神经元耦合系统同步条件的几点注记

王海侠 陆启韶

(北京航空航天大学 理学院, 北京 100083)

摘 要: 研究了 2 个双向电突触耦合的完全相同的 Hindmarsh-Rose 神经元模型的完全同步问题. 电突触耦合是神经元之间用于通讯的主要方式之一,它的最大功能是使神经元集群发生同步放电活动. 以往对于耦合神经系统同步的研究,大多是利用数值方法,缺乏确凿的理论依据,对于多个神经元耦合的情形,也没有有效的方法. 提出了 2 种判断完全同步的新方法——李雅普诺夫函数法和模式分解法,与传统的条件李雅普诺夫指数方法只能给出完全同步发生的必要条件相比,得到同步发生的充要条件和充分条件,并给出严格的理论证明. 方法可应用到多个振子耦合和非对称耦合的系统中. 计算机数值模拟对方法的有效性进行了验证.

关 键 词: 电耦合; 完全同步; 李雅普诺夫函数法; 模式分解法

中图分类号: O 415.5

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2006)03-0320-04

Some notes on complete synchronization of the coupled neurons

Wang Haixia Lu Qishao

(School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Complete synchronization of two mutually coupled identical chaotic Hindmarsh-Rose neurons model with gap junction was studied. Gap junction is also called electrical coupling, it acts as one of the main communications between neurons in nervous systems, its most important role is to make a large ensembles of neurons emit synchronous firing rhythm patterns. The traditional method to investigate complete synchronization was using numerical simulations, such as the conditional Lyapunov exponents, but it was lack of theoretical foundation and can only offer us a necessary condition to guarantee the occurrence of complete synchronization. Based on the conditional Lyapunov exponents method, synchronization of more coupled neurons is hard to be studied. So two new methods of Lyapunov function method and mode decomposition method here was introduced, and if and only if condition and the sufficient condition will be given. These methods are efficient to deal with more coupled neurons and nonsymmetrical coupling schemes, the validity of them was tested by numerical simulation.

Key words: electrical coupling; complete synchronization; Lyapunov function method; mode decomposition method

自 1673 年惠更斯在实验中观察到 2 个钟摆始终保持反相同步以来,同步在许多领域陆续被发现[1]. 早期的同步研究主要是针对周期系统,20 世纪后半叶,随着混沌运动的出现,对同步的研究才拓展到耦合混沌系统. 迄今为止,人们已发现了完全同步、相位同步、滞后同步、广义同步等不同类型和层次的同步现象[1~2]. 近几年来,混沌同步的研究越来越受到人们的重视.

混沌同步作为重要的研究课题,不仅在非线性科学中引起人们的关注,而且在保密通讯、控制

收稿日期: 2005-06-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10432010,10572011)

作者简介: 王海侠(1978-),女,江苏徐州人,博士生, wang_haixia@163.com.

理论、人工神经网络等领域发挥着重要的作用[3].

本文研究了 2 个完全相同的电耦合 HR (Hindmarsh-Rose)神经元模型的完全同步问题. 所谓完全同步即是对于 2 个或多个完全相同的耦合振子而言,当时间充分长时,振子的所有状态变量保持一致,即各自的轨道完全重合. 判断完全同步最常用的方法是利用条件李雅普诺夫指数[4],当所有的条件李雅普诺夫指数为负数时,完全同步现象发生. 因为这个方法的实施借助于数值模拟,所以理论依据不充分且带有很大的近似性. 鉴于此,本文提出 2 种新的方法,从理论上严格地推导出完全同步发生的充要和充分条件,并且将数值模拟和理论结果相结合,说明方法的有效性.

1　模型的提出和理论分析

考虑 2 个相同的 HR 神经元双向耦合的情况,设系统的动力学方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= y_{1,2} - ax_{1,2}^3 + bx_{1,2}^2 - \\ &\quad z_{1,2} + I + \sigma(x_{2,1} - x_{1,2}) \\ \dot{y}_{1,2} &= c - \hat{d}x_{1,2}^2 - y_{1,2} \\ \dot{z}_{1,2} &= r[s(x_{1,2} + \chi_0) - z_{1,2}] \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中,下标 1,2 分别表示 2 个神经元;$\sigma \geqslant 0$ 代表耦合强度. 式(1)中参数取为 $a=1, b=3, c=1, \hat{d}=5, s=4, r=0.006, I=3, \chi_0=1.6$. 此时单个神经元($\sigma=0$)做混沌运动(见图 1),并且轨道始终位于有界区域内.

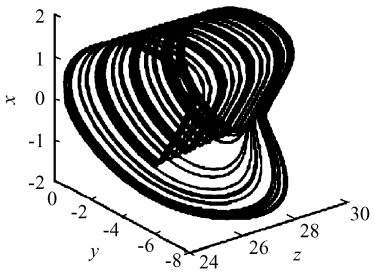


图 1　单个神经元运动的混沌轨道

若 $t \to \infty$ 时,$|x_1-x_2|, |y_1-y_2|, |z_1-z_2|$ 都趋于 0,则 2 个神经元达到完全同步,等价地,下面的同步流形 $\boldsymbol{M}$ 稳定.

$$\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}\}$$

其中 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 满足式(1),且

$$\boldsymbol{X}_1 = [x_1 \quad y_1 \quad z_1]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{X}_2 = [x_2 \quad y_2 \quad z_2]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{X} = [x \quad y \quad z]^{\mathrm{T}}$$

x, y, z 满足方程:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y - ax^3 + bx^2 - z + I \\ \dot{y} &= c - \hat{d}x^2 - y \\ \dot{z} &= r[s(x + \chi_0) - z] \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

2　方法介绍

2.1　李雅普诺夫函数法

令 $e_1 = x_1 - x_2, e_2 = y_1 - y_2, e_3 = z_1 - z_2$. 并代入到式(1),可得如下微分方程组:

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 + [b(x_1 + x_2) - a(x_1^2 + \\ &\quad x_1x_2 + x_2^2) - 2\sigma]e_1 - e_3 \\ \dot{e}_2 &= -\hat{d}(x_1 + x_2)e_1 - e_2 \\ \dot{e}_3 &= rse_1 - re_3 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

同步流形 $\boldsymbol{M}$ 的稳定性等价于误差方程式(3)的零解的稳定性. 类似于参考文献[5]建立李雅普诺夫函数:

$$L(t) = e_1^2/2 + 6e_2^2/25 + 6e_3^2/8r$$

$L(t)$ 沿着式(3)的全导数为

$$\mathrm{d}L/\mathrm{d}t = e_1\dot{e}_1 + 12e_2\dot{e}_2/25 + e_3\dot{e}_3/4r =$$
$$-[2\sigma - x_1x_2 - (x_1 + x_2)/2 - 2(x_1 + x_2)^2 -$$
$$25/48]e_1^2 - [60e_1(x_1 + x_2) -$$
$$25e_1 + 24e_2]^2/1200 - e_3^2/4$$

记　　$\psi = 2\sigma - x_1x_2 - (x_1 + x_2)/2 -$
$$2(x_1 + x_2)^2 - 25/48$$

要得到完全同步的条件首先要证明式(1)的有界性.

根据参考文献[6]中的定义 4 和命题 5 知存在正定函数 $V(x_i, y_i, z_i)\ (i=1,2)$ 和有界球域外的非负函数 $H(x_i, y_i, z_i)\ (i=1,2)$ 使得以下不等式成立:

$$V(x_1(t), y_1(t), z_1(t)) -$$
$$V(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) \leqslant$$
$$\int_0^t [x_1(s)\sigma(x_2(s) - x_1(s)) -$$
$$H(x_1(s), y_1(s), z_1(s))]\mathrm{d}s \tag{4}$$
$$V(x_2(t), y_2(t), z_2(t)) -$$
$$V(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) \leqslant$$
$$\int_0^t [x_2(s)\sigma(x_1(s) - x_2(s)) -$$
$$H(x_2(s), y_2(s), z_2(s))]\mathrm{d}s \tag{5}$$

若令

$$W(x, y, z) = V(x_1, y_1, z_1) + V(x_2, y_2, z_2)$$

显然 W 正定. 利用式(4),式(5)得到:

$$W(x(t), y(t), z(t)) - W(x(0), y(0), z(0)) \leqslant$$
$$\int_0^t [\sigma(x_1(s) - x_2(s))^2 + (H(x_1(s), y_1(s),$$
$$z_1(s)) + H(x_2(s), y_2(s), z_2(s))]\mathrm{d}s \tag{6}$$

由于 H 在有界球域外是半正定的,所以存在 $\rho_1,\rho_2>0$,当 $\|(x_{1,2},y_{1,2},z_{1,2})\|\geqslant\rho_{1,2}$ 时,有 $H(x_{1,2},y_{1,2},z_{1,2})\geqslant 0$ 成立. 再取 $\rho=\min(\rho_1,\rho_2)$,得到当 $\|(x_{1,2},y_{1,2},z_{1,2})\|\geqslant\rho$ 时,$H(x_{1,2},y_{1,2},z_{1,2})\geqslant 0$ 成立. 于是式(6)变为

$$W(x(t),y(t),z(t))-W(x(0),y(0),z(0))\leqslant 0$$

由稳定性理论知 $W(x(t),y(t),z(t))$ 对一切 $t\geqslant 0$ 在有界球域外是 t 的非增函数. 所以,任何轨线将随着 t 的增加而进入到有界区域内. 因此说明了式(1)解的有界性. 由此得到以下结论:若

$$\sigma>\max\left\{\frac{1}{2}x_1x_2+\frac{1}{4}(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2+\frac{25}{96}\right\} \tag{7}$$

则对于所有的 $(e_1,e_2,e_3)\neq(0,0,0)$,$\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$ 负定,即式(3)的零解稳定,从而2个神经元达到完全同步. 本文中 x_1,x_2 分别对应式(1)的解中2个神经元的动作电位.

2.2 模式分解法

用这个方法处理同步问题最早出现在电路系统中[7],同样可应用到神经系统中. 为了便于分析,先把式(1)写成向量形式:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{X}}&=f(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})\\ \dot{\boldsymbol{Y}}&=f(\boldsymbol{Y})+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

式中,$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\sigma,0,0)$ 是耦合矩阵. 设 $\dot{\boldsymbol{X}}=f(\boldsymbol{X})$ 有混沌解 $\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)$,则式(8)有混沌同步解 $\boldsymbol{\Phi}(t)=[\boldsymbol{\varphi}(t)\quad\boldsymbol{\varphi}(t)]^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{X}\quad\boldsymbol{Y}]^{\mathrm{T}}$,式(8)在 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 上的线性化方程为

$$\dot{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{U}$$

其中

$$\boldsymbol{S}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{D} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{D}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{\varphi}(t))$ 为雅可比矩阵.

引入线性变换

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{W}=\boldsymbol{P}[\boldsymbol{W}_1\quad\boldsymbol{W}_2]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{E}$ 是3阶单位矩阵.

则式(8)可化为2个独立的线性系统:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{W}}_1&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{W}_1\\ \dot{\boldsymbol{W}}_2&=(\boldsymbol{A}(t)-2\boldsymbol{D})\boldsymbol{W}_2\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式(1)被约化为2个独立的线性方程(9),这种约化的方法被称作模式分解法. 下面判断 $\boldsymbol{A}(t)-2\boldsymbol{D}$ 的负定性. 对于HR模型,易知:

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}-3ax^2+2bx & 1 & -1\\ -2\hat{d}x & -1 & 0\\ rs & 0 & -r\end{bmatrix}$$

x 满足式(2). 记 $\boldsymbol{R}(t)=\boldsymbol{A}(t)-2\boldsymbol{D}$,其对角化矩阵记为 $\boldsymbol{B}(t)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})/2-2\boldsymbol{D}$,因为相似矩阵有相同的特征值,故只须判断 $\boldsymbol{B}(t)$ 的特征值均为负实部即可. 注意到:

$$\boldsymbol{B}(t)=\begin{bmatrix}-3ax^2+2bx-2\sigma & \dfrac{1-2\hat{d}x}{2} & \dfrac{rs-1}{2}\\ \dfrac{1-2\hat{d}x}{2} & -1 & 0\\ \dfrac{rs-1}{2} & 0 & -r\end{bmatrix}$$

的各阶顺序主子式分别为

$$\boldsymbol{B}_1=-3ax^2+2bx-2\sigma$$

$$\boldsymbol{B}_2=(-3ax^2+2bx-2\sigma)-\left(\frac{1-2\hat{d}x}{2}\right)^2$$

$$\boldsymbol{B}_3=\det(\boldsymbol{B})=(-3ax^2+2bx-2\sigma)r+r(1-2\hat{d}x)^2/4$$

若 $\boldsymbol{B}_1<0,\boldsymbol{B}_2>0,\boldsymbol{B}_3<0$,则 $\boldsymbol{B}(t)$ 的特征值均为负实部,为此

$$\sigma>\frac{(rs-1)^2+r}{8r}-\left(\frac{1}{2}\hat{d}+b\right)\mu-\frac{3}{2}a\mu^2 \tag{10}$$

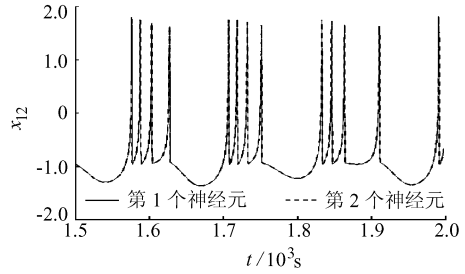
式中,μ 是式(2)的混沌解中动作电位 x 的上界. 通过数值模拟可知 $\mu=1.9$.

2.3 数值验证

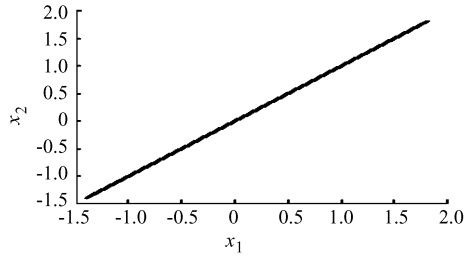
在前面的工作中,基于严格的理论推导得到了2个耦合神经元达到完全同步的充要条件(7)和充分条件(10),下面进一步结合数值模拟来说明条件的有效性,并直观的理解完全同步的意义. 由参考文献[8]的工作,已知道2个耦合的HR神经元达到完全同步的临界值为 $\sigma_{\mathrm{cr}}=0.42$. 根据式(10)计算得 $\sigma>4.1053$,虽然 4.1053 与 0.42 有一定的差距,但恰恰说明了式(10)是充分非必要条件. 分别以 $\sigma=0.5$ 和 $\sigma=5$ 为例,相应的时间历程图和动作电位关系图如图2、图3所示,x_1,x_2 是无量纲的,t 是时间.

由图2a可知,当 $\sigma<4.1503$ 时,2个神经元的时间历程图完全重合,同样 y_1 和 y_2,z_1 和 z_2 也有相同的性质,而图2b说明 x_1 和 x_2 位于1,3象限的角平分线上,所以,根据完全同步的定义知,此时,2个神经元达到完全同步.

类似地,由图3a和图3b可知,当 $\sigma>4.1053$ 时,2个神经元也达到完全同步.

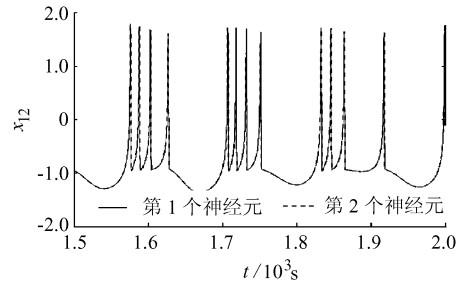


a　时间历程图

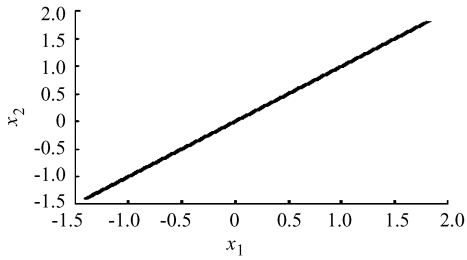


b　动作电位 x_1 和 x_2 的关系图

图 2　2 个神经元的关系图($\sigma=0.5$)



a　时间历程图



b　动作电位 x_1 和 x_2 的关系图

图 3 2 个神经元的关系图($\sigma=5$)

3　结　论

本文研究了具有双向电耦合的 2 个全同 HR 神经元模型的完全同步问题,运用李雅普诺夫函数方法和模式分解法,严格地推导出了完全同步发生的充要条件(7)和充分条件(10),并结合数值模拟的方法验证了条件的有效性,给出了有力的理论依据. 虽然充分条件(10)给出的耦合强度的范围比真正的范围大,但证实了当耦合强度大于某一临界定时,耦合的 HR 神经元始终保持完全同步状态.

参考文献 (**References**)

[1] Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. Synchronization, an universal concept in nonlinear sciences [M]. New York: Cambridge University Press, 2001

[2] Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, *et al*. The synchronization of chaotic systems [J]. Physics Reports, 2002, 366:1 ~ 101

[3] Samuel B. Stability analysis for the synchronization of chaotic systems with different order: application to secure communications[J]. Phys Lett A, 2004, 326:102 ~ 113

[4] Wang Qingyun, Lu Qishao. Time delay-enhanced synchronization and regularization in two coupled chaotic neurons [J]. Chin Phys Lett, 2005,22(3):543 ~ 546

[5] Abarbanel H D I, Huerta R, Rabinovich M I. Synchronized action of synaptically coupled chaotic neurons Ⅰ: simulations using model neurons [J]. Neural Computation, 1996,8:1567 ~ 1602

[6] Ward T Oud, Ivan Tyukin. Sufficient condition for synchronization in an ensemble of Hindmarsh and rose neurons: passivity-based approach[A]. 6th IFAC-Symposium on Nonlinear Control Systems[C]. Stuttgart, 2004

[7] Lü Jinhu, Zhou Tianshou, Zhang Suochun. Chaos synchronization between linearly coupled chaotic systems [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2002,14:529 ~ 541

[8] Shi Xia, Lu Qishao. Firing patterns and complete synchronization of coupled hindmarsh-rose neurons[J]. Chin Phys, 2005, 14:77 ~ 85