symposium[C], 1978.520～526

(上接第 376 页)

以某一后掠机翼为例的颤振计算结果表明,应用 Volterra 级数辨识得到的非定常气动力模型能够反映一定的跨音速气动特性,其结果与 CFD-CSD 的计算结果吻合很好.该方法得到的跨音速气动弹性状态空间模型阶数低,精度高,适合于气动伺服弹性的分析与综合.

值得提出的是,本研究是基于弱非线性的跨音速小扰动假设.对于某些强非线性的非定常气动力问题,需要采用二阶甚至高阶的 Volterra 级数,这将在以后进一步研究.

致谢　本文在非定常气动力响应计算方面得到了南京航空航天大学陆志良教授的帮助,在此表示感谢.

参考文献 (References)

[1] 管　德. 飞机气动弹性力学手册[M]. 北京: 航空工业出版社,1994
Guan De. Aircraft aeroelasticity handbook[M]. Beijing: Aeronautical Industry Press, 1994 (in Chinese)

[2] Rodden W P, John E H. MSC/NASTRAN aeroelastic analysis user's guide[M]. The MacNeal-Schwendler Corporation, 1994

[3] Batina J T. Efficient algorithm for solution of the unsteady transonic small-disturbance equation[J]. Journal of Aircraft, 1988, 25(7): 598～605

[4] Stephens C H, Arena A S, Gupta K K. CFD-Based aeroservoelastic predictions with comparisons to benchmark experimental data[R]. AIAA paper-99-0766, 1999

[5] Kreiselmaier E, Laschka B. Small disturbance euler equations: efficient and accurate tool for unsteady load prediction[J]. Journal of Aircraft, 2000, 37(5):770～778

[6] Silva W A. A methodology for using nonlinear aerodynamics in aeroservoelastic analysis and design[R]. AIAA paper-91-1110, 1991

[7] Raveh D E. Reduced-order models for nonliear unsteady aerodynamics[J]. AIAA Journal, 2001, 39(8): 1417～1429

[8] Rugh W J. Nonliear system theory: the Volterra-Wiener approach [M]. The Johns Hopkins University Press, 1981

[9] Tiffang S H, Karpel M. Aeroservoelastic modeling and applications using minimum-state approximations of the unsteady aerodynamics [R]. AIAA paper-89-1188, 1989

[10] 陆志良, 郭同庆, 管　德. 跨音速颤振计算方法研究 [J]. 航空学报, 2004, 25(4): 214～217
Lu Zhiliang, Guo Tongqing, Guan De. A study of calculation method for transonic flutter[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2004, 25(4): 214～217(in Chinese)

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net