带约束多体系统 Lyapunov 指数的数值计算方法

付士慧 王 琪

(北京航空航天大学 理学院, 北京 100083)

摘 要: 应用第 1 类 Lagrange 方程建立的带约束多体系统动力学方程为非线性微分-代数方程组. 利用增广法,将其转化成了常微分方程组,并表示成矩阵形式. 根据方程的特点,给出了方程的 Jacobi 矩阵的具体表达式,提高了计算效率. 在此基础上,给出了 Lyapunov 指数的数值计算方法,并通过对具体的树形和非树形多体系统进行 Lyapunov 指数数值计算,结合相图和 Poincare 映射对系统的动力学特性进行了分析,表明了该方法的可行性和有效性.

关 键 词: 多体系统; 微分-代数方程; Lagrange 方程; Lyapunov 指数

中图分类号: O 316

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2006)06-0742-05

Numerical method for Lyapunov exponents of multibody systems with constraints

Fu Shihui Wang Qi

(School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Dynamic equations of multibody systems with constraints induced by the first kind of Lagrange's equations are nonlinear differential-algebraic equations. To be solved numerically, nonlinear differential-algebraic equations were transformed into ordinary differential equations with the augmentation approach. Ordinary differential equations and their Jacobian matrix were given in the matrix form to improve computational efficiency. A numerical method of Lyapunov exponents of nonlinear dynamics of multibody systems was demonstrated. An example was given to analysis dynamical behavior of two multibody systems with topological tree and non-tree configuration, such as bifurcation and chaos by calculating Lyapunov exponents along with Poincare maps and phase graphs.

Key words: multibody system; differential-algebraic equation; Lagrange equation; Lyapunov exponent

多体系统动力学方程的数值仿真是了解其动力学行为的重要手段. 而在多体系统动力学的数值方法研究中,除解决方程数值求解的速度和精度外,对多体系统非线性动力学特性的研究将逐步成为多体系统动力学研究的重要内容之一. 在非线性动力学中,研究系统动力学行为的有效数值方法有 Lyapunov 指数和 Poincare 映射. Lyapunov 指数是判定动力系统运动特性的工具之一,它给出了对系统任意相邻轨线平均发散程度或平均收敛程度的一种度量,是判别系统动力学行为的一种特征量. 对光滑动力系统,Lyapunov 指数的计算方法研究已比较成熟[1-2]. 对多体系统而言,参考文献[3]和参考文献[4]分别对树形多体系统和树形 Hamilton 系统的 Lyapunov 指数数值计算进行了研究;参考文献[5]利用缩并法也对带约束的多体系统的非线性动力学特性进行了研究. 然而,在利用缩并法数值计算时,每积分一步都要求约束方程 Jacobi 矩阵的零空间的向量基,大大增加了计算量. 本文进一步研究利用增广法计算多体系统微分-代数方程的 Lyapunov 指

收稿日期: 2005-06-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272008)

作者简介: 付士慧(1977-), 女, 河北保定人, 博士生, fshtp@163.com.

数. 由于用矩阵形式表示动力学方程,可提高方程的计算效率,因此,本文首先用增广法推导出动力学方程的矩阵表达式,其次,用矩阵形式推导出其 Jacobi 矩阵,并给出计算 Lyapunov 指数的数值方法,最后通过对具体的树形和非树形多体系统进行数值仿真,说明该方法的可行性和有效性.

1　多体系统的微分-代数方程

本文只研究完整定常约束的多体系统. 带约束的 Lagrange 方程可表示成:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)-\dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{0}\end{cases}$$

式中,$\boldsymbol{T}=\dfrac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}}$ 为系统的动能;$\boldsymbol{q}=[q_1\ \cdots\ q_n]^{\mathrm{T}}$;$\dot{\boldsymbol{q}}=[\dot{q}_1\ \cdots\ \dot{q}_n]^{\mathrm{T}}$ 分别为广义坐标,广义速度列向量(n 为广义坐标数);$\boldsymbol{M}$ 为广义质量矩阵;是 $\boldsymbol{q}$ 的函数;$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{0}$ 为约束方程;而 $\boldsymbol{\Phi}\in\boldsymbol{R}^m$($m$ 为独立约束方程的个数);$\boldsymbol{\lambda}$ 为 Lagrange 乘子列向量;$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}=\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{q}}$;$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}$ 的转置;$\boldsymbol{Q}$ 为系统的广义力列向量.

该方程为微分-代数方程. 利用增广法(将约束方程对时间求 2 阶导数)将其转化成常微分方程,通过 Baumgarte 稳定化方法[6]可得到动力学方程如下[7]:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}&=\boldsymbol{Q}+\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{q}}-\dot{\boldsymbol{M}}\dot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\\ \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}\ddot{\boldsymbol{q}}&=-\dot{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}-\alpha\dot{\boldsymbol{\Phi}}-\beta\boldsymbol{\Phi}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中,$\dot{\boldsymbol{M}},\dot{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{\Phi}}$ 分别为 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{\Phi}$ 对时间 t 的一阶导数;α,β 为常数.

由于用矩阵形式表示动力学方程,便于编程计算,并通过利用矩阵的对称性和相同数据的重复利用,可提高方程的计算效率. 为此,首先由方程(1)求得:

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{m}^{-1}\left[\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{Q}+\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{q}}-\dot{\boldsymbol{M}}\dot{\boldsymbol{q}}\right)+\dot{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}+\alpha\dot{\boldsymbol{\Phi}}+\beta\boldsymbol{\Phi}\right]$$

式中,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{M}^{-1}$;$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}$

利用 Kronecker 积⊗的性质,即设 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\in\boldsymbol{R}^{n_1\times n_2}$,$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n_2}$($n_1,n_2$ 为正整数),矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对向量 $\boldsymbol{q}$ 的偏导数定义为 $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}=\left[\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial q_1}\ \cdots\ \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial q_n}\right]$,则有 $\left[\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial q_1}\boldsymbol{x}\ \cdots\ \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial q_n}\boldsymbol{x}\right]=\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{x})$,式(1)的矩阵形式为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{q}}&=\boldsymbol{v}:=\boldsymbol{f}_1\\ \dot{\boldsymbol{v}}&=\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{Q}^{*}-\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}):=\boldsymbol{f}_2\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式中,:=为定义;$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{m}^{-1}\{\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{*}+[\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{qq}}(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{v})]\cdot\boldsymbol{v}+\alpha\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{\Phi}\}$;$\boldsymbol{Q}^{*}=\boldsymbol{Q}+\dfrac{1}{2}[\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{v})]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}-[\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{v})]\boldsymbol{v}$;$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{q}}=\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{q}}$;$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{qq}}=\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}}{\partial \boldsymbol{q}}$;$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵.

2　多体系统 Lyapunov 指数数值计算

对于完整定常约束的多体系统,若广义力是时间 t 的函数,式(2)可写成:

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)\tag{3}$$

式中,$\boldsymbol{z}=[\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)=[\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{f}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. 式(3)在点 $\boldsymbol{z}$ 的线性化方程为

$$\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{u}\tag{4}$$

式中,$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{z})$ 为式(3)右端函数的 Jacobi 矩阵,即 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{z})=\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{z}}$.

计算 Lyapunov 指数时,常将积分过程在时域分为 K 段,$[0,T]$,$[T,2T]$,…,$[(K-1)T,KT]$,式(3)任给初始扰动,式(4)任给 n 个线性无关的初始扰动,同时求解式(4),式(3),当从时间 0 积分到时间 T,式(4)得到的向量记为 $\boldsymbol{u}_{11},\boldsymbol{u}_{21},\cdots,\boldsymbol{u}_{n1}$,把这些向量进行 Gram-Schmidt 正交化和范数归一化处理后做为下一次积分的初值,当从时间 T 积分到时间 $2T$, 式(4)得到的向量记为 $\boldsymbol{u}_{12},\boldsymbol{u}_{22},\cdots,\boldsymbol{u}_{n2}$,进行向量 Gram-Schmidt 正交化和范数归一化后结果做为下一次积分的初值,重复上述过程,直到积分到时间 KT,式(4)得到的向量此时记为 $\boldsymbol{u}_{1K},\boldsymbol{u}_{2K},\cdots,\boldsymbol{u}_{nK}$. 当 K 足够大时,可得到全部的 Lyapunov 指数[8]:

$$\lambda_i\approx\frac{1}{KT}\ln\prod_{k=1}^{K}\|\boldsymbol{u}_{ik}\|=\frac{1}{KT}\sum_{k=1}^{K}\ln\|\boldsymbol{u}_{ik}\|\qquad i=1,2,\cdots,n$$

由此易见,Lyapunov 指数的数值计算需多次用到式(4)即 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{z})$,其计算速度和精度将影响 Lyapunov 指数,用差分方法计算 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{z})$,不仅计算量大,差分步长难以控制,而且会导致严重的计算误差,虽然在 Matlab 中可直接求得符号方程的 Jacobi 矩阵,但由于多体系统动力学方程的维数较高,方程形式较复杂,计算效率很低. 本文用矩阵形式给出 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{z})$ 的一般表达式及其子矩阵间的关系,很好地避免了上述问题,提高了计算速度.

式(2)的 Jacobi 矩阵可表示成:

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{q}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{v}}\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{q}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{v}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & \boldsymbol{J}_2\\ \boldsymbol{J}_3 & \boldsymbol{J}_4\end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{J}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{I}$$

由 $\boldsymbol{J}_3 = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{q}} = \left[\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial q_1} \quad \cdots \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial q_n}\right]$

而

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial q_j} = -\boldsymbol{M}^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial q_j}\boldsymbol{f}_2\right) + \boldsymbol{M}^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}^*}{\partial q_j} - \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}}{\partial q_j}\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial q_j}\right)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}^*}{\partial q_j} = \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial q_j} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{M}_q^{\mathrm{T}}}{\partial q_j}\boldsymbol{v} - \left[\frac{\partial \boldsymbol{M}_q}{\partial q_j}(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{v})\right]\boldsymbol{v}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial q_j} = -\boldsymbol{m}^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial q_j}\boldsymbol{\lambda}\right) + \boldsymbol{m}^{-1}\cdot\left\{\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_q}{\partial q_j}(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{Q}^*) - \left(\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial q_j}\right)(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{Q}^*) + \boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{Q}^*}{\partial q_j} + \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_{qq}}{\partial q_j}(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{v})\right]\boldsymbol{v} + \alpha\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_q}{\partial q_j}\boldsymbol{v} + \beta\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial q_j}\right\}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial q_j}\boldsymbol{\lambda} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_q}{\partial q_j} - \left(\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial q_j}\right)\right](\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}}{\partial q_j}\boldsymbol{\lambda} \qquad j = 1,\cdots,n$$

故

$$\boldsymbol{J}_3 = -\boldsymbol{M}^{-1}\left[\boldsymbol{M}_q(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{f}_2) - \boldsymbol{Q}_q^* + \boldsymbol{\Phi}_{qq}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_q\right]$$

其中

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\Phi}_{qq}\left[\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})\right] - (\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}_q)\cdot\left[\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})\right] + (\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Phi}_{qq}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{\lambda})$$

$$\boldsymbol{Q}_q^* = \frac{\partial \boldsymbol{Q}^*}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{Q}_q + \frac{1}{2}(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{M}_{qq}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{M}_{qq}\{\boldsymbol{I}\otimes[(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}]\}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_q = \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{m}^{-1}\{-\boldsymbol{D} + \boldsymbol{\Phi}_{qq}[\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{Q}^*)] - (\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}_q)[\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{Q}^*)] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_q^* + \boldsymbol{\Phi}_{qqq}\cdot\{\boldsymbol{I}\otimes[(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}]\} + \alpha\boldsymbol{\Phi}_{qq}(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{v}) + \beta\boldsymbol{\Phi}_q\}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{qq}^{\mathrm{T}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{q}}$$

$$\boldsymbol{M}_{qq}^{\mathrm{T}} = \frac{\partial \boldsymbol{M}_q^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{q}}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{qqq} = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_{qq}}{\partial \boldsymbol{q}}$$

$$\boldsymbol{Q}_q = \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\boldsymbol{M}_{qq} = \frac{\partial \boldsymbol{M}_q}{\partial \boldsymbol{q}}$$

$$\boldsymbol{J}_4 = \frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{Q}_v^* - \boldsymbol{\Phi}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_v)$$

其中

$$\boldsymbol{Q}_v^* = \boldsymbol{Q}_v + \frac{1}{2}[\boldsymbol{M}_q(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{v})]^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{M}_q(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{G}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_v = \boldsymbol{m}^{-1}[\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_v^* + \boldsymbol{\Phi}_{qq}(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{H} + \alpha\boldsymbol{\Phi}_q]$$

$\boldsymbol{E} = (e_{ij})$, $e_{ij} = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial q_i}\right)_j \boldsymbol{v}, \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial q_i}\right)_j$ 表示矩阵$\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial q_i}$的第$j$列$(i,j = 1,\cdots,n)$; $\boldsymbol{G} = (g_{ij})$, $g_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial q_k}\right)_{ij} v_k$, $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial q_k}\right)_{ij}$ 表示矩阵$\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial q_k}$的第$i$行第$j$列$(i,j = 1,\cdots,n)$; $\boldsymbol{H} = (h_{ij})$, $h_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}_q}{\partial q_k}\right)_{ij} v_k, \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}_q}{\partial q_k}\right)_{ij}$ 表示矩阵$\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}_q}{\partial q_k}$的第$i$行第$j$列$(i,j = 1,\cdots,n)$, $\boldsymbol{Q}_v = \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{v}}$.

由 $\boldsymbol{J}_3$, $\boldsymbol{J}_4$ 的表达式易见,在计算时多次用到 $\boldsymbol{M}_q$, $\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\Phi}_{qq}$ 等矩阵,从而避免了相同内容的重复计算,大大提高了计算效率.

3 算 例

3.1 树形多体系统

系统如图1所示,长 $L = 1$ m,质量$m_2 = 10$ kg的均质杆铰接在质量 $m_1 = 10$ kg 的滑块上,两者用扭簧连接,可在铅垂面内运动. 弹簧刚度系数 k_0,扭簧(杆与滑块间)刚度系数 k_1,扭簧在$x_2 = \pi$时无变形,移动阻尼器的阻尼系数 c_0,扭转阻尼器的阻尼系数 c_1, AB 杆上作用一外力偶,其力偶矩为 $Q_{\mathrm{A}} = Q_{\mathrm{Amax}}\sin(\omega t)$. 其中 $k_0 = 20$ N/m, $k_1 = 45$ Nm/rad, $c_0 = 1$ Ns/m, $c_1 = 1.7$ Nms/rad, $\omega = \dfrac{\pi}{6}$rad/s,并且 Q_{Amax}的单位为 Nm.

设系统的广义坐标为 x_1(滑块的水平坐标), y_1(铅垂坐标), x_2(杆 B 与铅垂线的夹角),即 $\boldsymbol{q} = [x_1 \quad y_1 \quad x_2]^{\mathrm{T}}$,系统的约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}) = [y_1] = \boldsymbol{0}$$

再给出系统的广义质量矩阵和广义力将其代入前面给出的公式可得到系统的动力学方程. 利用 Lyapunov 指数的数值计算对系统的动力学特性进行分析.

图2和图3给出了滑块的相位图和相应的最大 Lyapunov 指数随时间 t 变化图. 从图中易见,当系统为周期运动时(图2a),其最大 Lyapunov 指

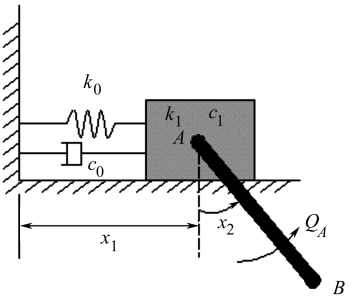
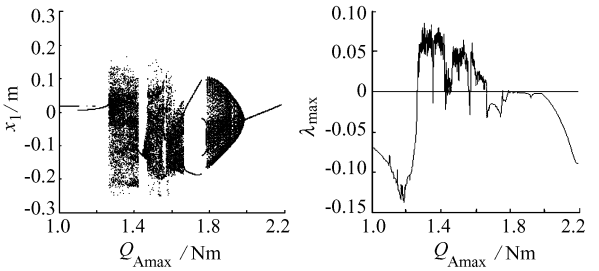


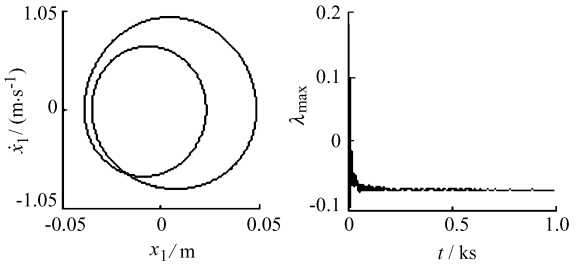
图 1　滑块-摆杆机构



a　Poincare 映射在 x_1 轴上的投影　　b　λ_{max} 随 Q_{Amax} 变化

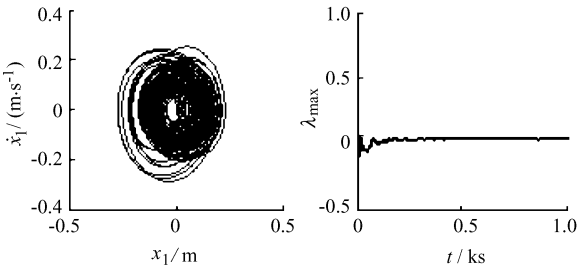
图 4　$Q_{Amax}\in[1,2.2]$ 时的分岔图及 λ_{max} 变化图

数 $\lambda_{max}<0$(图 2b);当系统为混沌运动时(图 3a),其最大 Lyapunov 指数 $\lambda_{max}>0$(图 3b).



a　相位图　　b　λ_{max} 随 t 变化

图 2　$Q_{Amax}=1$ 时的相位图及 λ_{max} 变化图



a　相位图　　b　λ_{max} 随 t 变化

图 3　$Q_{Amax}=1.3$ 时的相位图及 λ_{max} 变化图

当 $Q_{Amax}\in[1,2.2]$ 时,利用 Poincare 映射和最大 Lyapunov 指数的数值计算,分析系统的运动特性. 从图 4a 可见,当 Q_{Amax} 从 2.2 逐步减小时,系统的运动由周期变为准周期,然后又通过周期进入混沌;当 Q_{Amax} 由 1 逐步增大时,系统运动由周期运动通过阵发进入混沌. 而相应的 λ_{max} 随 Q_{Amax} 变化的示意图反映了相同的动力学特性,如图 4b.

3.2　非树形多体系统

系统如图 5 所示,刚性曲柄 OA 质量 $m_1=1$ kg,长 $R=1$ m,刚性连杆 AB 长 $L=2$ m,质量 $m_2=2$ kg,滑块 B 质量 $m_3=1$ kg,机构在铅垂平面内运动. 曲柄上作用有一力偶 $P=Q_A\sin(\omega t)$,Q_A/Nm 为变化参数,$\omega=\dfrac{\pi}{6}$ rad/s,令 $OB=x$,滑块 B 作用有阻力 $F_c=-c\dot{x}$(阻尼系数 $c=6$ Ns/m)和弹力 $F_k=-k(x-x_0)$(弹簧刚度系数 $k=5$ N/m,在 $x_0=-(R+L)$ 处无形变).

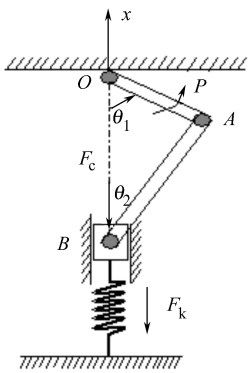


图 5　曲柄-滑块机构

设系统的广义坐标为 θ_1(杆 OA 与铅垂线夹角),θ_2(杆 AB 与铅垂线夹角),x(滑块 B 的铅垂坐标),即 $\boldsymbol{q}=[\theta_1\quad\theta_2\quad x]^{\mathrm{T}}$.

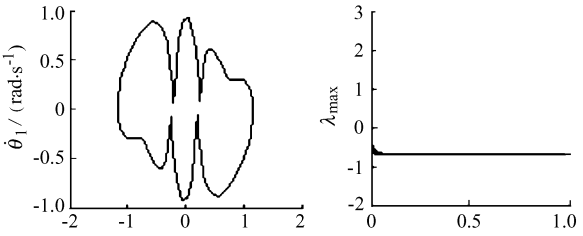
系统的约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix}R\cos(\theta_1)+L\cos(\theta_2)+x\\ R\sin(\theta_1)-L\sin(\theta_2)\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

再给出系统的广义质量矩阵和广义力将其代入前面给出的公式可得到系统的动力学方程. 利用 Lyapunov 指数的数值计算对系统的动力学特性进行分析.

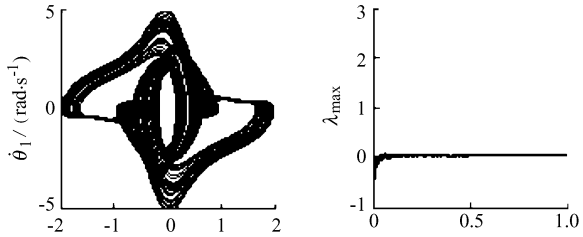
图 6 和图 7 给出了杆 OA 的相位图和相应的最大 Lyapunov 指数随 t 变化图. 从图中易见,当系统为周期运动时(图 6a),其最大 Lyapunov 指数 $\lambda_{max}<0$(图 6b);当系统为混沌运动时(图 7a),其最大 Lyapunov 指数 $\lambda_{max}>0$(图 7b).

当 $Q_A\in[44.171\quad 44.26]$ 时,利用 Poincare 映射和最大 Lyapunov 指数的数值计算,分析系统的运动特性. 从图 8a 可见,当参数 Q_A 从 44.26 逐渐减小到 44.171 时,系统的运动由周期 3 进入混沌,而相应的最大 Lyapunov 指数 λ_{max} 随参数 Q_A 变化的示意图反映了相同的动力学特性,如图



a 相位图 b λ_{max}随t变化

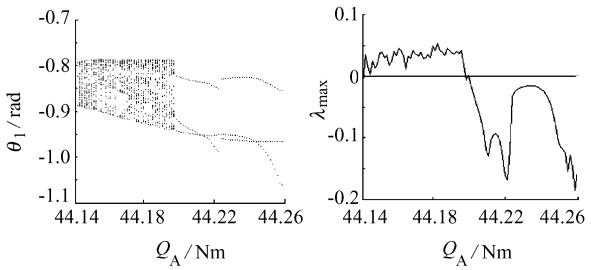
图6 $Q_A=40$时的相位图及λ_{max}变化图



a 相位图 b λ_{max}随t变化

图7 $Q_A=44.2$时的相位图及λ_{max}变化图

8b.



a Poincare映射在θ_1轴上的投影 b λ_{max}随Q_A变化

图8 $Q_A\in[44.171\quad 44.26]$时的分岔图及$\lambda_{max}$变化图

4 结 论

应用第1类Lagrange方程得到系统方程为微分-代数方程,利用增广法将其转化为常微分方程,给出了Lyapunov指数的数值计算方法.通过对具体的树形和非树形多体系统进行数值计算,结合相位图和Poincare映射分析了系统的动力学特性,说明该方法的有效性.与缩并法相比,增广法减少了由于每积分一步都要求约束方程Jacobi矩阵的零空间的向量基所增加的计算量;对参考文献[3]研究的树形多体系统,此方法也适用,并且数值结果与参考文献[3]的结果一致(如图4),说明该方法的正确性;同时,在Lyapunov指数的数值计算过程中,所有的表达式都用矩阵形式给出,避免了相同内容的重复计算,大大减小了计算量,提高了计算速度.

参考文献(**References**)

[1] Oseledec V I. A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems[J]. Trans Moscow Math Soc, 1968,19:197-231

[2] Benettin G, Galgani A, Giorgilli G, et al. Lyapunov exponents for smooth dynamical systems and Hamiltonian systems: a method for computing all of them, part1:theory[J]. Meccanica, 1980, 15:9-20

[3] 王琪,黄克累,陆启韶. 树形多体系统动力学的数值分析方法[J]. 固体力学学报,1999, 20(4): 363-367
Wang Qi, Huang Kelei, Lu Qishao. A numerical algorithm for nonlinear dynamical analysis of multibody systems with topological tree configuration[J]. Acta Mechanica Solida Sinica,1999, 20(4): 363-367(in Chinese)

[4] 金俐,王琪,陆启韶. 树形多体Hamilton系统的Lyapunov指数计算方法[J]. 北京航空航天大学学报,2001,27(2):230-232
Jin Li, Wang Qi, Lu Qishao. Numerical algorithm for calculating Lyapunov exponents of multibody Hamilton systems with topological tree configuration[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2001,27(2):230-232(in Chinese)

[5] 张彦梅,王琪,陆启韶. 带约束非线性多体系统动力学方程数值分析方法[J]. 应用力学学报,2002,19(3):54-58
Zhang Yanmei, Wang Qi, Lu Qishao. Numerical analytical method for nonlinear dynamical equations of multibody systems with constraints[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2002,19(3):54-58(in Chinese)

[6] Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motionin dynamical systems[J]. Comp Meth in Appl Mech and Engineering, 1972,1:1-16

[7] 王琪, 陆启韶. 多体系统Lagrange方程数值算法的研究进展[J]. 力学进展,2001,31(1), 9-17
Wang Qi, Lu Qishao. Advances in the numerical methods for Lagrange's equations of multibody systems[J]. Advances in Mechanics, 2001,31(1), 9-17(in Chinese)

[8] Parker Thomas S, Chua Leon O. Practical numerical algorithms for chaotic systems[M]. Beijing:World Publishing Corp,1992, 74

(责任编辑:张 嵘)