带权优化约束 Delaunay 三角化算法

孟宪海 李吉刚

(北京航空航天大学 计算机学院, 北京 100083) (北京航空航天大学 机械工程及自动化学院, 北京 100083)

杨 钦

(北京航空航天大学 计算机学院, 北京 100083)

摘 要: Delaunay 细化算法是目前大多数约束 Delaunay 三角化算法的主要思想,针对其要求输入的约束条件中不能包含夹角较小的尖角的问题,给出了 Delaunay 细化算法收敛的充分条件,并通过在尖角点和尖角边处引入带权点和带权 Delaunay 空圆/球准则的方法提出了一种带权优化约束 Delaunay 三角化算法,解决了经典的细化算法在尖角处算法不收敛时需引入辅助控制区域以及过多辅助点的问题,对算法的收敛性进行了分析,给出了相应的算法应用实例,可以应用于复杂几何对象的科学计算和工程分析.

关 键 词: 计算机图形学; 三角剖分; 算法; 约束 Delaunay 三角化; Delaunay 细化算法; 带权

中图分类号: TP 391.4

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2005)12-1284-05

Conforming Delaunay triangulation optimized by weighted method

Meng Xianhai

(School of Computer Science and Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Li Jigang

(School of Mechanical Engineering and Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Yang Qin

(School of Computer Science and Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: As a conforming Delaunay triangulation (CDT) algorithm, Delaunay refinement method has widely application both in theory and practice. It always fails to terminate when there are some small angles intersected by input geometry constraints, so a sufficient condition for termination of Delaunay refinement method was introduced and a new conforming Delaunay triangulation algorithm was presented, which is based on Delaunay refinement method and optimized by weighted method. The algorithm imposes no angle restrictions on the input geometry domains by setting weight value to point where input constraints intersected with small angles and applying the rule of weighted Delaunay circumcircle/circumsphere claim to generate Delaunay triangular mesh, and it avoids appending any additional complex region and need not adding any Steiner points to mesh. Analysis of termination and some results applied by this algorithm were also presented. This method will be useful in the computation and analysis of complicated geometry objects.

Key words: computer graphics; triangulation; algorithms; conforming Delaunay triangulation; Delaunay refinement; weighted

收稿日期: 2004-09-09

作者简介: 孟宪海(1977-),男,黑龙江安达人,博士生,x_h_meng@sina.com.

Delaunay 三角网格由于有网格质量饱满、局部加、删点操作规范和数学基础严谨等特点,在有限元分析、可视化、曲面重构和虚拟现实等领域有着非常广泛的应用,其中满足任意边界和内部约束条件一致性的约束(conforming)Delaunay 三角化算法一直是网格剖分技术的一个研究热点[1~11].

增量算法是当前 Delaunay 三角化算法的主要范式,经典的点集 Delaunay 三角化增量算法主要包括局部变换法和 Bowyer/Watson 算法 2 类,Ruppert[1] 首先在后者的基础上提出了解决约束条件一致性的 Delaunay 细化算法,而后 Shewchuk[2] 将其推广到三维情况下,该算法在输出满足约束条件一致性的 Delaunay 网格的同时,保证了网格中三角形/四面体的质量符合一定的标准.其算法思想被目前大多数约束域 Delaunay 三角化算法所采用[2~10],其中文献[3~6]在细化算法的基础上针对改善输出网格的质量方面做了一些改进工作,但在这些算法中均要求输入的约束条件不能包含夹角较小的尖角情况(如:两面角小于 90°),否则算法无法正确收敛.针对这一问题,在二维约束域,文献[3,7]分别给出了解决任意 PSLG(Planar Straight Line Graph)[3] 约束条件的 Delaunay 三角化算法.近来文献[7~10]等通过在尖角约束条件附近设置相应的控制圆或控制区域等方法,解决了三维 PLC(Piecewise-Linear Complex)[3] 约束条件中的二面夹角小于 90°的限制问题,实现了对任意三维约束域的 Delaunay 四面体剖分,但这些算法存在着构造时引入较多辅助点,造成局部网格过密和算法不易于实现过程等问题.

本文通过引入带权点和带权 Delaunay 准则的方法提出了一种带权优化 Delaunay 三角化算法,方便地解决了在尖角处细化算法不收敛的问题,在算法过程中无需引入任何辅助控制区域,并对生成的网格质量给出了有效的控制方法和算法应用实例.

1　基本概念

定义 1　局部特征尺寸 L. 对于给定的任意一个 PSLG/PLC, $\forall$ 点 P,以 P 为圆心/球心,作与 PSLG/PLC 中的任意 2 个不邻接单元都相交的最小圆/球,该最小圆/球的半径称为点 P 的局部特征尺寸,记为 $L(P)$.

定义 2　Power 距离. 已知 E^d 中的点集 S, $p\in S$的权为 w_p,定义映射 $\pi_p: E^d\to R$ 为:$\pi_p(x)=\|x-p\|^2-w_p$,$\pi_p(x)$称为 x 到 p 的 Power 距离. 带权点 p 可解释为在球心 p,半径为 $\sqrt{w_p}$ 的球,称此球为点 p 的权球,记为 $B(p)$. 如果 $w_p=0$,则$B(p)$退化为 p 点.

定义 3　两带权点正交. 2 个带权点 p,q,如果满足:$\|p-q\|^2=w_p+w_q$,则称 p,q 两点正交. 正交的直观意义是 p,q 两点的权球 $B(p)$和 $B(q)$的交点处的切线正交,参见图 1. 同时定义:若 $\|p-q\|^2<w_p+w_q$,则称两带权点 p,q 干涉.

定义 4　单纯形的正交中心. 对 $1\leqslant k\leqslant d$,S 的 $k+1$ 个带权点组成的子集 T 定义了一个 k 维单纯形 $\Delta_T=C(T)$($C(T)$表示 T 的凸包). 至少存在一个带权点 z(权为 $w_z>0$),z 点和 T 中每点$p\in T$正交,如果 $k=d$,则 z 点唯一. 其中权值最小的 z 点的中心称为 Δ_T 的正交中心,记为$O(\Delta_T)$,权记为 w_z,其权球称为 Δ_T 的最小正交球,记为 $O_{\min}(\Delta_T)$,见图 2. 当 T 中每点 $p\in T$ 的权为 0 时,z 点处半径为 $\sqrt{w_z}$的球是 Δ_T 外接球.

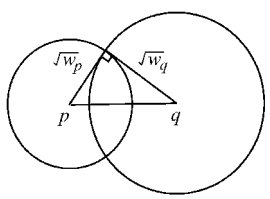


图 1　两带权点正交图

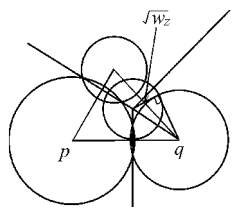


图 2　单纯形的正交中心

定义 5　带权 Voronoi 图与带权 Delaunay 三角化. 若对于给定带权点 $p\in S$,p 的带权邻域 $P(p)$定义如下:$P(p)=\bigcap_{q\in S-\{p\}}\{x\in E^d\mid \pi_p(x)\leqslant \pi_q(x),p,q\in S\}$,$P(p)$也称为 p 的 Power 单元. 点集中所有点的 Power 单元和每个单元的面的并集,定义了一个单元复形 $P(S)$,成为 S 的 Power 图,又被称为带权的 Voronoi 图. 点集 S 的带权 Voronoi 图的对偶称为点集 S 的带权的 Delaunay 三角化,记为 $W_{\mathrm{DT}}(S)$.

本文中记以 PSLG/PLC 形式给出的约束条件为 $\bar{C}$,其中的约束点/集合为 $P/\bar{P}$、约束线段/集合为 $S/\bar{S}$、约束面片/集合为 $F/\bar{F}$.

2　Delaunay 细化算法分析

Delaunay 细化算法的主要思想是首先将 $\bar{C}$ 中的约束线段和约束面片分成小线段和小三角形等一些约束单元集合,然后对约束单元顶点根据 Delaunay 空洞算法生成 Delaunay 三角形/四面体网格,最后对于未在网格中存在的约束单元,通过在网格中逐步加点细分来实现约束条件在最终网格中的存在性.

该算法的关键之处在于加点细分过程能否终止,算法能否收敛. Ruppert[1]已经给出了在二维情况下当输入的PSLG约束条件中相交线段之间的夹角大于90°时该算法能够收敛的证明. Shewchuk[3]也证明了在三维约束域下当PLC中任何约束面之间的两面角大于90°时算法是收敛的. 杨钦[7]也对上述情况进行了仔细的分析,证明得出了Delaunay细化算法的收敛的充分条件,即:

引理1 $\forall P\in\bar{C}$,若以 P 为端点的任何2个约束线段之间的夹角不小于60°,并且以 P 为交点的任何 S 与 F 之间的夹角不小于 $\arccos(\sqrt{2}/4)$,同时 $\forall S\in\bar{C}$,在 S 处相交的任何2个约束面片之间的两面角大于90°,则Delaunay细化算法能够收敛.

当给定的约束条件不满足上述引理时,算法虽然有可能收敛,但在尖角处相交的2个约束线段或面片在细分过程中,有可能彼此相互影响,以至于无论细分到什么程度,二者之间总是相互影响着对方的空外接圆/球的存在性,造成了约束条件无限细分,细分过程无法停止,算法无法收敛[3,7],如图3所示.

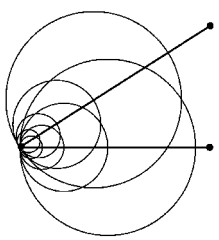


图3 无限细分示意图

在介绍本文算法之前,首先给出约束条件在带权Delaunay网格中存在的带权Delaunay准则[11]:

引理2 $\forall$ 约束线段 $AB\in\bar{C}$,若 $AB\in W_{DT}(\bar{C})$,即 AB 是带权的Delaunay三角形/四面体网格中的一条边,当且仅当存在一个带权点 $z(w_z>0)$,与 A,B 两点均正交,而且带权点 z 与剖分域内的其他点之间不发生干涉.

引理3 $\forall\triangle ABC\in\bar{C}$,若 $\triangle ABC\in W_{DT}(\bar{C})$,即面片 $\triangle ABC$ 是带权的Delaunay网格中的四面体的一个面,当且仅当存在一个带权点 $z(w_z>0)$,与 A,B,C 三点均正交,而且点 z 与剖分域内的其它点之间不发生干涉.

引理2、引理3实际上是欧氏距离下的Delaunay准则在Power距离下的扩展,也是本文算法的理论依据.

3 算法介绍

3.1 算法思路与权值的设置

与带权Delaunay准则类似,本文提出的带权优化Delaunay算法也可视为Delaunay细化算法在Power距离下的扩展,本算法首先根据引理1对约束条件中可能引起不收敛的位置上的点赋以一定的权值,将尖角处局部的点之间的欧氏距离变换为Power距离,Delaunay三角化转换为带权Delaunay三角化,然后对约束条件的顶点集合根据Power距离下的带权Delaunay空洞算法[12]进行点集的带权Delaunay三角化,然后对于在网格中不存在的约束条件,即最小正交圆/球不为空的约束条件,进行逐步加点细分成有空正交球/圆的小线段和小三角面片,得到约束一致的带权Delaunay三角形/四面体网格.

从上述思路可以看出,局部尖角处的点的权值的设置是本算法的关键之处,本文首先对约束条件 $\bar{C}$ 中所有约束点和约束线段的权值设置为0,然后对于不满足引理1的约束点 P 和约束线段 S,有:

1) 设 P 的权值 $w_P=\omega^2[L(P)]^2$,其中 $0<\omega<1/2$.

2) 标识 S 为NarrowLine,并且计算 S 到 $\bar{C}$ 中与其不邻接单元的最小距离 d_{min},并设置 S 的 d_{weig} 变量值为 $\omega^2 d_{min}^2$,其中 $0<\omega<1/2$,对于 S 的端点 E,若 $w_E>d_{weig}$,则令 $w_E=d_{weig}$.

3.2 带权优化Delaunay三角化算法

对于算法所输出的Delaunay三角网格,除了要满足与约束条件的一致性之外,还应满足一定的质量准则,以避免畸形网格单元存在,从而导致无法满足后续的计算和分析的需要,因此本文中采用网格单元的正交圆/球半径与最短边的比值做为带权三角形/四面体网格的质量标准,记为 Q_0.

算法1 二维带权优化算法WDMesh2D:①根据3.1节对约束点 $P\in\bar{P}$ 赋权值;②生成三角网格 $W_{DT}(\bar{P})$;③$\forall$ 任一线段 $S_i\in\bar{S}$,若 S_i 与 $\bar{P}$ 中的某点干涉,则计算 S_i 的正交中心 O_1,设置点 O_1 的权值为0,用 O_1 将 S_i 打断,根据带权Delaunay空洞算法将点 O_1 加入到 $\bar{P}$ 中,更新 $W_{DT}(\bar{P})$;④$\forall$ 任一三角形单元 $t\in W_{DT}(\bar{P})$,若 $Q(t)>Q_0$,则计算 t 的正交中心 O_t,若 O_t 与所有 S_i 均不干涉,则将 O_t 加入 $\bar{P}$ 中,更新 $W_{DT}(\bar{P})$,否则加入与 O_t 干涉的 S_i 的正交中心;⑤删除 $W_{DT}(\bar{P})$ 中约束域外部多余的三角形,得到 $W_{DT}(\bar{C})$.

算法2 三维带权优化算法WDMesh3D:①

对 $\bar{C}$ 中相应的约束点 P 和约束线段 S 赋权值;②对于每个 $F_i \in \bar{F}$,生成三角网格 $W_{DT}(F_i)$,并将其中的网格顶点加入到 $\bar{P}$ 中;③生成四面体网格 $W_{DT}(\bar{P})$;④ ∀ 任一被干涉的约束线段 AB,计算 AB 的正交中心 O_{AB},并用其将 AB 打断,若 AB 为 NarrowLine,则将点 O_{AB} 的权值设为线段 AB 的 d_{weig} 变量值与正交中心的权值 w_O 中的最小值,设置约束线段 AO 和 OB 为 NarrowLine,否则设置点 O_{AB} 的权值为 0,然后将 O_{AB} 加入到 $\bar{P}$ 中,更新 $W_{DT}(\bar{P})$;⑤∀任一被干涉约束三角面片 $\triangle ABC \in W_{DT}(F_i)$,计算三角形的正交中心 $O_\triangle$,若 $O_\triangle$ 与某一约束线段干涉,则转至④,否则设置 $O_\triangle$ 的权值为 0,加入到 $\bar{P}$ 中,更新 $W_{DT}(\bar{P})$ 和 $W_{DT}(F_i)$;⑥ ∀ 任一四面体单元 $t \in W_{DT}(\bar{P})$,若 $Q(t)>Q_0$,则计算 t 的正交中心 O_t,若与某一约束线段干涉则转至④,若与某一约束三角面片干涉则转至⑤,否则设置 O_t 的权值为 0,加入到 $\bar{P}$ 中,更新 $W_{DT}(\bar{P})$;⑦删除 t 中约束域外部多余的三角形,得到 $W_{DT}(\bar{C})$.

3.3　算法收敛性分析

由于在细化算法[1]中,只有当在尖角处引起的无限细分问题会造成算法不收敛,因此本文仅针对该问题给出收敛性分析,对于其他问题的分析与细化算法中类似,可参考文献[1,3,7].

引理 4　∀ 任何 $S \in \bar{C}$,若其任何一个端点 P 的权值均满足:$0<w_P<\omega^2[L(P)]^2$,$0<\omega<1/2$,则线段 S 的正交中心 O,有 $\|OP\|>\omega[L(P)]$,即点 O 的位置不会落在其端点的权圆/球内部.

证明　设 $AB \in \bar{S}$ 为 $\bar{C}$ 中的一条线段,A 点的权值为 w_A^2,B 点的权值为 w_B^2,O_1 为 AB 的正交中心,R 为正交半径.

根据 3.1 节可知 $w_A^2=\omega^2 L(A)^2$,$w_B^2=\omega^2 \cdot L(B)^2$,其中 $0\leqslant\omega<1/2$,即点的权圆或者退化为点本身,或者其半径小于该点的局部特征尺寸的一半. 所以根据局部特征尺寸的定义可知 $w_A+w_B<\|AB\|$,即 2 端点的权圆不相切或相交,这样根据最小正交圆的定义可知,线段 AB 的正交中心 O_1 必落在线段 AB 上.

另外,根据正交中心的定义有 $\|AO_1\|^2=w_A^2+R^2$,$\|BO_1\|^2=w_B^2+R^2$. 又有 O_1 点在 AB 上,可知 $\|AO_1\|=\|AB\|-\|BO_1\|$,因此可得:

$$\|BO_1\| = \frac{w_B^2 - w_A^2 + \|AB\|^2}{2\|AB\|} \qquad (1)$$

根据已知条件 $w_A<\|AB\|-w_B$,代入式(1)可得 $\|BO_1\|>w_B$,同理可得 $\|AO_1\|>w_A$,即其正交中心 O_1 不落在点 A 和点 B 的权圆内.　**证毕**

对于尖角处的约束点,参见图 4 中的点 A,其权圆为 C_A,O_1 为线段 AB 的正交中心,设 O_i 为线段 AO_{i-1} 的正交中心,R_i 为线段 AO_i 的正交半径,i 为约束线段的细分次数,根据引理 2,有 $R_i=\|AO_i\|-\|AO_{i+1}\|$ $(i>2)$,可得 $\lim\limits_{i\to\infty} R_i=0$,则可知必存在一个整数 N_{AB},当 $i>N_{AB}$,$R_i<r_{min}$,其中 r_{min} 为圆 C_A 与 AB 的交点 T 到 $\bar{C}$ 中其他单元的最小距离,设 α 为 AB 与其他线段的最小夹角,可知 $r_{min}=w_A\times\sin\alpha$,则 ∀ $S_i \in \bar{S}$,∃ 整数 $N_{\bar{C}}=\max N_{S_i}$,使得细分过程能够终止,算法 1 能够收敛.

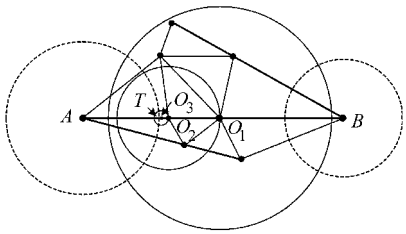


图 4　尖角处细分收敛性分析

与引理 4 的证明类似,可以给出引理 5:

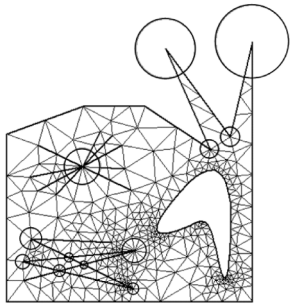
引理 5　对于任一三角形,若其任何 2 个顶点之间的权圆/球均不干涉,则该三角形的正交中心不会落在顶点的权圆/球内部.

在三维约束域的两面尖角处,算法 2 在细化过程中加入的点若与尖角边干涉,则该尖角边被细分,根据算法 2 中④描述,当该尖角边将被一系列依次正交的权圆所完全覆盖时,任何该边上任何一段的正交中心半径为 0,根据引理 2,每段均将存在于网格中,该边将不会再被细分,同样根据引理 5 可知在该极限情况后所加入的三角形正交中心点不会落入覆盖尖角边的权圆中,即后续加入的点将逐渐趋近这些权圆,并且该点与尖角边上的 2 个带权点所构成的三角形的正交中心的权圆半径逐渐变小,趋近于 0,当半径小于正交中心到临近面的最小距离时,该三角形与邻近面上的点不相干涉,该三角面片满足引理 3,细分过程终止,因此可以看出算法 2 也是可以收敛的.

4　算法实例

下面给出了在二维、三维情况下的算法应用实例,其中图 5 为二维 PSLG 约束条件下的算法 1 的结果. 图 6、图 7 分别为生成的机械零件四面体网格,剖分时间分别为 19 s,3 s,图 6 中的小球表示由于面片上线段夹角小于 60°而引入的权球,图 7 中的小球为两面角小于 90°而引入的权球. 算法实例运行环境为微机平台,CPU 为 Intel P IV 2.0G,内存 512M. 在权值设置中,取 $\omega=1/3$,网格

质量标准为 $Q_0=2$.



粗线为PSLG约束；圆为权值大小.

图5 二维算法实例

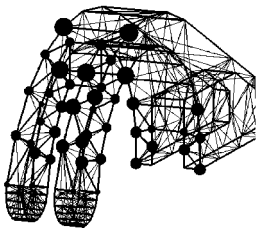


图6 三维算法实例1

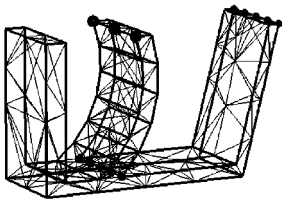


图7 三维算法实例2

5 结 论

本文中的带权优化约束 Delaunay 三角化算法,不仅能够解决输入条件中存在的尖角约束问题,而且与以往算法[7~10]相比,本算法无需在尖角处引入任何辅助控制区域,避免了因此而带来的算法繁琐和实现复杂的问题,保证了细化算法在整个约束域内的一致性. 与文献[4]相比,尽管在权值的选取上有一定类似,但在权值点设置位置、方式、算法过程和允许的输入 PLC 条件等方面都有所改进.

另外,虽然本算法得到的是 Power 距离下的带权 Delauany 三角网格,但由于本算法仅在不满足引理1的尖角约束条件处引入权值进行局部优化,其余顶点权值为0,因此在剖分域中的网格大部分与 Delaunay 三角网格一致,仅仅在细化算法无法或很难处理的局部引入加权准则,使得算法能够处理尖角约束条件,并且尖角处的局部区域内没有引入大量的辅助点,使得最终的网格结构简单,并且网格符合 Power 距离下的 Delaunay 准则,算法结构简洁、易于实现,也同样具有严格的数学基础和规范的后续加点操作算法,因此将在复杂几何对象的科学计算和计算机辅助设计等方面具有广泛的应用前景.

参考文献(References)

[1] Ruppert J. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation[J]. Journal of Algorithms, 1995, 18(3): 548~585

[2] Shewchuk J R. Tetrahedral mesh generation by Delaunay refinement[A]. Proceedings of the 14th ACM Symposium on Computational Geometry[C]. New York: ACM, 1998. 86~95

[3] Shewchuk J R. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation[J]. Computational Geometry, 2002, 22(1-3): 21~74

[4] Cheng S W, Dey T K. Quality meshing with weighted Delaunay refinement[A]. Proceeding of the 13th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms[C]. New York: ACM-SIAM Press, 2002. 137~146

[5] Li X Y. Generating well-shaped d-dimensional Delaunay meshes[J]. Theoretical Computer Science, 2003, 296(1): 145~165

[6] Cheng S W, Dey T K, Edelsbrunner H, *et al*. Silver exudation[J]. Journal of the ACM, 2000, 47(5): 883~904

[7] 杨 钦. 限定 Delaunay 三角剖分[D]. 北京:北京航空航天大学计算机学院,2001
Yang Qin. Constrained Delaunay triangulation[D]. Beijing: School of Computer Science and Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2001(in Chinese)

[8] Murphy M, Mount D M, Gable C W. A point-placement strategy for conforming Delaunay tetrahedralization[A]. Proceeding of the 11th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms[C]. New York: ACM, 2000. 67~74

[9] Cohen-Steiner D, De Verdiere E C, Yvinec M. Conforming Delaunay triangulations in 3D[A]. Proceeding of the 18th Annual Symposium on Computational Geometry[C]. New York: ACM, 2002. 199~208

[10] Cheng S W, Poon S H. Graded conforming Delaunay tetrahedralization with bounded radius-edge ratio[A]. Proceedings of the 14th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms[C]. New York: ACM, 2003. 295~304

[11] Edelsbrunner H. Geometry and topology for mesh generation[M]. New York: Cambridge University Press, 2001

[12] 吴壮志,怀进鹏,杨 钦. E^d 带权点集的 Regular 三角化的构造算法[J]. 计算机学报,2002, 25(11):1243~1249
Wu Zhuangzhi, Huai Jinpeng, Yang Qin. Algorithm for constructing the regular triangulation of a set of weighted points in E^d[J]. Chinese Journal of Computers, 2002, 25(11):1243~1249(in Chinese)