一种高精度角速率圆锥补偿算法

魏晓虹 张春熹 朱奎宝

(北京航空航天大学 仪器科学与光电工程学院, 北京 100083)

摘 要: 以角速率信号作为算法输入时,采用以往常用的圆锥补偿算法,算法误差明显增大. 鉴于光纤陀螺角速率信号可以直接获取,提出了一种以角速率信号作为圆锥补偿算法输入的新补偿算法. 在姿态更新周期内,以光纤陀螺角速率信号作为输入,求得陀螺角速率输出的表达式,结合旋转矢量微分方程,推导出新圆锥补偿算法表达式,然后以算法漂移误差最小对新算法进行优化. 采用规则进动、典型的圆锥运动以及有噪声干扰的圆锥运动作为测试输入,通过与传统算法的对比,新算法计算量低、计算简单方便,算法精度高. 新算法的提出为高动态环境下光纤陀螺捷联系统的姿态误差补偿提供了一个新的思路.

关 键 词: 算法; 圆锥误差; 误差补偿; 旋转矢量; 捷联惯性导航系统

中图分类号: V 249.32^{+}2

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2005)12-1312-05

High accuracy coning compensate algorithm by angular velocity

Wei Xiaohong Zhang Chunxi Zhu Kuibao

(School of Instrument Science and Opto-electronics Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Traditional coning compensation algorithm error greatly increased while angular velocity signal was algorithm input. Considering the direct angular velocity signal output from fibre optic gyroscope (FOG), a novel coning compensation algorithm was introduced and it need input angular velocity signal. In the attitude updating period, the expression of the angular velocity output from FOG was educed by the output signal from FOG. Combining the rotation vector differential equation, the new algorithm expression was deduced. The new algorithm was optimized by the least arithmetic excursion error. These motions, regular forward and rotation motion, coning motion and the coning motion with noise, were test input. Compared with custom algorithms, the new algorithm performance is better in computing time and computing accuracy. Also the new algorithm expression conveniences attitude error compensation. The introduction of the new algorithm is a new idea to calculate attitude error compensation of FOG strapdown inertial navigation (SINS) under the condition of high dynamic angular motion.

Key words: algorithms; coning error; error correction; rotation vector; strapdown inertial navigation system

高速、高精度的圆锥补偿算法是提高捷联惯性导航系统(SINS)性能的重要环节. 圆锥误差的补偿主要与陀螺的采样周期和旋转矢量修正算法有关. 缩短采样周期可以减小圆锥误差,但计算量也相应地增大. 因此研究合适的旋转矢量修正算法是克服圆锥误差的有效途径.

国内外学者提出了许多旋转矢量算法[1,2],这些算法的表达式都是基于陀螺的角增量信息,然而对于高动态环境下,角速率信息更有工程意义[3].

收稿日期: 2004-10-10

作者简介: 魏晓虹(1979-),女,黑龙江讷河人,硕士生, smallrainbow _ wi@ eyou. com.

因此本文针对光纤陀螺的角速率信号能直接连续得到的特点,推导出一种新的圆锥补偿算法表达式,经过仿真研究,此算法在精度和计算量方面具有显著的优越性.

1　传统的圆锥补偿算法

旋转矢量微分方程的简化式:

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\omega} \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{\Phi}$ 为旋转矢量;$\boldsymbol{\omega}$ 为陀螺输出的角速率. 由式(1)可以推导出多种求取旋转矢量的算法,如单子样、二子样、三子样、四子样和二子样迭代算法等都是工程中常用的算法,从算法精度和计算量综合比较,三子样算法比较优越[3]. 三子样算法表达式[4]:

$$\boldsymbol{\Phi} = \Delta\boldsymbol{\theta}_1 + \Delta\boldsymbol{\theta}_2 + \Delta\boldsymbol{\theta}_3 + 0.45(\Delta\boldsymbol{\theta}_1 \times \Delta\boldsymbol{\theta}_3) + 0.65\Delta\boldsymbol{\theta}_2 \times (\Delta\boldsymbol{\theta}_3 - \Delta\boldsymbol{\theta}_1) \tag{2}$$

式中,$\Delta\boldsymbol{\theta}_1, \Delta\boldsymbol{\theta}_2, \Delta\boldsymbol{\theta}_3$ 为 $T \sim T+h$ 姿态更新周期内陀螺等间隔角增量输出. 而根据这 3 个角增量只能假定在姿态更新周期内 $\boldsymbol{\omega}$ 为二次多项式:

$$\boldsymbol{\omega}(T+t) = \boldsymbol{a}_h + 2\boldsymbol{b}_h t + 3\boldsymbol{c}_h t^2 \tag{3}$$

式中,$\boldsymbol{a}_h, \boldsymbol{b}_h, \boldsymbol{c}_h$ 为姿态更新周期 h 内的陀螺角速率多项式系数. 此算法的圆锥运动误差[4]:

$$\varphi_\varepsilon = \frac{1}{204\ 120}\alpha^2(\psi h)^7 \tag{4}$$

式中,α 为圆锥角;ψ 为圆锥运动的角频率.

如果陀螺输出为 $\boldsymbol{\omega}$ 时,需要用数值积分法(如梯形法或辛普生法)由 $\boldsymbol{\omega}$ 提取角增量,再由式(2)计算 $\boldsymbol{\Phi}$. 此时该算法的圆锥运动误差[5]:

$$\varphi_\varepsilon = \frac{1}{2\ 592}\alpha^2(\psi h)^7 \tag{5}$$

显然 $\boldsymbol{\omega}$ 输入情况下三子样算法误差增大,原因是角增量提取过程引入误差. 另外,在姿态更新周期内提取等间隔角增量时也增加了计算量. 因此考虑直接利用 $\boldsymbol{\omega}$ 信号进行圆锥补偿是一个很好的思路.

2　新型的圆锥补偿算法

2.1　算法推导

由于本课题研制的捷联系统选用的光纤陀螺输出 $\boldsymbol{\omega}$,对于传统的三子样算法,在一个计算周期 $T \sim T+h$ 内至少需要 $\boldsymbol{\omega}_i(i=1,2,3,4)$ 提取 $\Delta\boldsymbol{\theta}_j(j=1,2,3)$. 而直接利用 $\boldsymbol{\omega}_i(i=1,2,3,4)$ 可设在 h 内陀螺输出为三次多项式:

$$\boldsymbol{\omega}(T+t) = \boldsymbol{a}_h + 2\boldsymbol{b}_h t + 3\boldsymbol{c}_h t^2 + 4\boldsymbol{d}_h t^3 \tag{6}$$

式中,$\boldsymbol{d}_h$ 为 h 内角速率多项式系数. 陀螺在 $t=T, t=T+h/3, t=T+2h/3, t=T+h$ 的输出为 $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3, \boldsymbol{\omega}_4$,带入式(6)可估计 $\boldsymbol{a}_h, \boldsymbol{b}_h, \boldsymbol{c}_h, \boldsymbol{d}_h$ 的值如下:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{a}}_h &= \boldsymbol{\omega}_1 \\
\hat{\boldsymbol{b}}_h &= \frac{1}{4h}(2\boldsymbol{\omega}_4 - 6\boldsymbol{\omega}_3 + 18\boldsymbol{\omega}_2 - 11\boldsymbol{\omega}_1) \\
\hat{\boldsymbol{c}}_h &= \frac{3}{2h^2}(-\boldsymbol{\omega}_4 + 3\boldsymbol{\omega}_3 - 5\boldsymbol{\omega}_2 + 2\boldsymbol{\omega}_1) \\
\hat{\boldsymbol{d}}_h &= \frac{9}{8h^3}(\boldsymbol{\omega}_4 - 3\boldsymbol{\omega}_3 + 3\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1)
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

同时利用 $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3, \boldsymbol{\omega}_4$ 可得到 $T \sim T+h$ 内的角增量 $\Delta\boldsymbol{\theta}$.

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{a}_h h + \boldsymbol{b}_h h^2 + \boldsymbol{c}_h h^3 + \boldsymbol{d}_h h^4 \tag{8}$$

由式(6)得 $\boldsymbol{\omega}$ 在 T 点的各阶导数:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{a}_h \\
&\boldsymbol{\omega}'(T) = 2\boldsymbol{b}_h \\
&\boldsymbol{\omega}''(T) = 6\boldsymbol{c}_h \\
&\boldsymbol{\omega}'''(T) = 24\boldsymbol{d}_h \\
&\boldsymbol{\omega}^{(i)}(T) = 0 \qquad i \geqslant 4
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

可由式(1)计算出 $\boldsymbol{\Phi}$ 在 T 点的各阶导数:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}'(T) = \boldsymbol{a}_h \\
&\boldsymbol{\Phi}''(T) = 2\boldsymbol{b}_h \\
&\boldsymbol{\Phi}'''(T) = 6\boldsymbol{c}_h + (\boldsymbol{a}_h \times \boldsymbol{b}_h) \\
&\boldsymbol{\Phi}^{(4)}(T) = 24\boldsymbol{d}_h + 6(\boldsymbol{a}_h \times \boldsymbol{c}_h) \\
&\boldsymbol{\Phi}^{(5)}(T) = 36(\boldsymbol{a}_h \times \boldsymbol{d}_h) + 12(\boldsymbol{b}_h \times \boldsymbol{c}_h) \\
&\boldsymbol{\Phi}^{(6)}(T) = 120(\boldsymbol{b}_h \times \boldsymbol{d}_h) \\
&\boldsymbol{\Phi}^{(7)}(T) = 360(\boldsymbol{c}_h \times \boldsymbol{d}_h) \\
&\boldsymbol{\Phi}^{(j)}(T) = 0 \qquad j \geqslant 8
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式(1)的泰勒级数展开式可表示:

$$\boldsymbol{\Phi}(T+h) = \boldsymbol{\Phi}(T) + h\boldsymbol{\Phi}'(T) + \frac{h^2}{2!}\boldsymbol{\Phi}''(T) + \cdots \tag{11}$$

将式(10)带入式(11)得到:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}(T+h) = {} & \boldsymbol{a}_h h + \boldsymbol{b}_h h^2 + \boldsymbol{c}_h h^3 + \boldsymbol{d}_h h^4 + \\
& \frac{1}{6}h^3(\boldsymbol{a}_h \times \boldsymbol{b}_h) + \frac{1}{4}h^4(\boldsymbol{a}_h \times \boldsymbol{c}_h) + \\
& \frac{3}{10}h^5(\boldsymbol{a}_h \times \boldsymbol{d}_h) + \frac{1}{10}h^5(\boldsymbol{b}_h \times \boldsymbol{c}_h) + \\
& \frac{1}{6}h^6(\boldsymbol{b}_h \times \boldsymbol{d}_h) + \frac{1}{14}h^7(\boldsymbol{c}_h \times \boldsymbol{d}_h)
\end{aligned} \tag{12}$$

将 $\hat{\boldsymbol{a}}_h, \hat{\boldsymbol{b}}_h, \hat{\boldsymbol{c}}_h, \hat{\boldsymbol{d}}_h$ 代替 $\boldsymbol{a}_h, \boldsymbol{b}_h, \boldsymbol{c}_h, \boldsymbol{d}_h$ 带入式(12),由式(8)可得到 $T \sim T+h$ 内 $\boldsymbol{\Phi}$ 的估计值:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\Phi}} = {} & \Delta\boldsymbol{\theta} + (X\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_4 + \\
& Y_1\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_3 + Y_2\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_4 + \\
& Z_1\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2 + Z_2\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_3)h^2
\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $X=\frac{47}{6\ 720}$ $Y_1=-\frac{47}{2\ 240}$

$Y_2=\frac{31}{140}$ $Z_1=\frac{39}{2\ 240}$ $Z_2=-\frac{9}{140}$

2.2 算法优化

式(13)为本文得到的初步圆锥误差补偿算法表达式,此表达式仍存在一定程度的误差,需进一步修正. 由于 $\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{\omega}_j$ 在 x 轴上的误差漂移仅与 $(i-j)h/N$有关[6],因此式(13)简化为如下模型:

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}=\Delta\boldsymbol{\theta}+(X\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_4+Y_1\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_3+Z\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2)h^2 \tag{14}$$

在典型的圆锥运动输入下,算法的误差漂移:

$$\varphi_\varepsilon=\frac{1}{2}\alpha^2[\psi h-\sin\psi h-2X(\psi h)^2\sin\psi h-2Y(\psi h)^2\sin(2\psi h/3)-2Z(\psi h)^2\sin(\psi h/3)] \tag{15}$$

式(15)泰勒展开,ψh,$(\psi h)^3$,$(\psi h)^5$,$(\psi h)^7$,$(\psi h)^9$ 的系数分别为:0,$\frac{1}{6}-2X-\frac{4}{3}Y-\frac{2}{3}Z$,$-\frac{1}{120}+\frac{1}{3}X+\frac{8}{81}Y+\frac{1}{81}Z$,$\frac{1}{5\ 040}-\frac{2}{120}X-\frac{64}{87\ 480}Y-\frac{1}{87\ 480}Z$,$-\frac{1}{362\ 880}+\frac{2}{5\ 040}X+\frac{64}{11\ 022\ 480}Y+\frac{1}{11\ 022\ 480}Z$.

当 $X=\frac{29}{6\ 720}$,$Y=\frac{9}{168}$,$Z=\frac{291}{2\ 240}$时,$(\psi h)^3$,$(\psi h)^5$,$(\psi h)^7$ 的系数为零. 算法表达式如下:

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}=\Delta\boldsymbol{\theta}+\left(\frac{29}{6\ 720}\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_4+\frac{9}{168}\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_3+\frac{291}{2\ 240}\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2\right)h^2 \tag{16}$$

算法误差为

$$\varphi_\varepsilon=\frac{1}{8\ 899\ 200}\alpha^2(\psi h)^9 \tag{17}$$

3 算法性能

3.1 算法误差仿真

3.1.1 典型圆锥运动

圆锥运动是分析圆锥补偿算法的典型运动. 以圆锥运动为动态环境的条件下,研究新算法对不可交换性误差的抑制能力. 圆锥运动的角速率:

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}-2\Omega\sin^2(\alpha/2)\\-\Omega\sin\alpha\sin(\Omega t)\\\Omega\sin\alpha\cos(\Omega t)\end{bmatrix}$$

式中,$\Omega=2\pi\psi$. 由圆锥运动的机理可知,y 轴和 z 轴以同频,90°相差进行振动,则 x 轴产生常值漂移,因此以 x 轴的姿态误差角的平均值$|\Delta\boldsymbol{\theta}|$作为圆锥补偿误差的评价标准.

分别利用三子样算法与新算法求姿态角误差角,仿真参数:$\psi=1$ Hz,$\alpha=1°$,$h=0.01$ s,仿真时间 t 为 60 s. 仿真结果如图 1 所示.

取 $\psi=100$ Hz,其他仿真条件相同时,结果如图 2 所示.

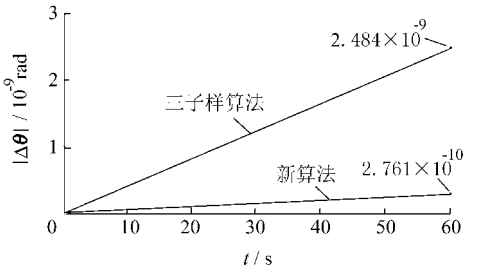
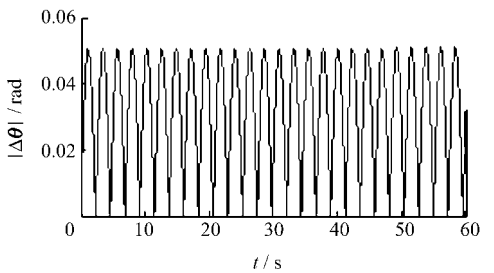
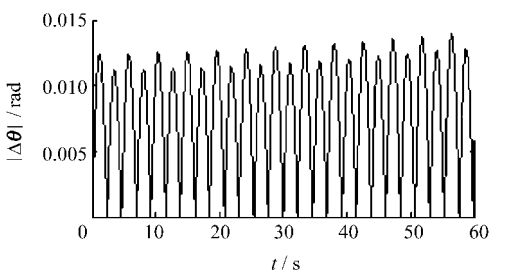


图 1 $\psi=1$ Hz 时圆锥运动下姿态误差角



a 三子样算法仿真



b 新算法仿真

图 2 $\psi=100$ Hz 时圆锥运动下姿态误差角

3.1.2 含有误差的圆锥运动

在实际的工作环境中存在着各种干扰,而且陀螺含有测量误差,陀螺仪的输出信息包含误差如下所示[7]:

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}-2\Omega\sin^2(\alpha/2)+e_1\times10^{-7}\\-\Omega\sin\alpha\sin(\Omega t)+e_2\times10^{-7}\\\Omega\sin\alpha\cos(\Omega t)+e_3\times10^{-7}\end{bmatrix}$$

式中,e_1,e_2,e_3 为[-1, 1]区间均值为零,方差为 1 的正态白噪声. 仿真参数与图 1、图 2 相同,仿真结果如图 3 和图 4 所示.

3.1.3 规则进动[7]

选择更具一般性的规则进动作为输入,评价新算法表达式的性能. 设载体沿 x 轴以 ψ_0 作常值

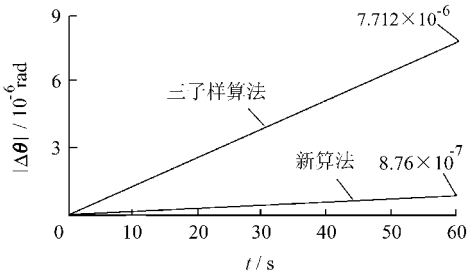
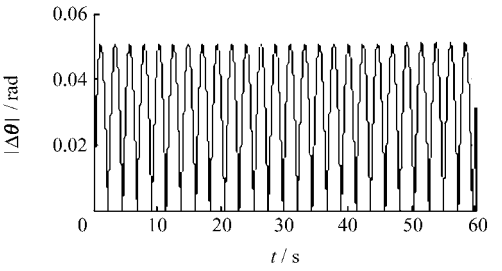
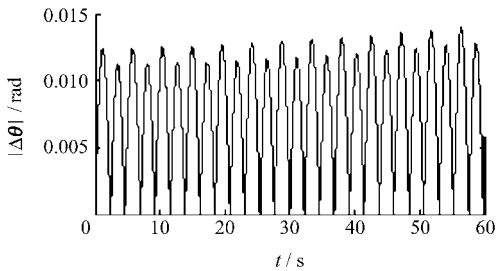


图 3　$\psi=1$ Hz 时含误差的圆锥运动下姿态误差角



a　三子样算法仿真



b　新算法仿真

图 4　$\psi=100$ Hz 时含误差的圆锥运动下姿态误差角

转动,同时以 ψ_c 的频率作锥运动,进动的角频率为

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\psi_0-\psi_c+\psi_c\cos\alpha\\ \psi_c\sin\alpha\sin((\psi_0-\psi_c)t\\ \psi_c\sin\alpha\cos((\psi_0-\psi_c)t\end{bmatrix}$$

设 $\psi_0=0.0001$ rad/s,$\psi_c=2\pi$ rad/s 其他仿真条件与图 1、图 2 相同,仿真结果如图 5、图 6 所示.

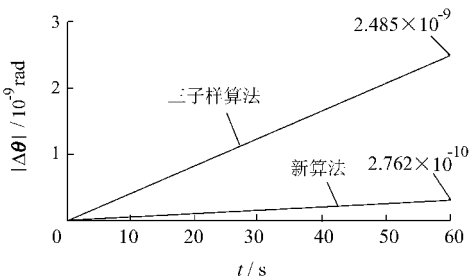
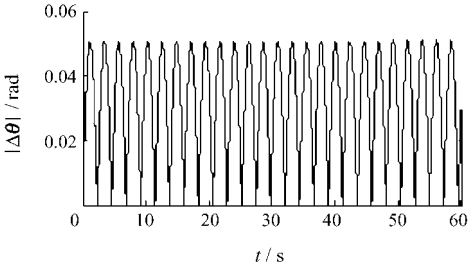


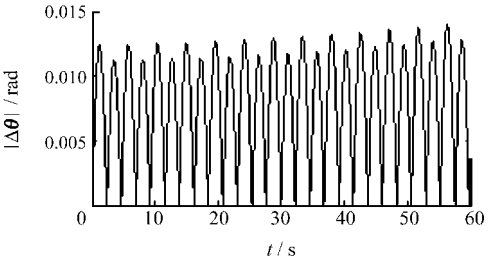
图 5　$\psi=1$ Hz 时规则运动下姿态误差角

3.2　仿真分析

由上述仿真可看出,无论在典型的圆锥运动以及含有误差的圆锥运动,还是更具一般性的进动作为输入,与较优越的三子样算法相比,新算法的精度较高. 在低频锥运动下,新算法精度比传统算法要高一个数量级. 高频锥运动下,虽然算法误差都增大,但新算法误差只是传统算法误差的 1/4.



a　三子样算法仿真



b　新算法仿真

图 6　$\psi=100$ Hz 时规则运动下姿态误差角

在计算量方面,由于在旋转矢量计算过程中不同之处是圆锥补偿部分,因此对圆锥补偿部分的计算量总结如下,三子样算法和新算法的乘法次数分别为 21 和 18,加法次数分别为 30 和 27.

因此,从算法精度和计算量方面综合考虑新算法表达式更具有优越性.

4　结　论

本文利用光纤陀螺的角速率信号能直接得到的特点推导出一种新型的圆锥补偿算法表达式. 并在VC++环境下进行仿真研究,仿真结果表明,与较优越的三子样圆锥补偿算法相比,新算法表达式不但节省了角增量提取的步骤,易于工程实现,而且在精度和计算量方面都具有显著的优越性. 为提高光纤陀螺捷联系统的算法精度提供了一个更有效的途径.

参考文献 (**References**)

[1] Miller R B. A new strap-down attitude algorithm[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics,1983,6(4):287~291

[2] Jiang Y F,Lin Y P. Improved strap-down coning algorithms[J]. IEEE Transaction on Arospace and Electronic System,1992,28(2):484~490

[3] 刘 危,解旭辉,李圣怡. 捷联惯导系统的圆锥误差补偿算法研究[J]. 南京航空航天大学学报,2004,36(3):348~352
Liu Wei, Xie Xuhui, Li Shengyi. Coning algorithm for strapdown inertial navigation system[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2004, 36(3): 348~352(in Chinese)

[4] 缪玲娟,林 丽. 减小动态误差的捷联系统姿态算法研究[J]. 兵工学报,2000,21(3):229~232
Miao Lingjuan, Lin Li. Research on strapdown attitude algorithm for decreasing dynamic error[J]. Journal of Binggong, 2000, 21(3):229~232(in Chinese)

[5] 黄 昊. 光纤陀螺捷联姿态算法及应用研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学控制工程系,2001
Huang Hao. Research on the fiber optic gyroscope strapdown attitude algorithm and application[D]. Harbin: Department of Control Enginerring, Harbin Institute of Technology, 2001(in Chinese)

[6] 黄 昊,邓正隆. 旋转矢量航姿算法的一种新的表达式[J]. 宇航学报,2001,22(3):92~98
Huang Hao, Deng Zhenglong. A new expression of rotation vector for navigation attitude algorithm[J]. Journal of space navigation, 2001, 22(3):92~98(in Chinese)

[7] 杨艳娟. 捷联惯导系统关键技术研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学自动化学院,2001
Yang Yanjuan. Research on the key technology of strapdown inertial navigation system[D]. Harbin: Automation School, University of Harbin Institute of Technology, 2001(in Chinese)

(上接第 1311 页)

4 结 束 语

利用 matlab 等计算工具,可以方便地在计算机上对压缩算法的数学模型进行仿真、分析、验证,生成所需的存储表数值,并对所选参数进行优化. 借助 FPGA 和其仿真开发工具,大大简化了硬件设计的过程,缩短了开发周期,提高了系统的灵活性,为以后的升级提供方便. 采用压缩算法后,已经可以在现有的 FPGA 资源上完成 12 通道结构的 GPS 卫星信号的相关设计. 所用算法结构简单,易于实现,并有较好的压缩效果,压缩比约为 82.39. 仿真表明映射表采用该压缩算法设计的 DDS 数字载波部分的最大杂散约为-90 dB.

参考文献 (**References**)

[1] Sunderland D A, Strauch R A, Wharfield S S, *et al*. COMS/SOS frequency synthesizer LSI circuit for spread spectrum communications[J]. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 1984, 19(4):497~506

[2] Nicholas H T, Samueli H, Kim B. The optimization of direct digital frequency synthesizer performance in the presence of finite word length effects[A]. Proceedings of the 42nd Annual Freq Control Symp[C]. Monmouth NJ: USERACOM, Ft, 1988. 357~363

[3] Bellaouar A, O'brecht M S, Fahim A M. Low-power direct digital frequency synthesis for wireless communications[J]. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 2000, 35(3): 385~390

[4] Sodagar A M, Lahiji G R. Mapping from phase to sine-amplitude in direct digital frequency synthesizers using parabolic approximation[J]. IEEE Trans Circuits Syst Ⅱ, 2000, 47: 1452~1457

[5] 陆 娟,常 青,张其善,等. 十二通道 GPS 信号发生器方案研究[J]. 北京航空航天大学学报, 2003, 29(4): 331~334
Lu Juan, Chang Qing, Zhang Qishang, *et al*. Design of a twelve-channel digital GPS simulation system[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2003, 29(4): 331~334(in Chinese)

[6] Kroupa V F. Synthesis techniques[A]. Derect Digital Frequency Synthesizers, A Selected Reprint Volume[C]. New York: Institate of Electical and Electronics Engineers, 1999. 3~13